Planche n° 13. Fonctions circulaires réciproques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)**

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x),\ \operatorname{Arcsin}(\sin x),\ \cos(\operatorname{Arccos} x),\ \operatorname{Arccos}(\cos x),\ \tan(\operatorname{Arctan} x),\ \operatorname{Arctan}(\tan x).$$

Exercice n° 2 (IT)

1) (**) Calculer $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$ pour x élément de $[-1;1]$.

2) (**) Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.

3) (**) Calculer $\cos(\operatorname{Arctan} a)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} a)$ pour a réel donné.

4) (***) Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de $\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Exercice n° 3 (*I)**

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.

Exercice n° 4 (***)

Simplifier les expressions suivantes :

1) $f_1(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2) $f_2(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

3) $f_3(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

4) $f_4(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2x^2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x+1} + \operatorname{Arctan}\dfrac{x-1}{x}$.

Exercice n° 5 (**)

Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice n° 6 (*I)**

Calculer $u_n = \operatorname{Arctan}\dfrac{2}{1^2} + \operatorname{Arctan}\dfrac{2}{2^2} + \ldots + \operatorname{Arctan}\dfrac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (Utiliser le n° 2.4))

Exercice n° 7 (**) (Mines de DOUAI 1984)

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2-1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?

2) Exprimer, sur $\mathscr{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice n° 8 (**)

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{1)}\ \sin(2\operatorname{Arcsin} x) \quad \textbf{2)}\ \cos(2\operatorname{Arccos} x) \quad \textbf{3)}\ \sin^2\left(\frac{\operatorname{Arccos} x}{2}\right)$$

Exercice n° 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) (*) $\cos x = \dfrac{1}{3}$

2) (*) $\sin(2x) = -\dfrac{1}{4}$

3) (*) $\tan(x) = 3$

4) (***) $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

5) (***) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$

6) (***) $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

7) (***) $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.