Planche n° 13. Fonctions circulaires réciproques : corrigé

Exercice n° 1

1) Arcsin x existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\sin(\text{Arcsin}\,x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ de } [-1,1],\ \sin(\text{Arcsin}\,x) = x.$$

2) $\text{Arcsin}(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant x-2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(x-2k\pi)) = x-2k\pi.$$

De plus, on a $k \leqslant \frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4} < k+\frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x - 2\pi\, E\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right).$$

• S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi-x+2k\pi)) = \pi-x+2k\pi.$$

De plus, $k \leqslant \frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4} < k+\frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4}\right)$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \pi - x + 2\pi\, E\left(\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4}\right).$$

3) Arccos x existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\text{Arccos}\,x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ dans } [-1,1],\ \cos(\text{Arccos}\,x) = x.$$

4) $\text{Arccos}(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0,\pi]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leqslant x < \pi+2k\pi$, alors $\text{Arccos}(\cos x) = x-2k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi+2k\pi \leqslant x < 2k\pi$ alors $\text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

5) Pour tout réel x, $\tan(\text{Arctan}\,x) = x$.

6) $\text{Arctan}(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$. Dans ce cas, $\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x-k\pi)) = x-k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$.

Exercice n° 2

1) 1ère solution. Posons $f(x) = \text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x$ pour x dans $[-1,1]$.

f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $]-1,1[$ puis sur $[-1,1]$ par continuité de f en -1 et en 1. Pour tout x de $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x = \frac{\pi}{2}.}$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \text{Arccos}\,x$. Mais alors,

$$\text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x = \text{Arccos}(\cos\theta) + \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

($\text{Arccos}(\cos\theta) = \theta$ car $\theta \in [0,\pi]$ et $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\theta$ car $\frac{\pi}{2}-\theta$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.)

2) **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$. Notons que f est impaire.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\,\text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2}\text{sgn}(x).}$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \text{Arctan}\, x$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} &= \text{Arctan}(\tan\theta) + \text{Arctan}(\text{cotan}\,\theta) = \text{Arctan}(\tan\theta) + \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\ &= \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.)

3) $\cos^2(\text{Arctan}\, a) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}\, a)} = \frac{1}{1+a^2}$. De plus , $\text{Arctan}\, a$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\text{Arctan}\, a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\text{Arctan}\, a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Ensuite,

$$\sin(\text{Arctan}\, a) = \cos(\text{Arctan}\, a)\tan(\text{Arctan}\, a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}\, a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \sin(\text{Arctan}\, a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

4) D'après 3),

$$\cos(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b) = \cos(\text{Arctan}\, a)\cos(\text{Arctan}\, b) - \sin(\text{Arctan}\, a)\sin(\text{Arctan}\, b) = \frac{1 - ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b) \neq 0$ et donc que $\tan(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b)$ a un sens. Immédiatement,

$$\tan\left(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b\right) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b) > 0$ et donc $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas, $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b) < 0$ et donc $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b$ est dans $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b$ est dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b - \pi$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et a même tangente que $\text{Arctan}\, \frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, \frac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, \frac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\boxed{\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \begin{cases} \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab} - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

Exercice n° 3

Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$.

La fonction $t \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^y \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$.

De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

De même, la fonction $t \mapsto \operatorname{Arccos}\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^y \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x \operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - 2\sin x \cos x \operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2\sin x\cos x\,(\operatorname{Arcsin}(|\sin x|) - \operatorname{Arccos}(|\cos x|)). \end{aligned}$$

On note alors que f est π-périodique et paire. Pour x élément de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2\sin x\cos x(x - x) = 0$. f est donc constante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et pour x élément de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{1/2} \operatorname{Arccos}\sqrt{t} dt = \int_0^{1/2} \dfrac{\pi}{2}\, dt = \dfrac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 4

1) 1ère solution. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} \times \sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Arctan}'(x). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x) = \operatorname{Arctan} x + C$.
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \operatorname{Arctan} x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \operatorname{Arctan} x$. θ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta = \cos\theta\tan\theta \text{ (car } \cos\theta > 0) \\ &= \sin\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$f_1(x) = \text{Arcsin}(\sin\theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{)}$$
$$= \text{Arctan}\, x.$$

2) 1ère solution. Pour tout réel x, $-1 < -1 + \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant -1+2 = 1$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, f_2 est paire. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\,\text{Arctan}\, x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\,\text{Arctan}\, x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\,\text{Arctan}\,|x|.}$$

2ème solution. Soit $\theta = \text{Arctan}\, x$ pour x réel donné. θ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \text{Arccos}(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta \text{ si } \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta \text{ si } \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases} = \begin{cases} 2\,\text{Arctan}\, x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -2\,\text{Arctan}\, x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\,\text{Arctan}\, x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 2\,\text{Arctan}(-x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$
$$= 2\,\text{Arctan}\,|x|.$$

3) La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ car pour x élément de $[-1, 1]$, $1 - x^2$ est élément de $[0, 1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0.
$\dfrac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1, 1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$. Pour x dans $]-1, 0[\cup]0, 1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0, 1[$, $f_3'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\dfrac{1}{2}\,\text{Arcsin})'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0, 1]$ (par continuité en 0 et en 1) $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x + C$. $x = 1$ fournit $C = \dfrac{\pi}{4}$. Donc, pour tout x de $50, 1]$

$$_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x\right) = \frac{1}{2}\,\text{Arccos}\, x.$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ f_3(x) = \frac{1}{2}\,\text{Arccos}\, x.}$$

Si x est dans $]-1, 0[$, $f_3'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\dfrac{3}{2}\,\text{Arcsin})'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1, 0]$ (par continuité) $f_3(x) = \dfrac{3}{2}\,\text{Arcsin}\, x + C'$. $x = 0$ fournit $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1, 0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\,\text{Arcsin}\, x + \frac{\pi}{4}.}$$

4) f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned}f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\dfrac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\dfrac{(x-1)^2}{x^2}}\\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0.\end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1<x<0$, $f(x) = \lim\limits_{\substack{t\to-1\\ t>-1}} f(t) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \operatorname{Arctan} 2 = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$.

Pour $x<-1$, $f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = 0$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x) = \left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x\in]-1,0[\end{array}\right. .}$$

Exercice n° 5

$0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\in[0,\frac{\pi}{2}[$, on a donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$. De même, $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right) = \frac{\dfrac{7}{9}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{7}{9}\dfrac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 6

(On va retrouver le résultat de l'exercice n° 2 dans un cas particulier) Soient a et b deux réels positifs.
Alors, $\operatorname{Arctan} a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan} b \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} a) - \tan(\operatorname{Arctan} b)}{1+\tan(\operatorname{Arctan} a)\tan(\operatorname{Arctan} b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{\forall a\geq 0,\ \forall b\geq 0,\ \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2} = \operatorname{Arctan}\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1}\operatorname{Arctan} k - \sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Arctan} k\\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) + \operatorname{Arctan} n - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2}=\frac{3\pi}{4}.}$$

Exercice n° 7

1) f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

2) Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x)=2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1}+(x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{(2x-1)^2}}=2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1}-\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x)=2xg(x)$ où $g(x)=\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x}\dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3) Pour x élément de $\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{1}{2x^2-2x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2}\\&=\frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}=-\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1=2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1=2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}>0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. Quand x tend vers $\dfrac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}<0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ en un certain réel x_0 de $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0,\dfrac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0,x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$.

4) Enfin, puisque $f'(x)=2xg(x)$ pour $x\neq 0$, on a les résultats suivants :

sur $]-\infty,0[$, $f'>0$, sur $]0,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\dfrac{1}{2}\right[$, $f'<0$, sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$, $f'>0$. Comme $f'(0)=1>0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f'>0$, sur $]x_0,\dfrac{1}{2}[$, $f'<0$ et sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$, $f'>0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$ et est strictement décroissante sur $[x_0,\dfrac{1}{2}[$.

Exercice n° 8

1) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\operatorname{Arcsin}x)=2\sin(\operatorname{Arcsin}x)\cos(\operatorname{Arcsin}x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

2) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\operatorname{Arccos}x)=2\cos^2(\operatorname{Arccos}x)-1=2x^2-1$.

3) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2\left(\dfrac{\operatorname{Arccos}x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(1-\cos(\operatorname{Arccos}x))=\dfrac{1-x}{2}$.

Exercice n° 9

1) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\cos x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi\text{ ou }\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=-\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi.$$

$\mathscr{S} = \left(\text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = -\text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi.\end{aligned}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\tan(x) = 3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arctan}(3) + k\pi.$$

4) Une solution est nécessairement dans $[-1, 1]$ et même dans $[0, 1]$.
La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $[0, 1]$. La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$ réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. Comme $\frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, l'équation proposée a une solution et une seule et cette solution est dans $[0, 1]$.
Si $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ alors $\sin\left(\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Réciproquement, puisque $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \text{Arcsin}(1) + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Dans l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, il y a un nombre et un seule dont le sinus vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à savoir $\frac{\pi}{4}$. Donc, pour x dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \sin\left(\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{4}(1 - x^2) + x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} = \frac{1}{2} \\ &\text{(car le premier membre de l'équation initiale est positif)} \\ &\Leftrightarrow x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^4}{2} \\ &\Leftrightarrow 16x^4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2) = \left(2x^4 - 5x^2 + 2\right)^2 \text{ et } 2x^4 - 5x^2 + 2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^8 - 20x^6 + 16x^4 = 4x^8 - 20x^6 + 33x^4 - 20x^2 + 4 \text{ et } x^2 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right] \\ &\Leftrightarrow 17x^4 - 20x^2 + 4 = 0 \text{ et } x^2 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Leftrightarrow x^2 \in \left\{\frac{10 - \sqrt{32}}{17}, \frac{10 + \sqrt{32}}{17}\right\} \text{ et } x^2 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right] \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{10 - \sqrt{32}}{17} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}} \text{ (car } x \geqslant 0).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}}\right\}.}$$

5) Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit donc x un réel de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x) = \text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right) &\Rightarrow \sin(\text{Arcsin}(2x)) = \sin\left(\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-\left(x\sqrt{2}\right)^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2-2x^2} = 2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2\\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leqslant \frac{16}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$) et de plus $\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or,

$$0 \leqslant \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{16}} \leqslant 2\,\text{Arcsin}\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\,\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\text{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De même, par parité, $\text{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}}\right) + \text{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, -\frac{\sqrt{14}}{8}, \frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{Arcsin}\, x$ existe si et seulement si $x \in [-1, 1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4-4x^2+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(2\,\text{Arcsin}(x)) = 2\sin(\text{Arcsin}\, x)\cos(\text{Arcsin}\, x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus, $\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2\,\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\
&\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } \text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

7) Par croissance de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, si $x \leqslant 0$, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) \leqslant \text{Arctan}(-1) + \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}(1) = 0$. En particulier, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) \neq \frac{\pi}{2}$. Une solution est donc nécessairement strictement positive.

Soit donc x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(x+1)=\frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}(x)\\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)=\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\Leftrightarrow \tan\left(\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\right)=\frac{1}{x} \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x} \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2}=\frac{1}{x} \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow 2x^2=2-x^2 \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x\notin\left\{0,\sqrt{2}\right\}\\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (car } \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right)+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right)=0,8\ldots\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.}$$

