

Planche n° 13. Fonctions circulaires réciproques : corrigé

Exercice n° 1

1) $\text{Arcsin } x$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$. Donc, $\sin(\text{Arcsin } x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ de } [-1, 1], \sin(\text{Arcsin } x) = x.$$

2) $\text{Arcsin}(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

De plus, on a $k \leq \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = \text{E}\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right)$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x - 2\pi \text{E}\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4}\right).$$

• S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus, $k \leq \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} < k + \frac{1}{2}$ et donc $k = \text{E}\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4}\right)$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \pi - x + 2\pi \text{E}\left(\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4}\right).$$

3) $\text{Arccos } x$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$. Donc, $\cos(\text{Arccos } x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1, 1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ dans } [-1, 1], \cos(\text{Arccos } x) = x.$$

4) $\text{Arccos}(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0, \pi]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$, alors $\text{Arccos}(\cos x) = x - 2k\pi$ avec $k = \text{E}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leq x < 2k\pi$ alors $\text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = \text{E}\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right)$.

5) Pour tout réel x , $\tan(\text{Arctan } x) = x$.

6) $\text{Arctan}(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et pour ces x , il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Dans ce cas, $\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$ avec $k = \text{E}\left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice n° 2

1) **1ère solution.** Posons $f(x) = \text{Arccos } x + \text{Arcsin } x$ pour x dans $[-1, 1]$.

f est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$. De plus, pour x dans $] -1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $] -1, 1[$ puis sur $[-1, 1]$ par continuité de f en -1 et en 1 . Pour tout x de $[-1, 1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x \in [-1, 1], \text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \frac{\pi}{2}.$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos \theta$, à savoir $\theta = \text{Arccos } x$. Mais alors,

$$\text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \text{Arccos}(\cos \theta) + \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

($\text{Arccos}(\cos \theta) = \theta$ car $\theta \in [0, \pi]$ et $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta$ car $\frac{\pi}{2} - \theta$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.)

2) **1ère solution.** Pour x réel non nul, posons $f(x) = \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$. Notons que f est impaire.

f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

(mais pas nécessairement sur \mathbb{R}^*). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2 \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x).$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan \theta$ à savoir $\theta = \text{Arctan } x$. Mais alors,

$$\begin{aligned} \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} &= \text{Arctan}(\tan \theta) + \text{Arctan}(\cotan \theta) = \text{Arctan}(\tan \theta) + \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\ &= \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $]0, \frac{\pi}{2}[$.)

3) $\cos^2(\text{Arctan } a) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan } a)} = \frac{1}{1 + a^2}$. De plus, $\text{Arctan } a$ est dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(\text{Arctan } a) > 0$. On

en déduit que pour tout réel a , $\cos(\text{Arctan } a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Ensuite,

$$\sin(\text{Arctan } a) = \cos(\text{Arctan } a) \tan(\text{Arctan } a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan } a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \sin(\text{Arctan } a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

4) D'après 3),

$$\cos(\text{Arctan } a + \text{Arctan } b) = \cos(\text{Arctan } a) \cos(\text{Arctan } b) - \sin(\text{Arctan } a) \sin(\text{Arctan } b) = \frac{1 - ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà, puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\text{Arctan } a + \text{Arctan } b) \neq 0$ et donc que $\tan(\text{Arctan } a + \text{Arctan } b)$ a un sens. Immédiatement,

$$\tan(\text{Arctan } a + \text{Arctan } b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b$ est dans $] -\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}, \pi[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\text{Arctan } a + \text{Arctan } b) > 0$ et donc $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b$ est dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas,

$$\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\text{Arctan } a + \text{Arctan } b) < 0$ et donc $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b$ est dans $] -\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup] \frac{\pi}{2}, \pi[$. Si de plus $a > 0$, $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b$ est dans $] \frac{\pi}{2}, \pi[$. Dans ce cas, $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b - \pi$

est dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et a même tangente que $\text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\text{Arctan } a + \text{Arctan } b = \begin{cases} \text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab} & \text{si } ab < 1 \\ \text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab} + \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \text{Arctan } \frac{a+b}{1-ab} - \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases} .$$

Exercice n° 3

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin } \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos } \sqrt{t} \, dt$.

La fonction $t \mapsto \text{Arcsin } \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arcsin } \sqrt{t} \, dt$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$.

De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $[0, 1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin } \sqrt{t} \, dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

De même, la fonction $t \mapsto \text{Arccos } \sqrt{t}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arccos } \sqrt{t} \, dt$ est définie et dérivable sur $[0, 1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[0, 1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos } \sqrt{t} \, dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Donc, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x \text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - 2 \sin x \cos x \text{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2 \sin x \cos x (\text{Arcsin}(|\sin x|) - \text{Arccos}(|\cos x|)) . \end{aligned}$$

On note alors que f est π -périodique et paire. Pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2 \sin x \cos x (x - x) = 0$. f est donc constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \text{Arcsin } \sqrt{t} \, dt + \int_0^{1/2} \text{Arccos } \sqrt{t} \, dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2} \, dt = \frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π -périodicité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin } \sqrt{t} \, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos } \sqrt{t} \, dt = \frac{\pi}{4} .$$

Exercice n° 4

1) 1ère solution. Pour tout réel x , $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur \mathbb{R} , impaire, et pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} \times \sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}'(x) . \end{aligned}$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x , $f_1(x) = \text{Arctan } x + C$. $x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \text{Arctan } x .$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \text{Arctan } x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan \theta$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \sqrt{\cos^2 \theta} \tan \theta = \cos \theta \tan \theta \text{ (car } \cos \theta > 0) \\ &= \sin \theta , \end{aligned}$$

et donc

$$f_1(x) = \text{Arcsin}(\sin \theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) \\ = \text{Arctan } x.$$

2) 1ère solution. Pour tout réel x , $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq -1 + 2 = 1$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. f_2 est donc définie et continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* . De plus, f_2 est paire. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x . Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x , $f_2(x) = 2 \text{Arctan } x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).

$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x , $f_2(x) = 2 \text{Arctan } x$. Par parité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2 \text{Arctan } |x|.$$

2ème solution. Soit $\theta = \text{Arctan } x$ pour x réel donné. θ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x = \tan \theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} = \cos^2 \theta (1-\tan^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \text{Arccos}(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta & \text{si } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ -2\theta & \text{si } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases} = \begin{cases} 2 \text{Arctan } x & \text{si } x \geq 0 \\ -2 \text{Arctan } x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 \text{Arctan } x & \text{si } x \geq 0 \\ 2 \text{Arctan}(-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \\ = 2 \text{Arctan } |x|.$$

3) La fonction $x \mapsto \text{Arcsin } \sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ car pour x élément de $[-1, 1]$, $1-x^2$ est élément de $[0, 1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0.

$\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $] -1, 1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $] -1, 1]$, dérivable sur $] -1, 0[\cup] 0, 1[$. Pour x dans $] -1, 0[\cup] 0, 1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $] 0, 1[$, $f_3'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2} \text{Arcsin})'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $] 0, 1[$ (par continuité en 0 et en 1) $f_3(x) = -\frac{1}{2} \text{Arcsin } x + C$. $x = 1$ fournit $C = \frac{\pi}{4}$. Donc, pour tout x de $] 0, 1[$

$$f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Arcsin } x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } x \right) = \frac{1}{2} \text{Arccos } x.$$

$$\forall x \in [0, 1], f_3(x) = \frac{1}{2} \text{Arccos } x.$$

Si x est dans $] -1, 0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2} \text{Arcsin})'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $] -1, 0[$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2} \text{Arcsin } x + C'$. $x = 0$ fournit $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\forall x \in] -1, 0], f_3(x) = \frac{3}{2} \text{Arcsin } x + \frac{\pi}{4}.$$

4) f_4 est dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ et pour x élément de \mathcal{D} , on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x - (x-1)}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4 + 1} - \frac{1}{2x^2 + 1 + 2x} + \frac{1}{2x^2 + 1 - 2x} = -\frac{4x}{4x^4 + 1} + \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$ et $] 0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour

$$-1 < x < 0, f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} f(t) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Arctan} 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\text{Pour } x < -1, f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[\\ \pi & \text{si } x \in] -1, 0[\end{cases}.$$

Exercice n° 5

$$0 \leq \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2} \text{ et}$$

$$\tan \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2 \cdot 5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} \in] 0, \frac{\pi}{2}[$, on a donc $\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} = \operatorname{Arctan} \frac{7}{9}$. De même, $\operatorname{Arctan} \frac{7}{9} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \in] 0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan \left(\operatorname{Arctan} \frac{7}{9} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} \right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9 \cdot 8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\operatorname{Arctan} \frac{7}{9} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice n° 6

(On va retrouver le résultat de l'exercice n° 2 dans un cas particulier) Soient a et b deux réels positifs.

Alors, $\operatorname{Arctan} a \in] 0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{Arctan} b \in] 0, \frac{\pi}{2}[$ et donc, $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus,

$$\tan(\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} a) - \tan(\operatorname{Arctan} b)}{1 + \tan(\operatorname{Arctan} a) \tan(\operatorname{Arctan} b)} = \frac{a - b}{1 + ab},$$

et donc, puisque $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \left(\frac{a - b}{1 + ab} \right).$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\operatorname{Arctan} \frac{2}{k^2} = \operatorname{Arctan} \frac{(k+1) - (k-1)}{1 + (k-1)(k+1)} = \operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{2}{k^2} = \sum_{k=1}^n (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k-1)) = \sum_{k=2}^{n+1} \operatorname{Arctan} k - \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Arctan} k \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) + \operatorname{Arctan} n - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{2}{k^2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Exercice n° 7

1) f est définie et dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

2) Pour x élément de \mathcal{D} ,

$$f'(x) = 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1} + (x^2-1) \frac{-2}{(2x-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1} - \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3) Pour x élément de $\mathcal{D} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x(2x^3-2x^2+x) - (x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2-2x+1) + 2x^4 - 7x^2 + 4x - 1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7\left(x - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$, sur $]0, \frac{1}{2}[$ et sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $]0, \frac{1}{2}[$. g est de plus strictement négative sur $]x_0, \frac{1}{2}[$ et strictement positive sur $]0, x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $] -\infty, 0[$.

4) Enfin, puisque $f'(x) = 2xg(x)$ pour $x \neq 0$, on a les résultats suivants :

sur $] -\infty, 0[$, $f' > 0$, sur $]0, x_0[$, $f' > 0$, sur $]x_0, \frac{1}{2}[$, $f' < 0$, sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$, $f' > 0$. Comme $f'(0) = 1 > 0$, on a donc : sur $] -\infty, x_0[$, $f' > 0$, sur $]x_0, \frac{1}{2}[$, $f' < 0$ et sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$, $f' > 0$. f est strictement croissante sur $] -\infty, x_0[$ et sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$ et est strictement décroissante sur $]x_0, \frac{1}{2}[$.

Exercice n° 8

1) Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\sin(2 \operatorname{Arcsin} x) = 2 \sin(\operatorname{Arcsin} x) \cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

2) Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\cos(2 \operatorname{Arccos} x) = 2 \cos^2(\operatorname{Arccos} x) - 1 = 2x^2 - 1$.

3) Pour tout réel x de $[-1, 1]$, $\sin^2\left(\frac{\operatorname{Arccos} x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\operatorname{Arccos} x)) = \frac{1-x}{2}$.

Exercice n° 9

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / x = -\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi.$$

$$\mathcal{S} = \left(\operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{3} \right) + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{3} \right) + 2\pi\mathbb{Z} \right).$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2x = -\operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{4} \right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{4} \right) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{4} \right) + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{4} \right) + k\pi. \end{aligned}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\tan(x) = 3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \operatorname{Arctan}(3) + k\pi.$$

4) Une solution est nécessairement dans $[-1, 1]$ et même dans $[0, 1]$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right)$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $[0, 1]$. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right)$ réalise donc une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \frac{2\pi}{3} \right]$. Comme $\frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{2\pi}{3} \right]$, l'équation proposée a une solution et une seule et cette solution est dans $[0, 1]$.

Si $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$ alors $\sin \left(\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réciproquement, puisque $x \in [0, 1]$, $0 \leq \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right) \leq \operatorname{Arcsin}(1) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$. Dans l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{3} \right]$, il y a un nombre et un seul dont le sinus vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à savoir $\frac{\pi}{4}$. Donc, pour x dans $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \sin \left(\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^2}{4}(1 - x^2) + x^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4} \right) (1 - x^2)} = \frac{1}{2} \\ &\text{(car le premier membre de l'équation initiale est positif)} \\ &\Leftrightarrow x^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4} \right) (1 - x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^4}{2} \\ &\Leftrightarrow 16x^4 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) (1 - x^2) = (2x^4 - 5x^2 + 2)^2 \text{ et } 2x^4 - 5x^2 + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^8 - 20x^6 + 16x^4 = 4x^8 - 20x^6 + 33x^4 - 20x^2 + 4 \text{ et } x^2 \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \\ &\Leftrightarrow 17x^4 - 20x^2 + 4 = 0 \text{ et } x^2 \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \Leftrightarrow x^2 \in \left\{ \frac{10 - \sqrt{32}}{17}, \frac{10 + \sqrt{32}}{17} \right\} \text{ et } x^2 \notin \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{10 - \sqrt{32}}{17} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}} \text{ (car } x \geq 0). \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}} \right\}.$$

5) Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$. Soit donc x un réel de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x) = \text{Arcsin } x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2}) &\Rightarrow \sin(\text{Arcsin}(2x)) = \sin(\text{Arcsin } x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})) \\
&\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1 - (x\sqrt{2})^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1 - 2x^2} + \sqrt{2 - 2x^2} = 2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - 2x^2 + 2 - 2x^2 + 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 4 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 1 + 4x^2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4 - 6x^2 + 2) = (4x^2 + 1)^2 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x , la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$) et de plus $\text{Arcsin } x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or,

$$0 \leq \text{Arcsin } \sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) = \text{Arcsin } \sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin } \sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2 \text{Arcsin } \sqrt{\frac{8}{16}} = 2 \text{Arcsin } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\text{Arcsin } \sqrt{\frac{7}{32}} + \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De même, par parité, $\text{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}}\right) + \text{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}} \times \sqrt{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ce qui achève la résolution.

$$\mathcal{S} = \left\{0, -\frac{\sqrt{14}}{8}, \frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\text{Arcsin } x$ existe si et seulement si $x \in [-1, 1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1] \\
&\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1 \\
&\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } (2x^2 - 1)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1, 1]$, $\sin(2 \text{Arcsin}(x)) = 2 \sin(\text{Arcsin } x) \cos(\text{Arcsin } x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus, $\text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } 2 \text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \text{ et } \text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

7) Par croissance de la fonction arctangente sur \mathbb{R} , si $x \leq 0$, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) \leq \text{Arctan}(-1) + \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}(1) = 0$. En particulier, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) \neq \frac{\pi}{2}$. Une solution est donc nécessairement strictement positive.

Soit donc x un réel strictement positif.

$$\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)) = \frac{1}{x} \text{ et } \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1) + (x+1)}{1 - (x-1)(x+1)} = \frac{1}{x} \text{ et } \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x} \text{ et } \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2 - x^2 \text{ et } \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } x \notin \{0, \sqrt{2}\}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (car } \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right) = 0,8\dots \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[).$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}.$$