Planche n° 12. Trigonométrie circulaire : corrigé

Exercice n° 1

1) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

2) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

4) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.

5) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.

6) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

7) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

8) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 2

1) $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

2) $\sin x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

3) $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}\right\}$ et $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

4) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}\right\}$ et $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

5) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

6) $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 3

1) $\sin(2x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}\right\}$.

2) $\sin\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \in \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}\right\}$.

3) $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{20}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{20}, \dfrac{13\pi}{20}, \dfrac{17\pi}{20}\right\}$.

4) $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

5) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$.
De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

6) $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

7) $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

8) $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

9) $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

10) $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x \dfrac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

11) 1ère solution.

$$\begin{aligned}\sin(2x)+\sin x=0 &\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(x+\pi)\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x=x+\pi+2k\pi)\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ 2x=\pi-(x+\pi)+2k\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\pi+2k\pi)\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{2k\pi}{3})\end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{0,\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},2\pi\right\}$.

2ème solution.

$$\begin{aligned}\sin(2x)+\sin x=0 &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x)+\sin(x)=0\Leftrightarrow \sin(x)(2\cos(x)+1)=0\Leftrightarrow \sin(x)=0\text{ ou }\cos(x)=-\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=k\pi)\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi)\text{ ou }(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi)\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}12\cos^2x-8\sin^2x=2 &\Leftrightarrow 6\cos^2x-4(1-\cos^2x)=1\Leftrightarrow \cos^2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ ou }\cos=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 4

1) Pour $x\in[-\pi,\pi]$, $\cos x\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.

2) Pour $x\in\mathbb{R}$, $\sin x\geqslant-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$.

3) Pour $x\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}\cos x>\cos\frac{x}{2} &\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-1>0\Leftrightarrow\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)>0\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}+1<0\text{ et }\cos\frac{x}{2}\neq1\\ &\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right[\\ &\Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{4\pi}{3}+4k\pi,\frac{8\pi}{3}+4k\pi\right[\Leftrightarrow x\in\left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right].\end{aligned}$$

4) Pour $x\in[-\pi,\pi]$, $\cos^2x\geqslant\cos(2x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1+\cos(2x))\geqslant\cos(2x)\Leftrightarrow\cos(2x)\leqslant1\Leftrightarrow x\in[-\pi,\pi]$.

5) Pour $x\in[0,2\pi]$, $\cos^2x\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$.

6) Pour $x\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{3}\leqslant\sin\frac{x}{3} &\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3}\geqslant0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ 2k\pi\leqslant\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi\\ &\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4}+6k\pi\leqslant x\leqslant3\pi+\frac{3\pi}{4}+6k\pi\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant2\pi\end{aligned}$$

Exercice n° 5

$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et donc, puisque $\cos\frac{\pi}{8}>0$,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.}$$

De même, $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et donc, puisque $\sin\frac{\pi}{8}>0$,

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

Exercice n° 6

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ et }\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Exercice n° 7

Pour n entier naturel non nul, on pose $S_n=\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)}$.

- $S_1=e^{ia_1}+e^{-ia_1}=2\cos a_1$
- Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $S_n=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n$ et montrons que $S_{n+1}=2^{n+1}\cos a_1\ldots\cos a_n\cos a_{n+1}$.

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_{n+1})}=e^{ia_{n+1}}\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)}+e^{-ia_{n+1}}\sum e^{i(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)}\\&=2\cos a_{n+1}S_n\\&=2^{n+1}\cos a_1\ldots\cos a_{n+1}\text{ (par hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n\geqslant 1,\ S_n=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n$.

Ensuite, pour $n\geqslant 1$, $\sum\cos(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)=\mathrm{Re}(S_n)=2^n\cos a_1\ldots\cos a_n$ (on obtient aussi $\sum\sin(\pm a_1\pm\ldots\pm a_n)=\mathrm{Im}(S_n)=0$).

Exercice n° 8

1) Si a est dans $]0,2\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\frac{a}{2^k}\neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(2\frac{a}{2^k}\right)=2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)&=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}=\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)}\\&=\frac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\text{ (produit télescopique).}\end{aligned}$$

2) $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)>0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{2^n\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right)-\ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

Exercice nº 9

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2^{4\cos^2 x+1}+16\times 2^{4\sin^2 x-3}=20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1}+16\times 2^{1-4\cos^2 x}=20\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}-10+16\times 2^{-4\cos^2 x}=0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}-10+\frac{16}{2^{4\cos^2 x}}=0\Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x})^2-10\times 2^{4\cos^2 x}+16=0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}\text{ est solution de l'équation }X^2-10X+16=0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}=2\text{ ou }2^{4\cos^2 x}=8\Leftrightarrow 4\cos^2 x=1\text{ ou }4\cos^2 x=3\\
&\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\text{ ou }\cos x=-\frac{1}{2}\text{ ou }\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ ou }\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

Exercice nº 10

1) Tout d'abord, d'après la formule de Moivre,

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\text{ et }\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

Soit donc $\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta)=\frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta)=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2) Soit $a\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1ère méthode. a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}&\Leftrightarrow\left(3x-x^3\right)\left(1-3a^2\right)=\left(1-3x^2\right)\left(3a-a^3\right)\ \left(\text{car }\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ ne sont pas solution de l'équation}\right)\\
&\Leftrightarrow\left(3a^2-1\right)x^3-3\left(a^3-3a\right)x^2-3\left(3a^2-1\right)x+a^3-3a=0\\
&\Leftrightarrow(x-a)\left(\left(3a^2-1\right)x^2+8ax-a^2+3\right)=0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $\left(3a^2-1\right)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta'=16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3)=3a^4+6a^2+3=(\sqrt{3}(a^2+1))^2>0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{a,\frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},\frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a = \tan\alpha$ et de même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x = \tan\theta$ (à savoir $\alpha = \mathrm{Arctan}\, a$ et $\theta = \arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} \Leftrightarrow \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan\alpha = a$, puis

$$x = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{(a + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}a)}{1 - 3a^2} = \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2},$$

et $x = \tan(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \dfrac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}$.

Exercice n° 11

Pour $x \in [0, \pi]$, posons $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x) \text{ et } \tan(4x) \text{ existent} \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \left(2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \left(3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \left(x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\pi\mathbb{Z}\right),\ \left(x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right\}. \end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0, \pi]$.

Sur $I = \left[0, \frac{\pi}{8}\right[$ ou $I = \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, (E) a exactement une solution dans I. Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ses nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty, +\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles. Ceci porte le total à $6 + 2 = 8$ solutions.

En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty, +\infty[$ et finalement,

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet exactement dix solutions dans } [0, \pi].}$$

Exercice n° 12

1) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$.

2) D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6) = \frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{4}\sin(4x)+2\sin(2x)+3x\right)$.

3) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6) = \frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \sin^4 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{4}\sin(4x)-2\sin(2x)+3x\right)$.

4) $\cos^2 x\sin^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2(2x) = \dfrac{1}{8}(1-\cos(4x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{1}{4}\sin(4x)\right)$.

5) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^6 = -\frac{1}{64}\left(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x)-12\cos(4x)+30\cos(2x)-20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x)+6\cos(4x)-15\cos(2x)+10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \sin^6 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{32}\left(-\dfrac{1}{6}\sin(6x)+\dfrac{3}{2}\sin(4x)-\dfrac{15}{2}\sin(2x)+10x\right)$.

6) $\cos x\sin^6 x = \sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x\sin^6 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{7}\sin^7 x$.

7) $\cos^5 x\sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)^2\sin^2 x = \sin' x\sin^2 x - 2\sin' x\sin^4 x + \sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin^3 x - \dfrac{2}{5}\sin^5 x + \dfrac{1}{7}\sin^7 x$.

8) $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x\sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

Exercice n° 13

1) Pour x réel , on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)^4\left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^6\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix}-3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix})\\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6).\end{aligned}$$

(**Remarque.** La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10}-\frac{\sin 8x}{4}-\frac{\sin 6x}{2}+2\sin 4x+\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{512}\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}+2(-\sqrt{3})-\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2) Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x\sin^7 x &= \cos^4 x\sin^6 x\sin x = \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3\sin x\\ &= \cos^4 x\sin x - 3\cos^6 x\sin x + 3\cos^8 x\sin x - \cos^{10} x\sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\ &= -\frac{1}{5}\times\frac{1}{32}(1-9\sqrt{3}) + \frac{3}{7}\times\frac{1}{128}(1-27\sqrt{3}) - \frac{1}{3}\times\frac{1}{512}(1-81\sqrt{3}) + \frac{1}{11}\times\frac{1}{2048}(1-243\sqrt{3})\\ &= \frac{1}{2^{11}\times 3\times 5\times 7\times 11}(-14784(1-9\sqrt{3}) + 7920(1-27\sqrt{3}) - 1540(1-81\sqrt{3}) + 105(1-243\sqrt{3}))\\ &= \frac{1}{365\,440}(-8284 + 18441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Exercice n° 14

1) $\tan\dfrac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\frac{x}{2}.$$

2) Pour tout réel x,

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3}) + \sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0,$$

ou, bien mieux,

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x+\frac{2\pi}{3})}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\left(j^2+1+j\right)\right) = 0.$$

3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ et $\dfrac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\dfrac{\pi}{4}-x$, $\dfrac{\pi}{4}+x$ et $2x$ ne sont pas dans $\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \notin \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x \notin \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) &= \frac{1-\tan x}{1+\tan x} + \frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} + \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\\ &= \frac{(\cos x-\sin x)^2 + (\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos(2x)} = \frac{2}{\cos(2x)}.\end{aligned}$$

4) Pour $x \notin \dfrac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

Exercice n° 15

1) Pour tout réel x, $1-2k\cos x+k^2 = (k-\cos x)^2+\sin^2 x \geq 0$. De plus,

$$1-2k\cos x+k^2 = 0 \Rightarrow k-\cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1,1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1-2k\cos x+k^2 > 0.$$

f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π-périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0,\pi]$. Pour $x \in [0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= \cos x(1-2k\cos x+k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}\sin x(2k\sin x)(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2} \\
&= (1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(\cos x(1-2k\cos x+k^2) - k\sin^2 x) \\
&= (1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x + (1+k^2)\cos x - k) \\
&= (1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x - 1)(k-\cos x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f_k'(x) = \frac{(k\cos x-1)(k-\cos x)}{(1-2k\cos x+k^2)^{3/2}}.}$$

1er cas : $|k|<1$ et $k\neq 0$ ($f_0(x)=\sin x$). Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)<0$ (car $|k\cos x|<1$) et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos x - k$.

x	0		$\text{Arccos}\, k$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

car $f_k(\text{Arccos}\, k) = \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}} = 1$).

2ème cas : $k>1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x)>0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x-1$.

x	0		$\text{Arccos}\,\dfrac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{k}$	$\searrow$	0

car $f_k\left(\text{Arccos}\,\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = \dfrac{1}{k}$.

3ème cas : $k<-1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x)<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1-k\cos x$.

x	0		$\text{Arccos}\,\dfrac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{k}$	$\searrow$	0

car $f_k\left(\text{Arccos}\,\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}} = -\dfrac{1}{k}$.

2) Pour $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, posons $I_k = \displaystyle\int_0^\pi f_k(x)\,dx$.

Si $k=0$, $I_k = \displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$. Sinon,

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{k}\int_0^\pi \frac{2k\sin x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\,dx = \frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2} - \sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k}(|k+1|-|k-1|).
\end{aligned}$$

Plus précisément, si $k \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $I_k = \dfrac{1}{k}((1+k)-(1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k=0$. Si $k>1$, $I_k = \dfrac{1}{k}((1+k)-(k-1)) = \dfrac{2}{k}$, et enfin, si $k<-1$, $I_k = \dfrac{-2}{k}$. En résumé,

$$\boxed{\text{Si } k \in]-1,1[,\ I_k = 2 \text{ et si } k \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ I_k = \frac{2}{|k|}.}$$

Exercice n° 16

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1ère solution.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n+1$ et $S'_n = 0$.

2ème cas. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{ix} \neq 1$ et

$$\begin{aligned}S_n + iS'_n &= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\\ &= e^{inx/2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \begin{cases}\dfrac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}\\ n+1 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases} \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \begin{cases}\dfrac{\left(\sin\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\left((k+1)-\frac{1}{2}\right)x\right) - \sum_{k=0}^{n}\sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right)\\ &= \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{-x}{2}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \sin\frac{(2n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}\end{aligned}$$

et donc, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,...

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n+1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de NEWTON

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)) + i\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)\right) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{ix}\right)^k 1^{n-k} \\ &= \left(1+e^{ix}\right)^n = \left(e^{ix/2}+e^{-ix/2}\right)^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}.}$$

Exercice n° 17

$$\begin{aligned}\begin{cases}\cos a + \cos b + \cos c = 0\\ \sin a + \sin b + \sin c = 0\end{cases} &\Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \\ &\Rightarrow \left|e^{ia} + e^{ib}\right| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow \left|e^{ia/2}e^{ib/2}\left(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2}\right)\right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{a-b}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow a-b \in \left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists \varepsilon \in \{-1,1\}/\ b = a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2e^{ia}$ ou encore $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(a, a+\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k\pi, a-\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k'\pi\right),\ a \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1,1\},\ (k,k') \in \mathbb{Z}^2\right\}.}$$

Exercice n° 18

$$\begin{aligned}\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}&=2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}\right)=2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}\right)\\&=2\left(\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Exercice n° 19

1) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\sin(2x)&\Leftrightarrow\cos(3x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2k\pi\right)\text{ ou }\left(\exists k\in\mathbb{Z}/\ 3x=-\frac{\pi}{2}+2x+2k\pi\right)\\&\Leftrightarrow\left(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)\text{ ou }\left(\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]}=\left\{\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{10},\frac{13\pi}{10},\frac{3\pi}{2},\frac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2) $\cos(3x)=\mathrm{Re}(e^{3ix})=\mathrm{Re}((\cos x+i\sin x)^3)=\cos^3x-3\cos x\sin^2x=\cos^3x-3\cos x(1-\cos^2x)=4\cos^3x-3\cos x.$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(3x)=4\cos^3x-3\cos x.}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\cos(3x)=\sin(2x)&\Leftrightarrow4\cos^3x-3\cos x=2\sin x\cos x\Leftrightarrow\cos x(4\cos^2x-3-2\sin x)=0\\&\Leftrightarrow\cos x(-4\sin^2x-2\sin x+1)=0\Leftrightarrow(\cos x=0)\text{ ou }(4\sin^2x+2\sin x-1=0).\end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2x+2\sin x-1=0$ admet entre autres pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x\neq0$), ou encore, l'équation $4X^2+2X-1=0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1=\sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2=\sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1>0$ et que $X_2<0$, on obtient

$$X_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }X_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10}=-\sin\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\text{ et }\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Enfin, $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ et de même $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\cos\frac{3\pi}{10}$.

Exercice n° 20

1) La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire. On l'étudie sur $[0,\pi]$.

La fonction f_1 est dérivable sur $[0,\pi]$ et pour tout x de $[0,\pi]$

$$f_1'(x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -2\sin(x)(1+2\cos(x)).$$

La fonction sinus s'annule en 0 et π et est strictement positive sur $]0,\pi[$. Donc la fonction f_1' est du signe de $-1-2\cos(x)$ sur $]0,\pi[$. Ensuite, pour $x \in]0,\pi[$,

$$-1-2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3},$$

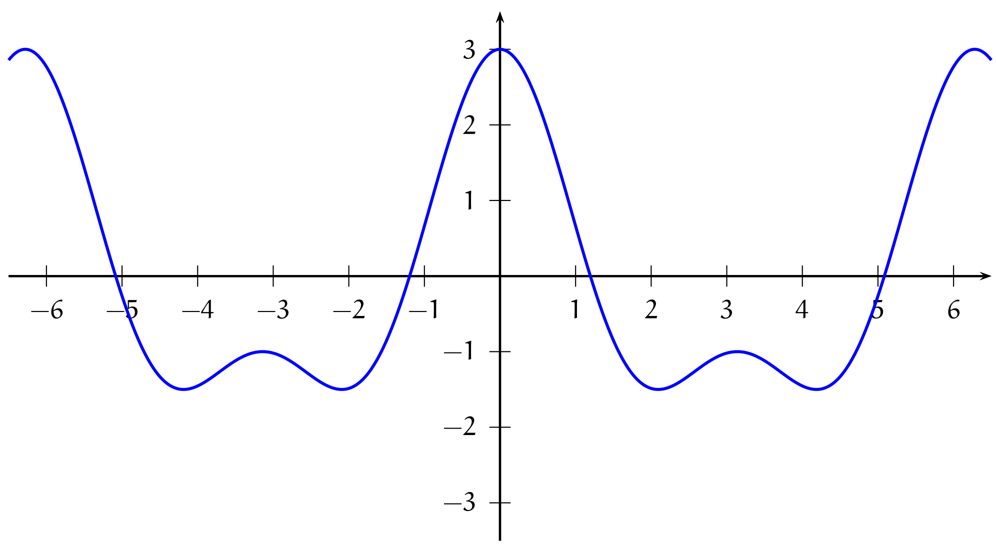
et

$$-1-2\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0,\pi].)$$

Ainsi, la fonction f_1' est strictement négative sur $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[$, strictement positive sur $\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right[$ et s'annule en 0, $\frac{2\pi}{3}$ et π.
On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f_1'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f_1	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1

Graphe de f_1.



2) Pour tout réel x, $2-\cos(x) \neq 0$ et donc, la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. On l'étudie sur $[0,\pi]$.
La fonction f_2 est dérivable sur $[0,\pi]$ et pour tout x de $[0,\pi]$

$$f_2'(x) = \frac{\cos(x)(2-\cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2-\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)-1}{(2-\cos(x))^2}.$$

La fonction f_2' est du signe de $2\cos(x)-1$ sur $[0,\pi]$. Ensuite, pour $x \in [0,\pi]$,

$$2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3},$$

et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0,\pi].)$$

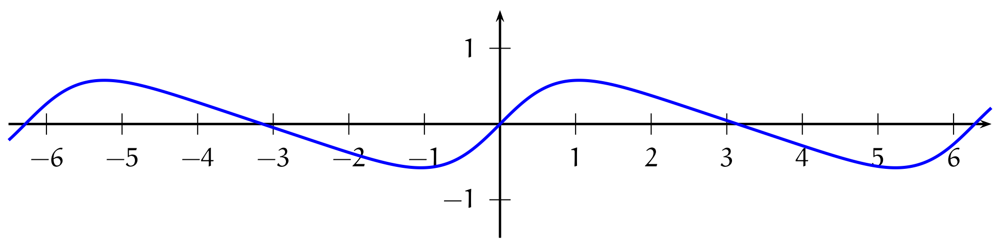
Ainsi, la fonction f_2' est strictement positive sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$. On note que

$$f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\ldots$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_2 :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Graphe de f_2.



3) f_3 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, paire et 2π-périodique. f_3 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3(x) = \tan x + \cos x$ et si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3(x) = -\tan x + \cos x$.

Etude en $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$. $\lim\limits_{x\to\pi/2} |\tan x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction f_3 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

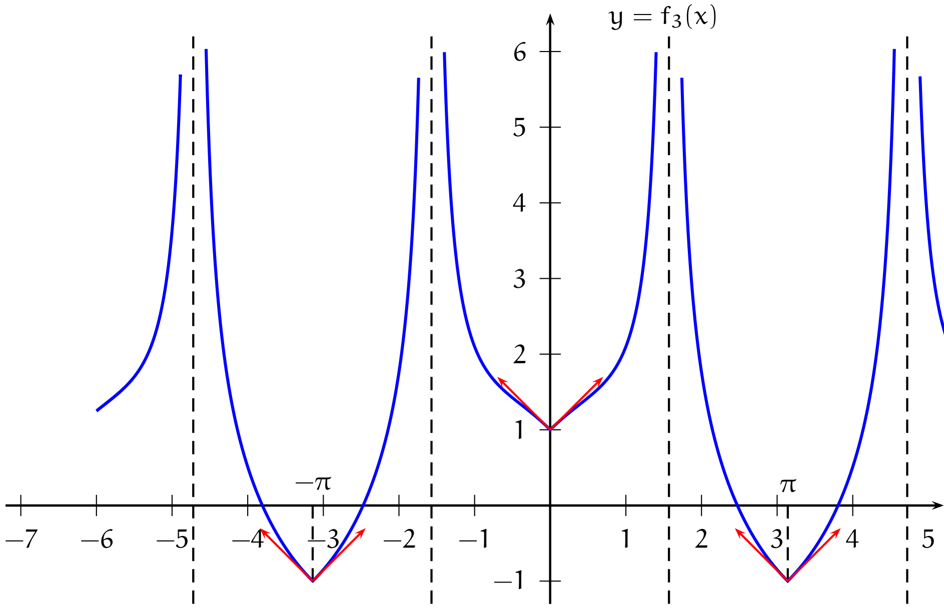
Dérivabilité et dérivée. f_3 est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ et pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$.
f_3 est dérivable à droite en 0 et $(f_3)_d'(0) = 1$. Par symétrie, f_3 est dérivable à gauche en 0 et $(f_3)_g'(0) = -1$. f_3 n'est pas dérivable en 0.
De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_3)_g'(\pi) = -1$ et $(f_3)_d'(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.

Variations. f_3 est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$. Puis, pour x élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0.$$

La fonction f_3' est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc f_3 est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Graphe.



4) La fonction f_4 est 2π-périodique. On l'étudie sur $[-\pi,\pi]$. Pour $x \in [-\pi,\pi]$,

$$2\cos(x)+1=0 \Leftrightarrow \cos(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}.$$

Pour $x \in [-\pi,\pi]$, $f_4(x)$ existe si et seulement si $x \neq -\frac{2\pi}{3}$ et $x \neq \frac{2\pi}{3}$. On étudie la fonction f_4 sur $D = \left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

Etude en $\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2\cos(x)+1$ tend vers 0 par valeurs supérieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2\cos(x)+1$ tend vers 0 par valeurs inférieures. D'autre part, quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$, $2\sin(x)+1$ tend vers $\sqrt{3}+1$ qui est strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^-} f_4(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f_4(x)=-\infty.$$

Etude en $-\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2\cos(x)+1$ tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2\cos(x)+1$ tend vers 0 par valeurs supérieures. D'autre part, quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$, $2\sin(x)+1$ tend vers $-\sqrt{3}+1$ qui est strictement négatif. On en déduit que

$$\lim_{x\to-\frac{2\pi}{3}^-} f_4(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\frac{2\pi}{3}^+} f_4(x)=-\infty.$$

Dérivée. La fonction f_4 est dérivable sur D et pour tout x de D,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(2\cos(x))(2\cos(x)+1)-(2\sin(x)+1)(-2\sin(x))}{(2\cos(x)+1)^2} = \frac{4+2\cos(x)+2\sin(x)}{(2\cos(x)+1)^2} \\ &= \frac{4+2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right)}{(2\cos(x)+1)^2} = \frac{4+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{(2\cos(x)+1)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout x de D, $4+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 4-2\sqrt{2}>0$ et donc la fonction f_4' est strictement positive sur D. La fonction f_4 est donc strictement croissante sur $\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ (mais pas sur $\left[-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$).

Graphe.