

Planche n° 10. Exponentielles et logarithmes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**)

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 2 (**I)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice n° 3 (**I)

1) Etudier brièvement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.

2) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Exercice n° 4

Résoudre dans \mathbb{R} les équations ou inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) \text{ (**)} \ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 & 2) \text{ (**)} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \\ 3) \text{ (***)} \ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0 & 4) \text{ (**)} 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \end{array}$$

Exercice n° 5 (***)

Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice n° 6

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1) (***) $f_1(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).

2) (**) $f_2(x) = \log_2 \left(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right)$.

Exercice n° 7 (**)

Montrer que $\forall x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.