Planche n° 10. Exponentielles et logarithmes : corrigé

Exercice n° 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour x réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = f(n)$.

f est définie sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0,e[$ et strictement négative sur $]e,+\infty[$. Par suite, f est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. En particulier, pour $n \geqslant 3$,

$$u_n = f(n) \leqslant f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\left\{\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3}\right\}$. Enfin, $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$ et donc $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^6$ sur $[0,+\infty[$). Finalement,

$$\boxed{\text{Max}\left\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \sqrt[3]{3} = 1,44..}$$

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel non nul n, $1 + \dfrac{1}{n}$ existe et est strictement positif. Donc, pour tout entier naturel non nul n, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ existe. De plus, pour tout entier naturel non nul n,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\right).$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc

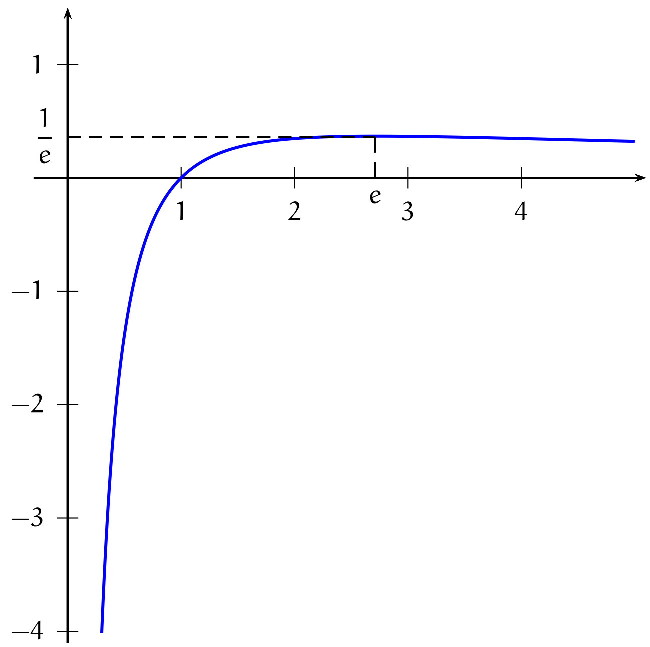
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Exercice n° 3

1) Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :



2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$.

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \ln(a^b) = \ln(b^a) \Leftrightarrow b\ln a = a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Si $a \geqslant 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, on a alors $f(a) > f(b)$ et en particulier, $f(a) \neq f(b)$. a n'est alors pas solution.

$a = 1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b = b^a \Rightarrow 1^b = b^1 \Rightarrow b = 1 = a$ ce qui est exclu.

Donc, nécessairement $a = 2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b) = f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ a au plus une solution dans $[e, +\infty[$. Enfin, comme $2^4 = 16 = 4^2$, on a montré que :

$$\boxed{\text{il existe un et un seul couple } (a, b) \text{ d'entiers naturels non nuls tel que } a < b \text{ et } a^b = b^a, \text{ à savoir } (2, 4).}$$

Exercice n° 4

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant \ln 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2 \text{ et } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{x+1}{2x+1} \leqslant 2 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} + 2 \geqslant 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1} - 2 \leqslant 0 \text{ et } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1} \geqslant 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1} \leqslant 0 \text{ et } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \text{ et } \left(\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[\right) \text{ et } x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.}$$

2) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} \Leftrightarrow \ln x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x \times \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{1,4\}.}$$

3) Pour $x\in]0,+\infty[\setminus\left\{\dfrac{1}{100},\dfrac{1}{10},1\right\}$,

$$\begin{aligned}
\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10)=0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x}+2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)}+3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)}=0\\
&\Leftrightarrow \frac{(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))+2\ln x(\ln x+2\ln(10))+3\ln x(\ln x+\ln(10))}{\ln x(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))}=0\\
&\Leftrightarrow 6\ln^2 x+10\ln(10)\ln x+2\ln^2(10)=0\\
&\Leftrightarrow \ln x\in\left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6},\frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}\\
&\Leftrightarrow x\in\left\{e^{\left((-5-\sqrt{13})/6\right)\ln(10)},e^{\left((-5+\sqrt{13})/6\right)\ln(10)}\right\}\\
&\Leftrightarrow x\in\left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6},10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6},10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.}$$

4) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{2x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1)=3^{x-\frac{1}{2}}(3+1)\Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1}=4\times 3^{x-\frac{1}{2}}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-3}=3^{x-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow (2x-3)\ln 2=\left(x-\frac{3}{2}\right)\ln 3\\
&\Leftrightarrow x=\frac{3\ln 2-\dfrac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2-\ln 3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}.}$$

Exercice n° 5

Pour $x>0$, $(x^x)^x=e^{x\ln(x^x)}=e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)}=e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x>0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=\exp\left(\ln x\left(x^2-x^x\right)\right).$$

Or, $x^2-x^x=-x^x\left(1-x^{2-x}\right)=-e^{x\ln x}(1-e^{(2-x)\ln x})$. Quand x tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1-e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis x^2-x^x tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2-x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=\exp(\ln x(x^2-x^x))$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=0.}$$

Exercice n° 6

On notera $\mathscr{C}_i$ le graphe de f_i.

1) Soit $x>0$. x n'est pas nul donc $\dfrac{1}{x}$ existe puis $1+\dfrac{1}{x}>0$ et $f_1(x)$ existe.

Etude en 0. Pour $x>0$, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=-x\ln x+x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_1(x)=\exp\left(x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ tend vers 1. Ainsi, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f_1(x)=1$.

Posons encore $f_1(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f_1 en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1\right) = \frac{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (d'après plus haut) et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ainsi, f_1 n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_1$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f_1(0)) = (0, 1)$.

Etude en $+\infty$. Pour $x > 0$, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = e.$$

Etude des variations de f_1. Pour $x > 0$, $f_1(x) > 0$ puis $\ln(f_1(x)) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Par suite, pour $x > 0$,

$$f_1'(x) = f_1(x)\times\ln(f_1)'(x) = f_1(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}\right) = f_1(x)g(x),$$

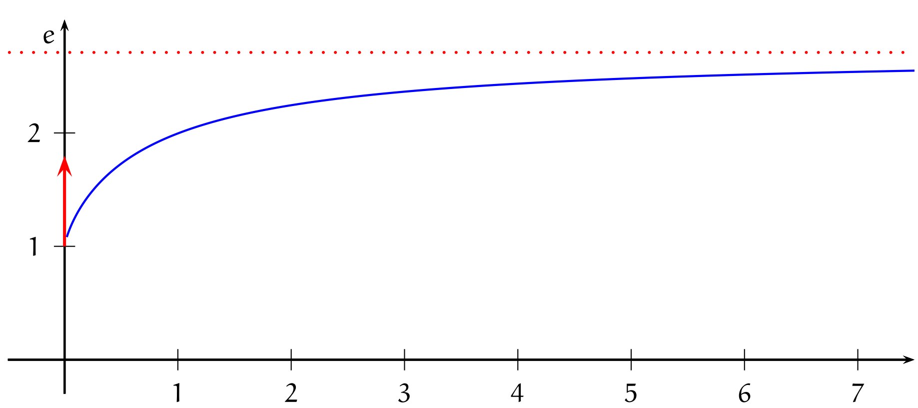
où $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}$. Sur $]0, +\infty[$, f_1' est du signe de g.

Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de f_1'. f_1 est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On en déduit $\mathscr{C}_1$.



2) Domaine de définition de f_2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_2(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } 1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}}<1$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \ln(x^2-5x+6)>\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6>\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$$

f_2 est définie sur $D = \left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

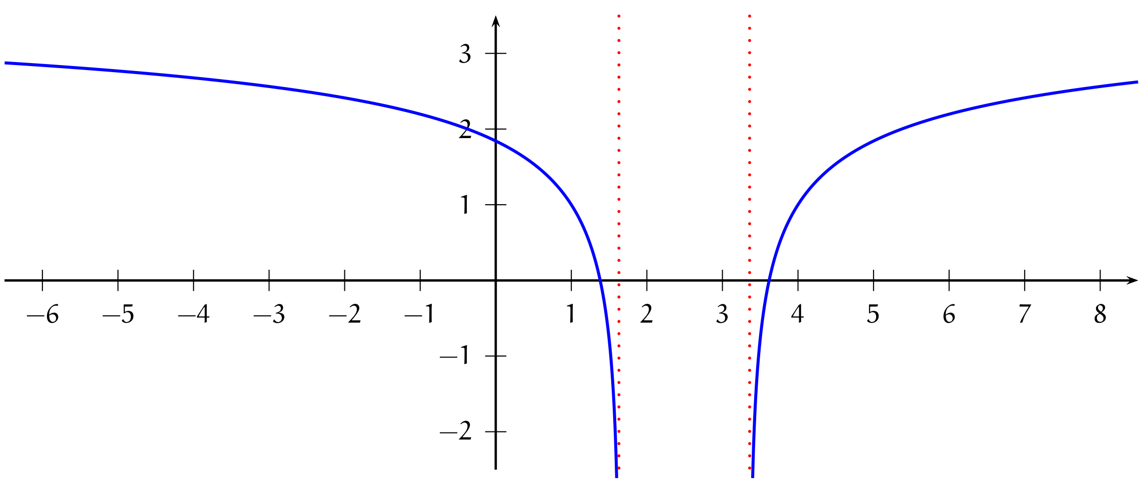
Variations de f_2. La fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$, la fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme népérien est strictement croissante. La fonction $x \mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_1 est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

Axe de symétrie Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D \Leftrightarrow \frac{5}{2}-x \in D$ et de plus, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{2}-x\right)+6 = x^2-5x+6$. Par suite,

$$\forall x \in D,\ f_1\left(\frac{5}{2}-x\right) = f_1(x).$$

$\mathscr{C}_1$ admet donc la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.

Le calcul des limites est facile et on en déduit $\mathscr{C}_2$.



Exercice n° 7

Pour tout $x \in]0,1[$, x et $1-x$ sont strictement positifs et donc $x^x(1-x)^{1-x}$ existe.

Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, il est équivalent de démontrer que

$$\forall x \in]0,1[,\ x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2).$$

Pour $x \in]0,1[$, posons $f(x) = x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$. f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x de $]0,1[$,

$$f'(x) = \ln(x)+x\times\frac{1}{x}-\ln(1-x)+(1-x)\times\frac{-1}{1-x} = \ln(x)-\ln(1-x).$$

Pour $x \in]0,1[$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(1-x) \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et négative sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. La fonction f admet donc un minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum est égal à

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Ceci montre que $\forall x \in]0,1[,\ x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2)$ et donc que

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.}$$

