

# Planche n° 9. Valeur absolue. Partie entière. Inégalités

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

**Exercice n° 1. (\*\*I)** (Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique)

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 < x \leq y$ . On pose  $m = \frac{x+y}{2}$  (moyenne arithmétique),  $g = \sqrt{xy}$  (moyenne géométrique) et  $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$  (moyenne harmonique). Montrer que  $x \leq h \leq g \leq m \leq y$ .

**Exercice n° 2. (\*I)** (Inégalité de BERNOULLI)

Montrer que, pour  $a$  réel positif et  $n$  entier naturel donnés,  $(1+a)^n \geq 1+na$ .

**Exercice n° 3. (\*\*\*)**

On veut montrer de manière élémentaire (c'est-à-dire en se passant du logarithme népérien et en ne travaillant qu'avec les deux opérations  $+$  et  $\times$ ) que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ .

Pour cela développer, puis majorer  $u_k = \frac{C_n^k}{n^k}$  en commençant par majorer  $v_k = \frac{u_{k+1}}{u_k}$  par  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice n° 4. (\*\*\*)**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n$  réels strictement positifs.

Montrer que  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$  (développer et penser à  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ).

**Exercice n° 5. (\*\*\*)** (Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, 2n$  réels. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \times |b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

(Indication. Considérer le polynôme  $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k x)^2$ , développer puis ordonner suivant les puissances décroissantes puis utiliser, dans le cas général, les connaissances sur le second degré). Retrouver alors le résultat du n° 4.

**Exercice n° 6. (\*\*\*)**

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels positifs. Montrer que l'un au moins des trois réels  $a(1-b)$ ,  $b(1-c)$ ,  $c(1-a)$  est inférieur ou égal à  $\frac{1}{4}$ .

**Exercice n° 7. (\*\*IT)**

1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$ .

2) Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x+y)$ .

3) Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$ .

**Exercice n° 8. (\*\*I)**

Tout entier naturel non nul  $n$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^p a_p,$$

où  $p$  est un entier naturel et les  $a_i$  sont des entiers éléments de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ ,  $a_p$  étant non nul. Déterminer  $p$  en fonction de  $n$ . Déterminer le nombre de chiffres de  $n$  en base 10.

**Exercice n° 9. (\*\*I)**

Soit  $x$  un réel. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}$ .

**Exercice n° 10. (\*\*IT)**

Soient  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel positif.

- 1) Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 1 et  $n$ ? entre 1 et  $x$ ?
- 2) Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et  $n$ ? entre 0 et  $x$ ?
- 3) Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et  $x$ ? Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs entre 0 et  $x$ ?
- 4) Combien y a-t-il de multiples de 3 entre 0 et  $x$ ?
- 5) Combien l'équation  $x + 2y = n$ ,  $n$  entier naturel donné et  $x$  et  $y$  entiers naturels inconnus, a-t-elle de couples solutions?
- 6) De combien de façons peut-on payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros?

**Exercice n° 11. (\*\*\*\*)**

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$  (poser la division euclidienne de  $E(nx)$  par  $n$ ).

**Exercice n° 12. (\*\*\*\*)**

Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E\left(\frac{1}{3}\left(n + 2 - E\left(\frac{n}{25}\right)\right)\right) = E\left(\frac{8n + 24}{25}\right)$ .

**Exercice n° 13. (\*\*\*\*I)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Montrer qu'il existe  $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ , puis que  $3b_n^2 = a_n^2 - 1$ .
- 2) Montrer que  $E\left((2 + \sqrt{3})^n\right)$  est un entier impair (penser à  $(2 - \sqrt{3})^n$ ).

**Exercice n° 14. (\*\*\*)**

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$ .

**Exercice n° 15. (\*\*\*I)**

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 3 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!})$ .

(commencer par vérifier que pour  $k = 2, 3, \dots, n$ , on a :  $(n - k + 1)k > n$ ).

**Exercice n° 16. (\*\*\*)**

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{4}$  (remarquer que si  $x \in [0; 1]$ ,  $x^2 \leq x$ ).

**Exercice n° 17. (\*\*I)**

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ .