Planche n° 9. Valeur absolue, partie entière, inégalités : corrigé

Exercice n° 1.

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1) On a déjà $x = \dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc

$$\boxed{x \leqslant m \leqslant y.}$$

(on peut aussi écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$).

2) On a ensuite $x = \sqrt{x \times x} \leqslant \sqrt{x \times y} = g \leqslant \sqrt{y \times y} = y$ et donc

$$\boxed{x \leqslant g \leqslant y.}$$

3) $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + \left(\sqrt{y}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$ et donc,

$$\boxed{x \leqslant g \leqslant m \leqslant y.}$$

4) D'après 1), la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$, ou encore

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant y.}$$

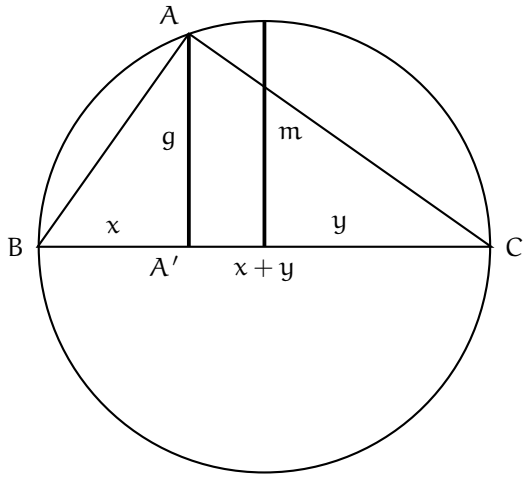
5) D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leqslant \dfrac{1}{h}$ et finalement

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.}$$

Remarque 1. On a $h = \dfrac{2xy}{x+y}$, mais cette expression ne permet pas de comprendre que $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$.

Remarque 2. On peut visualiser l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.
Si (ABC) est un triangle rectangle en A et A' est le pied de la hauteur issue de A, on sait que $AA'^2 = A'B \times A'C$. On se sert de cette remarque pour construire g et la comparer graphiquement à m.

On accole deux segments de longueurs respectives x et y. On construit alors un triangle rectangle d'hypothénuse ce segment (de longueur $x+y$) noté $[BC]$, tel que le troisième sommet A ait une projection orthogonale A' sur (BC) vérifiant $BA' = x$ et $CA' = y$.



 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

La moyenne arithmétique de x et y est $m = \dfrac{x+y}{2}$ le rayon du cercle, et la moyenne géométrique de x et y est $g = \sqrt{xy} = \sqrt{A'B.A'C} = AA'$, la hauteur issue de A du triangle (ABC).

Exercice n° 2.

Soient n un entier naturel non nul et a un réel positif. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1+a)^n = 1 + na + ... \geqslant 1 + na.$$

Exercice n° 3.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $u_k = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ puis pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $v_k = \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{\binom{n}{k+1} \times n^k}{\binom{n}{k} \times n^{k+1}} = \frac{1}{n} \times \frac{n!k!(n-k)!}{n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{n(k+1)} = \frac{(n+1)-(k+1)}{n(k+1)} = -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(k+1)} \\ &\leqslant -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \text{ (car } k \geqslant 1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_k$ et donc,

$$u_k \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} u_1 = \frac{1}{2^{k-1}} \frac{n}{n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En tenant compte de $u_0 = 1$, on a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Exercice n° 4.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2,..., a_n, n réels strictement positifs.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$$

Pour $x > 0$, posons alors $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$. f est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. f admet ainsi un minimum en 1. Par suite,

$$\forall x > 0,\ f(x) \geqslant f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

(**Remarque.** L'inégalité entre moyenne géométrique et arithmétique permet aussi d'obtenir le résultat :

$$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \geqslant \sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 1.)$$

On en déduit alors que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geqslant n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 = n + 2 \times \frac{n^2 - n}{2} = n^2.$$

Exercice n° 5.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k x)^2$. On remarque que pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$. En développant les n carrés, on obtient,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(b_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + a_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

1er cas. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$, f est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est alors négatif ou nul. Ceci fournit

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right),$$

et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

2ème cas. Si $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$, alors tous les b_k sont nuls et l'inégalité est immédiate.

Finalement, dans tous les cas,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.}$$

Cette inégalité est encore valable en remplaçant les a_k et les b_k par leurs valeurs absolues, ce qui fournit les inégalités intermédiaires.

Retrouvons alors l'inégalité du n° 4. Puisque les a_k sont strictement positifs, on peut écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{a_i}}^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}\sqrt{\frac{1}{a_i}}\right)^2 = n^2.$$

Exercice n° 6.

Si l'un des réels a, b ou c est strictement plus grand que 1, alors l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est négatif (puisque a, b et c sont positifs) et donc inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Sinon, les trois réels a, b et c sont dans $[0, 1]$. Le produit des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ vaut

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$

Mais, pour $x \in [0, 1]$, $x(1-x)$ est positif et d'autre part, $x(1-x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$. Par suite,

$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}.$$

Il est alors impossible que les trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ soient strictement plus grand que $\frac{1}{4}$, leur produit étant dans ce cas strictement plus grand que $\frac{1}{4^3}$.

On a montré dans tous les cas que l'un au moins des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice n° 7.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $E(x) \leq x < E(x) + 1$ puis $E(x) + 1 \leqslant x + 1 < (E(x) + 1) + 1$. Comme $E(x) + 1 \in \mathbb{Z}$, on a bien $E(x + 1) = E(x) + 1$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

2) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $E(x)+E(y) \leqslant x+y$. Ainsi, $E(x)+E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$. Comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, on a donc $E(x)+E(y) \leqslant E(x+y)$.

Améliorons. $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ et $E(y) \leqslant y < E(y)+1$ fournit $E(x)+E(y) \leqslant x+y < E(x)+E(y)+2$ et donc $E(x+y)$ vaut, suivant le cas, $E(x)+E(y)$ ou $E(x)+E(y)+1$ (et est dans tous les cas supérieur ou égal à $E(x)+E(y)$).

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $k = E(x)$ et $l = E(y)$.

1er cas. Si $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[l, l+\frac{1}{2}\right[$, alors $x+y \in [k+l, k+l+1[$ et donc $E(x+y) = k+l$, puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = k+l+k+l = 2k+2l$. D'autre part, $2x \in [2k, 2k+1[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) = E(2x)+E(2y)$.

2ème cas. Si $x \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right[$ et $y \in \left[l, l+\frac{1}{2}\right[$, alors $x+y \in \left[k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}\right[$ et donc $E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$,puis $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l$ ou $2k+2l+1$. D'autre part, $2x \in [2k+1, 2k+2[$ et $2y \in [2l, 2l+1[$. Par suite, $E(2x)+E(2y) = 2k+2l+1$. Dans ce cas, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

3ème cas. Si $x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $y \in \left[l+\frac{1}{2}, l+1\right[$, on a de même $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

4ème cas. Si $x \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right[$ et $y \in \left[l+\frac{1}{2}, l+1\right[$, on a $E(x)+E(y)+E(x+y) = 2k+2l+2 = E(2x)+E(2y)$.

Finalement, on a dans tous les cas $E(x)+E(y)+E(x+y) \leqslant E(2x)+E(2y)$.

Exercice n° 8.

p est déterminé par l'encadrement : $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ qui s'écrit encore $p \leqslant \log_{10}(n) < p+1$. Par suite,

$$\boxed{p = E\left(\log_{10}(n)\right).}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{le nombre de chiffres d'un entier } n \text{ en base } 10 \text{ est } E\left(\log_{10}(n)\right)+1.}$$

Exercice n° 9.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$kx - 1 < E(kx) \leqslant kx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{x+2x+...+nx}{n^2} = \frac{n(n+1)x}{2n^2} = \frac{(n+1)x}{2n},$$

et aussi,

$$\frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} > \frac{(x-1)+(2x-1)+...+(nx-1)}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}x - n}{n^2} = \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n}.$$

Finalement, pour tout naturel non nul,

$$\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} \leqslant \frac{(n+1)x}{2n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers $\frac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{E(x)+E(2x)+...+E(nx)}{n^2} = \frac{x}{2}.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Exercice n° 10.

1) Par définition d'un entier, il y a n entiers entre 1 et n. Ensuite, pour tout entier naturel k, on a

$$1 \leqslant k \leqslant x \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant E(x).$$

Il y a donc $E(x)$ entiers entre 1 et x.

2) Il y a $n+1$ entiers entre 0 et n et $E(x)+1$ entiers entre 0 et x.

3) Les entiers naturels pairs sont les entiers de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}$. Or,

$$0 \leqslant 2k \leqslant x \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant \frac{x}{2}.$$

Le nombre des entiers pairs compris entre 0 et x est encore le nombre des entiers k compris au sens large entre 0 et $\frac{x}{2}$. D'après 2), il y a $E\left(\frac{x}{2}\right)+1$ entiers pairs entre 0 et x.

Soit k un entier naturel.

$$0 \leqslant 2k+1 \leqslant x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant E\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Si $x \in [0,1[$, il n'ay pas d'entier impair compris entre 0 et x et si $x \geqslant 1$, il y a $E\left(\frac{x-1}{2}\right)+1 = E(\frac{x+1}{2})$ entiers impairs entre 0 et x.

4) Il y a $E\left(\frac{x}{3}\right)+1$ multiples de 3 entre 0 et x.

5) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$x+2y = n \Leftrightarrow x = n-2y.$$

Le nombre de couples (x,y) solutions est encore le nombre d'entiers naturels y tels que $n-2y \in \mathbb{N}$ ou encore le nombre d'entiers y tels que$0 \leqslant 2y \leqslant n$. Il y a donc $E\left(\frac{n}{2}\right)+1$ couples solutions.

6) Si x et y sont respectivement le nombre de pièces de 10 centimes d'euros et le nombre de pièces de 20 centimes d'euros, le nombre cherché est le nombre de couples d'entiers naturels solutions de l'équation $10x+20y = 1000$ qui s'écrit encore $x+2y = 100$. D'après 5), il y a $E\left(\frac{100}{2}\right)+1 = 51$ façons de payer 10 euros avec des pièces de 10 et 20 centimes d'euros.

Exercice n° 11.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p la partie entière de nx. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors

$$p = E(nx) \Rightarrow p \leqslant nx < p+1 \Rightarrow \frac{p+k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{p+k+1}{n} \quad (*).$$

La division euclidienne de p par n fournit $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = qn+r$ et $0 \leqslant r \leqslant n-1$. $(*)$ s'écrit alors

$$q + \frac{k+r}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}.$$

• Si $r = 0$, alors pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$q \leqslant q + \frac{k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+1}{n} \leqslant q + \frac{n-1+1}{n} = q+1.$$

Dans ce cas, pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$, $E\left(x + \frac{k}{n}\right) = q$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} q = nq = p = E(nx).$$

• Si $1 \leqslant r \leqslant n-1$, alors pour $0 \leqslant k \leqslant n-r-1$, on a

$$q \leqslant q + \frac{k+r}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n} \leqslant q + \frac{n-r-1+r+1}{n} = q+1,$$

et dans ce cas, $E(x + \frac{k}{n}) = q$ et si $n-r \leqslant k \leqslant n-1$, on a

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$q+1=q+\frac{n-r+r}{n}\leqslant q+\frac{k+r}{n}\leqslant x+\frac{k}{n}<q+\frac{k+r+1}{n}\leqslant q+\frac{n-1+r+1}{n}<q+\frac{n+n}{n}=q+2,$$

et dans ce cas, $E\left(x+\frac{k}{n}\right)=q+1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-r-1}q+\sum_{k=n-r}^{n-1}(q+1)=\sum_{k=0}^{n-1}q+\sum_{k=n-r}^{n-1}1=nq+((n-1)-(n-r-1))=nq+r=p=E(nx).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx).}$$

Exercice n° 12.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de n par 25 fournit un quotient entier q et et un reste r élément de $[\![0,24]\!]$ tels que $n=25q+r$. On a alors

$$E\left(\frac{1}{3}\left(n+2-E\left(\frac{n}{25}\right)\right)\right)=E\left(\frac{25q+r+2-q}{3}\right)=E\left(8q+\frac{r+2}{3}\right)=8q+E\left(\frac{r+2}{3}\right),$$

et

$$E\left(\frac{8n+24}{25}\right)=E\left(\frac{8(25q+r)+24}{25}\right)=8q+E\left(\frac{8r+24}{25}\right).$$

Pour montrer l'égalité de l'énoncé, il reste donc à vérifier les 25 égalités $E\left(\frac{r+2}{3}\right)=E\left(\frac{8r+24}{25}\right)$, $0\leqslant r\leqslant 24$, $(*)$, ce qui peut déjà se vérifier « à la main ».

Diminuons encore le nombre de vérifications. La division euclidienne de r par 3 s'écrit $r=3k+l$ avec $0\leqslant l\leqslant 2$. Mais alors,

$$E\left(\frac{r+2}{3}\right)=k+E\left(\frac{l+2}{3}\right)\ \text{ et }\ E\left(\frac{8r+24}{25}\right)=E\left(\frac{25k-k+8l+24}{25}\right)=k+E\left(\frac{-k+8l+24}{25}\right).$$

Si $l=0$, k varie de 0 à 8 et dans ce cas, $0\leqslant\frac{-k+24}{25}=\frac{-k+8l+24}{25}\leqslant\frac{24}{25}<1$. Par suite,

$$E\left(\frac{-k+8l+24}{25}\right)=0=E\left(\frac{l+2}{3}\right).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ quand $r\in\{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.

Si $l=1$ ou $l=2$, $E(\frac{l+2}{3})=1$ et d'autre part, k varie de 0 à 7. Dans ce cas,

$$1=\frac{-7+8+24}{25}\leqslant\frac{-k+8l+24}{25}\leqslant\frac{16+24}{25}<2$$

et donc

$$E\left(\frac{-k+8l+24}{25}\right)=1=E\left(\frac{l+2}{3}\right).$$

On a ainsi vérifié $(*)$ pour les autres valeurs de r. Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ E\left(\frac{1}{3}\left(n+2-E\left(\frac{n}{25}\right)\right)\right)=E\left(\frac{8n+24}{25}\right).}$$

Exercice n° 13.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1) La formule du binôme de Newton permet d'écrire

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k} + \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}2^{n-2k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k} + \sqrt{3}\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}.$$

Ainsi, en posant $a_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}3^k 2^{n-2k-1}$, a_n et b_n sont des **entiers** tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. En remplaçant $\sqrt{3}$ par $-\sqrt{3}$ (c'est-à-dire par un calcul conjugué), on a aussi $\left(2-\sqrt{3}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Mais alors,

$$a_n^2 - 3b_n^2 = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n = (4-3)^n = 1.$$

2) On note que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = (a_n + b_n\sqrt{3}) + (a_n - b_n\sqrt{3}) = 2a_n$. Mais,

$$0 < (2-\sqrt{3})^n < 1.$$

Par suite,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2a_n < \left(2+\sqrt{3}\right)^n + 1,$$

ou encore

$$2a_n - 1 < \left(2+\sqrt{3}\right)^n < 2a_n.$$

On en déduit que $E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right) = 2a_n - 1$ et donc que$E\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ est un entier impair.

Exercice n° 14.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
E(x) \leqslant x < E(x)+1 &\Rightarrow nE(x) \leqslant nx < nE(x) + n \\
&\Rightarrow nE(x) \leqslant E(nx) < nE(x) + n \text{ (car } nE(x) \text{ et } nE(x)+n \text{ sont des entiers)} \\
&\Rightarrow E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1 \\
&\Rightarrow E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).
\end{aligned}$$

Exercice n° 15.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

$$n!^2 = \prod_{k=1}^{n}(n+1-k)\prod_{k=1}^{n}k = \prod_{k=1}^{n}k(n+1-k).$$

Maintenant, la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{n+1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{n+1}{2}, n+1\right]$. Puisque $f(1) = f(n) = n$, on en déduit que pour $x \in [2, n-1]$, $f(x) > n$. Puisque $n \geqslant 3$, on a $n-1 \geqslant 2$ et on peut écrire

$$n!^2 = n^2\prod_{k=2}^{n-1}k(n+1-k) > n^2\prod_{k=2}^{n-1}n = n^n,$$

et donc,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!^2)^{1/(2n)} > (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

Exercice n° 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque, pour tout entier k, $|\cos k| \in [0,1]$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \cos^2 k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(1+\cos(2k)) &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{2ik}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)\\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{i(n-1+2)}\frac{\sin n}{\sin 1}\right) = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)\sin n}{2\sin 1} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin 1}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\dfrac{1}{2\sin 1} = 0,594....$ Par suite, pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{2\sin 1} \leqslant 0,75 = \dfrac{3}{4} \leqslant \dfrac{n}{4}$, et donc

$$\frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin 1} \geqslant \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4}.$$

Enfin, si $n = 1$, $|\cos 1| = 0,5... \geqslant 0,25 = \dfrac{1}{4}$ et si $n = 2$, $|\cos 1| + |\cos 2| = 0.9... \geqslant 0,5 = \dfrac{2}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geqslant \frac{n}{4}.}$$

Exercice n° 17.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

- L'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ et montrons que $|\sin((n+1)x)| \leq (n+1)|\sin x|$. Alors,

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x| &= |\sin nx\cos x + \cos nx \sin x| \leqslant |\sin nx| \times |\cos x| + |\cos nx| \times |\sin x|\\ &\leqslant |\sin nx| + |\sin x|\\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)|\sin x|.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.