

## Planche n° 8. Généralités sur les fonctions

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice n° 1 (\*\*T)

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1 & 2) f_2(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 - 1} & 3) f_3(x) = \frac{x^5 - x}{x^3 - 1} \\ 4) f_4(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & 5) f_5(x) = \cos(2x) + \tan^2(x) & 6) f_6(x) = \sin(x) - x \\ 7) f_7(x) = \sqrt{x^2 + 1} & 8) f_8(x) = \frac{x}{x^6 - x^4 - 31x^2 + 3} & 9) f_9(x) = \cos(x) + \sin(x). \end{array}$$

### Exercice n° 2 (\*\*I)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

### Exercice n° 3 (\*\*I)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  est paire, sa dérivée est impaire et si  $f$  est impaire, alors sa dérivée est paire.

Généraliser à  $f''$ ,  $f^{(3)}$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}$ ,  $n \geq 2$ .

A-t-on des résultats analogues pour les primitives ?

### Exercice n° 4 (\*\*T)

1) Montrer que la droite d'équation  $x = \frac{3}{2}$  est un axe de symétrie du graphe dans un repère orthonormé de la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ .

2) Montrer que le point I de coordonnées  $(1, 2)$  est centre de symétrie du graphe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 1}$ .

3) Montrer que le point I de coordonnées  $(0, \frac{1}{2})$  est centre de symétrie du graphe de la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

4) Etudier les symétries de la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(3x)$ .

### Exercice n° 5 (\*\*T)

Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) f_1(x) = E(x) - x & 2) f_2(x) = E(2x) - 2x & 3) f_3(x) = \cos(2x) - \sin(4x) \\ 4) f_4(x) = \cos(4x) & 5) f_5(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & 6) f_6(x) = \cos\left(\frac{2x}{3}\right). \end{array}$$

### n° 6 (\*\*T)

1) Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2) Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice n° 7 (\*\*T)

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur le domaine considéré.

$$\begin{array}{lll} 1) x \mapsto -3(x + 1)^2 + 1, I = \mathbb{R} & 2) x \mapsto 3 - \frac{5}{2x + 1}, I = ]-\infty, -\frac{1}{2}[ & 3) x \mapsto \ln(1 + e^x), I = \mathbb{R} \\ 4) x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right), I = \mathbb{R}^* & 5) x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt & 6) x \mapsto \int_0^1 e^{xt} dt \end{array}$$

**Exercice n° 8 (\*\*T)**

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

- 1)  $x \mapsto \sin x - \cos x$ ,  $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$     2)  $x \mapsto x \ln x$ ,  $I = [1, +\infty[$     3)  $x \mapsto e^{3x^2-1} \cos\left(\frac{\pi}{2(x^2+1)}\right)$ ,  $I = \mathbb{R}$   
 4)  $x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ ,  $I = ]1, +\infty[$     5)  $x \mapsto \frac{x^4-1}{x^4+1}$ ,  $I = \mathbb{R}$     6)  $x \mapsto -x^7 + x^4 + x^2 + 3$ ,  $I = ]-\infty, 0]$

**Exercice n° 9 (\*T)**

1) Montrer que, si  $x$  est un réel tel que  $1 \leq x \leq 2$ , on a  $\frac{3}{11} \leq \frac{2x+1}{4x+3} \leq \frac{5}{7}$ .

2) Résoudre l'équation  $\frac{2x+1}{4x+3} = \frac{3}{11}$ . Que constatez-vous ?

3) Encadrer au mieux  $\frac{2x+1}{4x+3}$  pour  $x \in [1, 2]$ .

**Exercice n° 10 (\*T)**

Encadrer au mieux les expressions suivantes sur le domaine  $D$  considéré :

- 1)  $x^2$ ,  $D = [-1, 2]$     2)  $x^2 - 3x + 2$ ,  $D = [0, 4]$     3)  $\frac{1}{x}$ ,  $D = [-2, -1]$     4)  $\frac{1}{x^2}$ ,  $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$   
 5)  $\cos x$ ,  $D = \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$     6)  $\frac{5x+1}{13x+2}$ ,  $D = [0, 4]$     7)  $\frac{2n+3}{2n-9}$ ,  $n \in \mathbb{N}$     8)  $\frac{4n+1}{3n+7}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

**Exercice n° 11 (\*\*T)**

Démontrer les inégalités suivantes :

- 1)  $\forall x \in [1, 3], 2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$     2)  $\forall x \in [1, +\infty[, \frac{2x^2 - 7x + 1}{x + 3} \leq 10x$     3)  $\forall x \leq 0, \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x$

**Exercice n° 12 (\*I)**

Etudier le signe de  $\sqrt{x^2+1} - x$  et  $\sqrt{x^2+1} + x$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Exercice n° 13 (\*\*I)**

Démontrer (et mémoriser) les inégalités classique suivantes :

- 1)  $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$     2)  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$     3)  $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$