

Planche n° 8. Généralités sur les fonctions : corrigé

Exercice n° 1

1) f_1 est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x

$$f_1(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 = 3x^4 - 5x^2 + 1 = f_1(x).$$

La fonction f_1 est paire.

2) f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f_2(-x) = \frac{(-x)^5 - (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^5 - x}{x^2 - 1} = -f_2(x).$$

La fonction f_2 est impaire.

3) $f_3(-1)$ existe mais $f_3(-1)$ n'existe pas. Le domaine de définition de la fonction f_3 n'est pas symétrique par rapport à 0 et donc, la fonction f_3 n'est ni paire, ni impaire.

4) Pour tout réel x , $e^x + 1 > 1$, en particulier pour tout réel x , $e^x + 1 \neq 0$. f_4 est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de \mathbb{R}

$$f_4(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f_4(x).$$

La fonction f_4 est impaire.

5) f_2 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$f_5(-x) = \cos(-2x) + \tan^2(-x) = \cos(2x) + \tan^2(x) = f_5(x).$$

La fonction f_5 est paire.

6) f_2 est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de \mathbb{R}

$$f_6(-x) = \sin(-x) - (-x) = -(\sin(x) - x) = -f_6(x).$$

La fonction f_6 est impaire.

7) Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 0$. Donc f_7 est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de \mathbb{R}

$$f_7(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f_7(x).$$

La fonction f_7 est paire.

8) On ne peut pas déterminer le domaine de définition de la fonction f_8 . Mais comme $(-x)^6 - (-x)^4 - 31(-x)^2 + 3 = x^6 - x^4 - 31x^2 + 3$, pour tout réel x , $f_8(-x)$ existe si et seulement si $f_8(x)$ existe. Donc f_8 est définie sur un domaine D qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout x de D

$$f_8(-x) = \frac{-x}{(-x)^6 - (-x)^4 - 31(-x)^2 + 3} = -\frac{x}{x^6 - x^4 - 31x^2 + 3} = -f_8(x).$$

La fonction f_8 est impaire.

9) $f_9(0) = 1 \neq 0$ et donc f_9 n'est pas impaire. $f_9\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 1 = f_9\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Donc, f_9 n'est pas paire.

La fonction f_9 n'est ni paire, ni impaire.

Exercice n° 2

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Unicité. Supposons qu'il existe deux fonctions g et h telles que g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Nécessairement pour tout réel x ,

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases} .$$

En additionnant et en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient pour tout réel x

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Ceci montre l'unicité d'un couple (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Existence. Réciproquement, posons pour tout réel x

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

- Pour tout réel x , $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f(x)$ et donc $f = g + h$.
- Pour tout réel x , $g(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$ et donc la fonction g est paire.
- Pour tout réel x , $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x)$ et donc la fonction h est impaire.

Ainsi, les fonctions g et h conviennent ce qui montre l'existence d'un couple (g, h) tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Exercice n° 3

Soit n un entier naturel. Supposons que f est n fois dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , posons $g(x) = f(-x)$. Alors g est n fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$g^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x).$$

Si de plus f est paire, alors $g = f$ et donc pour tout réel x , $f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ ou encore

$$\text{pour tout réel } x, f^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Si n est un entier pair, posons $n = 2p$ où p est un entier. L'égalité précédente s'écrit

$$\text{pour tout réel } x, f^{(2p)}(-x) = f^{(2p)}(x)$$

et donc $f^{(2p)}$ est paire. Ainsi, les fonctions $f, f'', f^{(4)}, f^{(6)} \dots$ sont paires.

Si n est un entier impair, posons $n = 2p + 1$ où p est un entier. L'égalité précédente s'écrit

$$\text{pour tout réel } x, f^{(2p+1)}(-x) = -f^{(2p+1)}(x)$$

et donc $f^{(2p+1)}$ est impaire. Ainsi, les fonctions $f', f^{(3)}, f^{(5)} \dots$ sont impaires. On résume ces résultats en disant que

$$\text{si } f \text{ est paire, } f^{(n)} \text{ a la parité de } n.$$

Si f est impaire, alors f' est paire et on peut lui appliquer les résultats précédents. Donc,

$$\text{si } f \text{ est impaire, } f^{(n)} \text{ a la parité contraire de celle de } n.$$

Une primitive de fonction impaire est automatiquement une fonction paire. Démontrons-le.

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et impaire. Soit F une primitive de f . Pour tout réel x , posons $G(x) = F(x) - F(-x)$. G est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x

$$G'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

Donc, la fonction G est constante sur \mathbb{R} puis, pour tout réel x ,

$$G(x) = G(0) = F(0) - F(0) = 0.$$

On en déduit que pour tout réel x , $F(-x) = F(x)$ et donc que F est paire.

Le résultat analogue est faux si on suppose que f est paire car une fonction constante est paire. Voici une succession de primitives pour exemple :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x + 4, \quad x \mapsto \frac{x^2}{2} + 4x - 5, \quad x \mapsto \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \dots$$

Exercice n° 4

1) La fonction f est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à $\frac{3}{2}$. De plus, pour tout réel x ,

$$f(3-x) = (3-x)^2 - 3(3-x) + 2 = x^2 - 3x + 2 = f(x).$$

Donc, la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie du graphe dans un repère orthonormé de la fonction f .

2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est symétrique par rapport à 1. De plus, pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(2x_1 - x) + f(x) = \frac{2(2-x) + 1}{(2-x) - 1} + \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2x - 5}{x - 1} + \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{4x - 4}{x - 1} = \frac{4(x - 1)}{x - 1} = 4 = 2y_1.$$

Donc, le point I de coordonnées (1, 2) est centre de symétrie du graphe de la fonction f .

3) La fonction f est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel x ,

$$f(2x_1 - x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} x - 1 = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1 = 2y_1.$$

Donc, le point I de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction f .

4) • La fonction f est paire et donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe de f . Plus généralement, pour tout entier relatif k et pour tout réel x ,

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) + \cos(6k\pi - 3x) = \cos(-x) + \cos(-3x) = \cos(x) + \cos(3x) = f(x).$$

On en déduit que pour tout entier relatif k , la droite d'équation $x = k\pi$ est un axe de symétrie du graphe de f .

• Pour tout réel x ,

$$f(\pi - x) = \cos(\pi - x) + \cos(3\pi - 3x) = \cos(\pi - x) + \cos(\pi - 3x) = -\cos(x) - \cos(3x) = -f(x),$$

et donc pour tout réel x , $f(\pi - x) + f(x) = 0$. On en déduit que le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie du graphe de f . Plus généralement, pour tout entier relatif k , le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ est un centre de symétrie du graphe de f .

Exercice n° 5

Chacune des fonctions considérées est définie sur \mathbb{R} .

1) Pour tout réel x , $f_1(x + 1) = E(x + 1) - (x + 1) = E(x) + 1 - x - 1 = E(x) - x = f_1(x)$ et donc la fonction f_1 est 1-périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k , f_1 est k -périodique.

2) Pour tout réel x , $f_2\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x + 1) - (2x + 1) = E(2x) - 2x = f_2(x)$ et donc la fonction f_2 est $\frac{1}{2}$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k , f_2 est $\frac{k}{2}$ -périodique.

3) Pour tout réel x , $f_3(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) - \sin(4x + 4\pi) = \cos(2x) - \sin(4x) = f_3(x)$ et donc la fonction f_3 est π -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k , f_3 est $k\pi$ -périodique.

4) Pour tout réel x , $f_4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x + 2\pi) = \cos(4x) = f_4(x)$ et donc la fonction f_4 est $\frac{\pi}{2}$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k , f_4 est $\frac{k\pi}{2}$ -périodique.

5) Pour tout réel x , $f_5\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = f_5(x)$ et donc la fonction f_5 est $\frac{4\pi}{3}$ -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k , f_5 est $\frac{4k\pi}{3}$ -périodique.

6) Pour tout réel x , $f_6(x + 3\pi) = \cos\left(\frac{2x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2x}{3}\right) = f_6(x)$ et donc la fonction f_6 est 3π -périodique. Plus généralement, pour tout entier relatif k , f_6 est $3k\pi$ -périodique.

Exercice n° 6

Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 1$ et en particulier, pour tout réel x , $x^2 + 1 \neq 0$. Donc, les deux fonctions sont définies sur \mathbb{R} .

1) Pour tout réel x ,

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Donc, pour tout réel x , $0 \leq f(x) \leq 1$. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$ est bornée sur \mathbb{R} .

2) Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} (|x| - 1)^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{|x|}{x^2 + 1} \\ &\Rightarrow \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x , $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ est bornée sur \mathbb{R} .

Exercice n° 7

1) Pour tout réel x , $f(x) = k(h(g(x)))$ où $g : x \mapsto x + 1$, $h : y \mapsto y^2$ et $k : z \mapsto -z + 1$.

La fonction g est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, la fonction h est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} et la fonction k est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$.

La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ à valeurs dans $]-\infty, 0]$, la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R} et la fonction k est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$.

2) Pour tout réel x , $f(x) = k(h(g(x)))$ où $g : x \mapsto 2x + 1$, $h : y \mapsto \frac{1}{y}$ et $k : z \mapsto 3 - 5z$.

La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ à valeurs dans $]-\infty, 0[$, la fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ à valeurs dans \mathbb{R} et la fonction k est strictement décroissante sur \mathbb{R} . Donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

3) La fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $X \mapsto \ln X$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc, $x \mapsto$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4) La fonction $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$ est définie sur \mathbb{R}^* et paire.

La fonction $x \mapsto \ln x$ est croissante et négative sur $]0, 1]$. Donc, la fonction $x \mapsto 1 + \ln^2 x$ est décroissante et strictement positive sur $]0, 1]$. Par suite, la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{\ln^2 x + 1}$ est décroissante sur $]0, 1]$ et enfin, la fonction

$x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$ est décroissante sur $]0, 1]$. De même, la fonction $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$ est croissante sur $[1, +\infty[$. Par parité, la fonction $x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$ est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, 0[$.

5) Soient x et x' deux réels tels que $x \leq x'$. Alors, pour tout réel t de l'intervalle $[x, x']$, $\frac{1}{1+t^2} \geq 0$ et donc, $f_5(x') - f_5(x) =$

$$\int_x^{x'} \frac{1}{1+t^2} dt \geq 0 \text{ (par positivité de l'intégrale). } f_5 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.$$

6) Soient x et x' deux réels tels que $x \leq x'$. Alors, pour tout réel t de l'intervalle $[0, 1]$, on a $xt \leq x't$, puis pour tout réel t de $[0, 1]$, $e^{xt} \leq e^{x't}$. Par croissance de l'intégrale, on a alors $f_6(x) \leq f_6(x')$. f_6 est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice n° 8

1) La fonction $x \mapsto \sin x$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et donc la fonction $x \mapsto -\cos x$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. f_1 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2) Les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln x$ sont croissantes et positives sur $[1, +\infty[$. Donc, f_2 est croissante sur $[1, +\infty[$ en tant que produit de fonctions croissantes et positives sur $[1, +\infty[$.

3) f_3 est paire. $x \mapsto \frac{\pi}{2(x^2 + 1)}$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction $X \mapsto \cos X$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2(x^2 + 1)}\right)$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , et de plus positive sur \mathbb{R}^+ . f_3 est croissante sur \mathbb{R}^+ en tant que produit de fonctions croissantes et positives sur \mathbb{R}^+ . Par parité, f_3 est décroissante sur \mathbb{R}^- .

4) $2 \times (-1) - 1 \times (3) = -5 < 0$. Donc, f_4 est strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

5) f_5 est paire. La fonction $x \mapsto x^4$ est croissante sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Puisque $1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 > 0$, la fonction $X \mapsto \frac{X-1}{X+1}$ est croissante sur $] -1, +\infty[$ et en particulier sur \mathbb{R}^+ . f_5 est croissante sur \mathbb{R}^+ . Par parité, f_5 est décroissante sur \mathbb{R}^- .

6) Les fonctions $x \mapsto -x^7$ et $x \mapsto x^4 + x^2 + 3$ sont strictement décroissantes sur $] -\infty, 0[$. Donc, f_6 est strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur $] -\infty, 0[$.

Exercice n° 9

1) Si $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq 2x + 1 \leq 5$ et $0 < 7 \leq 4x + 3 \leq 11$. Par suite, $0 < 3 \leq 2x + 1 \leq 5$ et $0 < \frac{1}{11} \leq \frac{1}{4x + 3} \leq \frac{1}{7}$, puis $\frac{3}{11} \leq \frac{2x + 1}{4x + 3} \leq \frac{5}{7}$.

2) $\frac{2x + 1}{4x + 3} = \frac{3}{11} \Leftrightarrow 11(2x + 1) = 3(4x + 3) \Leftrightarrow 10x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$. La solution obtenue n'est pas dans l'intervalle $[1, 2]$, ou encore l'équation $\frac{2x + 1}{4x + 3} = \frac{3}{11}$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1, 2]$. Ceci signifie que l'encadrement fourni au 1) est trop large et peut donc sûrement être amélioré.

3) Puisque $2 \times 3 - 1 \times 4 = 2 > 0$, la fonction $f : x \mapsto \frac{2x + 1}{4x + 3}$ est croissante sur $[1, 2]$. Par suite, si $x \in [1, 2]$,

$$\frac{3}{7} = f(1) \leq \frac{2x + 1}{4x + 3} = f(x) \leq f(2) = \frac{5}{11}.$$

Exercice n° 10

1) f_1 est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 2]$. f_1 admet donc un minimum égal à $f_1(0) = 0$ et un maximum égal à $\text{Max}\{f_1(-1), f_1(2)\} = 4$. Pour $x \in [-1, 2]$, $0 \leq x^2 \leq 4$.

2) Pour $x \in [0, 4]$, $-\frac{1}{4} = f_2\left(\frac{3}{2}\right) \leq f_2(x) \leq f_2(4) = 6$.

3) f_3 est décroissante sur $[-2, -1]$. Donc, pour $x \in [-2, -1]$, $f_2(-1) \leq f_2(x) \leq f_2(-2)$, ou encore $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$.

4) f_4 est paire, décroissante sur $]0, 1]$. f_4 n'est pas majorée sur $]0, 1]$ et admet un minimum égal à $f_4(1) = 1$. Pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, $\frac{1}{x^2} \geq 1$.

5) f_5 est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. Pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, $-1 = \cos \pi \leq \cos x \leq \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6) f_6 est dérivable sur $[0, 4]$ (car $-\frac{2}{13} \notin [0, 4]$) et pour $x \in [0, 4]$, $f_6'(x) = \frac{5 \times 2 - 13 \times 1}{(13x + 2)^2} = -\frac{3}{(13x + 2)^2} < 0$. f_6 est donc décroissante sur $[0, 4]$ et pour $x \in [0, 4]$, $\frac{7}{18} = f_6(4) \leq f_6(x) = \frac{5x + 1}{13x + 2} \leq f_6(0) = \frac{1}{2}$.

7) Pour $x \neq \frac{9}{2}$, posons $f_7(x) = \frac{2x + 3}{2x - 9}$. Puisque $2 \times (-9) - 3 \times 2 < 0$, f_7 est décroissante sur $\left[0, \frac{9}{2}\right[$ et aussi sur $\left]\frac{9}{2}, +\infty\right[$. Par suite, pour $n \geq 5$, $1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2p + 3}{2p - 9} \leq \frac{2n + 3}{2n - 9} \leq \frac{2 \times 5 + 3}{2 \times 5 - 9} = 13$ et pour $0 \leq n \leq 4$, $-11 = \frac{2 \times 4 + 3}{2 \times 4 - 9} \leq \frac{2n + 3}{2n - 9} \leq \frac{2 \times 0 + 3}{2 \times 0 - 9} = -\frac{1}{3}$. La plus petite valeur de $\frac{2n + 3}{2n - 9}$ est -11 (obtenue pour $n = 4$) et la plus grande valeur de $\frac{2n + 3}{2n - 9}$ est 13 (obtenue pour $n = 5$).

8) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4n+1}{3n+7} = \frac{\frac{4}{3}(3n+7) - \frac{28}{3} + 1}{3n+7} = \frac{4}{3} - \frac{25}{9(n+\frac{7}{3})}$. La suite $\left(\frac{4n+1}{3n+7}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. On en déduit que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{7} \leq \frac{4n+1}{3n+7} < \frac{4}{3}$.

Exercice n° 11

1) Soit $x \in [1, 3]$. $(2x^2 - 5x + 3) - (3x - 3) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3) \leq 0$. Donc, pour $x \in [1, 3]$, $2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$.

2) Pour $x \geq 1$, $\frac{2x^2 - 7x + 1}{x+3} \leq \frac{2x^2 + 7x + 1}{x+3} \leq \frac{2x^2 + 7x^2 + x^2}{x} = 10x$.

3) Pour tout réel x , $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ et donc $\sqrt{x^2 - x + 1}$ existe pour tout réel x . De plus, pour tout réel x , $\sqrt{x^2 - x + 1} > 0$.

Pour $x \leq 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} - x > 0$ et donc $\sqrt{x^2 - x + 1} + x$ a le même signe que

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right) \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) = -x + 1 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout réel $x \leq 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} + x \geq 0$ et donc pour tout réel $x \leq 0$, $\sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x$.

Exercice n° 12

Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 0$ et donc, pour tout réel x , $\sqrt{x^2 + 1}$ existe. Ensuite, pour tout réel x ,

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|.$$

Par suite, pour tout réel x , $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq x$ et donc $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ et aussi, pour tout réel x , $\sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq -x$ et donc $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$.

Exercice n° 13

1) Pour $x \geq 0$, posons $f(x) = \sin x - x$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geq 0$, on a $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. f est donc décroissante sur $[0, +\infty[$. Mais $f(0) = 0$ et f est négative sur $[0, +\infty[$ ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

Commentaire. La démonstration précédente ne tient pas debout car la formule $(\sin)' = \cos$ a été établie en sachant que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) \leq x$. Néanmoins, c'est ce qui est attendu dans la pratique (et il se trouve qu'on est capable de démontrer que $(\sin)' = \cos$ sans utiliser l'inégalité $\sin(x) \leq x$).

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = e^x - 1 - x$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x - 1$. f' est négative sur \mathbb{R}^- et positive sur \mathbb{R}^+ . f admet donc un minimum en 0 égal à $f(0) = 0$. f est négative sur \mathbb{R} ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.

3) Pour $x > -1$, posons $f(x) = \ln(1+x) - x$. f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et pour $x > -1$, on a $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$. f' est positive sur $] -1, 0]$ et négative sur \mathbb{R}^+ . f admet donc un maximum en 0 égal à $f(0) = 0$. On en déduit que f est négative sur $] -1, +\infty[$ ce qui démontre l'inégalité de l'énoncé.