

Planche n° 7. Nombres complexes : corrigé

Exercice n° 1

On a $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1 + i$ dans \mathbb{C} sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.

On a aussi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x + iy)^2 = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) \\ y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right) \right\}.$$

Les racines carrées de $1 + i$ sont donc aussi $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right)$. Puisque $\operatorname{Re}(e^{i\pi/8}) = \cos \frac{\pi}{8} > 0$, on obtient

$$\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}, \text{ ou encore}$$

$$e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Exercice n° 2

1) $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ ou $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.

2) $\Delta' = 1^2 - 2 = -1 = i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + i)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - i)$.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout complexe z , on a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z \cos \theta + 1 &= (z - \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta = (z - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = (z - \cos \theta)^2 - (i \sin \theta)^2 \\ &= (z - \cos \theta - i \sin \theta)(z - \cos \theta + i \sin \theta) = (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$.

De plus, $\Delta' = \cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

4) Soit (E) l'équation $z^2 - (6 + i)z + (11 + 13i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (6 + i)^2 - 4(11 + 13i) = -9 - 40i$. Comme $40 = 2 \times 20 = 2 \times (4 \times 5)$ et que $4^2 - 5^2 = 16 - 25 = -9$, on est en droit de deviner que $\Delta = (4 - 5i)^2$. L'équation (E) a deux solutions distinctes dans \mathbb{C} à savoir $z_1 = \frac{6 + i + 4 - 5i}{2} = 5 - 2i$ et $z_2 = \frac{6 + i - 4 + 5i}{2} = 1 + 3i$.

5) Soit (E) l'équation $2z^2 - (7 + 3i)z + (2 + 4i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (7 + 3i)^2 - 8(2 + 4i) = 24 + 10i$. Comme $10 = 2 \times 5 = 2 \times (5 \times 1)$ et que $5^2 - 1^2 = 24$, on est en droit de deviner que $\Delta = (5 + i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans \mathbb{C} à savoir $z_1 = \frac{7 + 3i + 5 + i}{4} = 3 + i$ et $z_2 = \frac{7 + 3i - 5 - i}{4} = \frac{1}{2}(1 + i)$.

Exercice n° 3

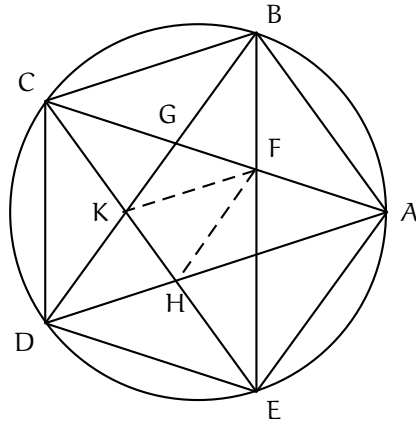
1) On a $a = e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$ et $b = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$.

$1, z, z^2, z^3$ et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans \mathbb{C} . Par suite, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. Mais alors

$$a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$$

et

$$ab = (z + z^4)(z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$



Définition du **nombre d'or**.



On veut que C partage le segment $[A, B]$ de telle sorte que $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a = AB$ et $x = AC$, $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} - 1 = 0$ et donc, puisque $\frac{x}{a} > 0$, $\frac{x}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618\dots$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$

Exercice n° 4

Soit $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / i(\omega_k + 1)z = \omega_k - 1. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $k \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Donc,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} i (e^{i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})})} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \frac{2i \sin(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3})}{i(2 \cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}))} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\} / z = \tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Exercice n° 5

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C = r_{A, \frac{\pi}{3}}(B) \text{ ou } C = r_{A, -\frac{\pi}{3}}(B) \Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b - a) \text{ ou } c - a = (-j)(b - a) \\
&\Leftrightarrow (-1 - j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1 - j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
&\Leftrightarrow (j^2)^2 a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\
&\Leftrightarrow (ja + j^2b + c)(j^2a + jb + c) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)(ab + ac + bc) = 0 \\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \\
&\Leftrightarrow -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0 \\
&\Leftrightarrow (c - a)(a - b) + (a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(c - a)(a - b) + (a - b)(b - c) + (b - c)(c - a)}{(b - c)(c - a)(a - b)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b} = 0.
\end{aligned}$$

Exercice n° 6

Le discriminant de l'équation $Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0$ vaut

$$(5 - 14i)^2 + 8(5i + 12) = -75 - 100i = 25(-3 - 4i) = (5(1 - 2i))^2.$$

L'équation $Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0$ admet donc les deux solutions $Z_1 = \frac{5 - 14i + 5 - 10i}{2} = 5 - 12i$ et $Z_2 = \frac{5 - 14i - 5 + 10i}{2} = -2i$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2 \text{ est solution de l'équation } Z^2 - (5 - 14i)Z - 2(5i + 12) = 0 \\
&\Leftrightarrow z^2 = 5 - 12i = (3 - 2i)^2 \text{ ou } z^2 = -2i = (1 - i)^2 \\
&\Leftrightarrow z = 3 - 2i \text{ ou } z = -3 + 2i \text{ ou } z = 1 - i \text{ ou } z = -1 + i.
\end{aligned}$$

Exercice n° 7

Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1,$$

et

$$|z| = |z - 1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$

Exercice n° 8

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \frac{1 + ix}{1 - ix}$. Puisque $1 - ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \frac{|1 + ix|}{|1 - ix|} = \frac{|1 + ix|}{|1 + ix|} = 1$.

Enfin, $z = \frac{-1 + ix + 2}{1 - ix} = -1 + \frac{2}{1 - ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1 + ix}{1 - ix} \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$\begin{aligned} z = e^{i\theta} &= \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}(1 + i \tan \frac{\theta}{2})}{\cos \frac{\theta}{2}(1 - i \tan \frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{1 + i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - i \tan \frac{\theta}{2}} \quad (\cos \frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan \frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos \theta + i \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = -1 \text{ et } \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ ,

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} &= \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \times \frac{\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2) + i \cos(\theta/2)} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} \\ &= -i \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

- **1er cas.** $\cotan \frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[.$

Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta}$ est $\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\pi/2}$ (module = $\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et argument = $-\frac{\pi}{2}$ (2π)).

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \left[\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2} \right].$$

- **2ème cas.** $\cotan \frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[.$

Dans ce cas,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = -\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\pi/2} = \left| \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = \left[-\cotan\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2} \right].$$

- **3ème cas.** $\cotan \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta} = 0$.

Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = i \cotan \frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \left[\cotan \frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Si $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \left[-\cotan \frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$.

Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = 0$.

Exercice n° 10

$$(1 + i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512.$$

La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Exercice n° 11

$i = e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ensuite,

$$-\frac{8\sqrt{2}}{1+i} = -\frac{8}{e^{i\pi/4}} = -8e^{-i\pi/4} = 2e^{3i\pi/4}.$$

Les racines cubiques de $-\frac{8\sqrt{2}}{1+i}$ sont donc les nombres $2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$, $k \in \{-1, 0, 1\}$, ou encore les trois nombres $2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$, $2e^{-i\pi/12}$ et $2e^{11i\pi/12}$.

Exercice n° 12

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1 + z + \dots + z^{n-1}| \leq 1 + |z| + |z|^2 + \dots + |z|^{n-1} < |z|^n + |z|^{n-1} + \dots + |z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1 + z + \dots + z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1 + z + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leq 1$.

Exercice n° 13

A- Solutions algébriques. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble cherché est la droite (Oy) (car le point d'affixe 1 n'appartient pas à (Oy)).

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} |z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = 4((1-x)^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$ (car le point d'affixe 1 n'appartient pas à ce cercle).

3) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = (1-z)(1+\bar{z}) \Leftrightarrow z - \bar{z} = \bar{z} - z \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point de coordonnées $(1, 0)$.

4) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = -1 + z\bar{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 1, privé du point de coordonnées $(1, 0)$.

B- Solutions géométriques (pour 1), 3) et 4)). Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 , M le point d'affixe z et \mathcal{E} l'ensemble cherché.

1)

$$M \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (\text{Oy}).$$

3) Soit $M \neq B$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z \neq -1 \text{ et } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0 \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $B(1,0)$.

4) Soit $M \neq B$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z \neq -1 \text{ et } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $B(1,0)$.

Exercice n° 14

Soit f la transformation considérée.

1) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3, -1)$.

2) $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.

3) $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4) $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice n° 15

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M , A et B les points d'affixes respectives z , 1 et -1 .

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n \\ &\Rightarrow |z-1| = |z+1| \text{ (car } |z-1| \text{ et } |z+1| \text{ sont des réels positifs)} \\ &\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (\text{Oy}) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de (E)}.$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = \frac{2i \sin \frac{k\pi}{n}}{2 \cos \frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket / z = i \cotan \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres de la forme $i \cotan \frac{k\pi}{n}$, $1 \leq k \leq n-1$.

Exercice n° 16

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. $\operatorname{sh} z$ et $\operatorname{ch} z$ sont définis et donc, $\operatorname{th} z$ existe si et seulement si $\operatorname{ch} z \neq 0$. Or,

$$\operatorname{ch} z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow -e^{2z} = 1 \Leftrightarrow e^{2z+i\pi} = 1 \Leftrightarrow 2z + i\pi \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$\operatorname{th} z$ existe si et seulement si $z \notin i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ ou encore $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\operatorname{th} z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \emptyset$, $\operatorname{th} z = 0$ si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

3) Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |\operatorname{th} z| < 1 &\Leftrightarrow |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \Leftrightarrow (e^z - e^{-z})(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}) < (e^z + e^{-z})(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}) \\ &\Leftrightarrow -e^{z-\bar{z}} - e^{-(z-\bar{z})} < e^{z-\bar{z}} + e^{-(z-\bar{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2y) > 0 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

4) Soit $z \in \Delta$. D'après 1), $\operatorname{th} z$ existe et d'après 3), $|\operatorname{th} z| < 1$. Donc $z \in \Delta \Rightarrow \operatorname{th} z \in \mathcal{U}$. Ainsi, th est une application de Δ dans \mathcal{U} .

Soit alors $Z \in \mathcal{U}$ et $z \in \Delta$.

$$\operatorname{th} z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque $Z \neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z} \neq 0$ et on peut poser $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Puisque $|Z| < 1$,

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \frac{1+Z}{1-Z} + \frac{1+\bar{Z}}{1-\bar{Z}} = \frac{2(1-|Z|^2)}{|1-Z|^2} > 0$$

et donc $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En posant $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = \frac{1}{2} \ln r + \frac{\theta}{2} + k\pi. \end{aligned}$$

Puisque $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ puis

$$\frac{\theta}{2} + k\pi \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow k = 0.$$

Mais alors,

$$\begin{cases} \operatorname{th} z = Z \\ z \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln r \\ y = \frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, tout élément Z de \mathcal{U} a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+Z}{1-Z} \right| + \frac{i}{2} \text{Arg} \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right)$, $\text{Arg} \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right)$ désignant l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $] -\pi, \pi[$).

th réalise donc une bijection de Δ sur \mathcal{U} .