Planche n° 6. Systèmes d'équations linéaires : corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x+3y-z=1\\4x+y+2z=6\\x-3y+z=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z=2x+3y-1\\4x+y+2(2x+3y-1)=6\\x-3y+(2x+3y-1)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}z=2x+3y-1\\8x+7y=8\\3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\8+7y=8\\z=2x+3y-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\y=0\\z=1\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, 0, 1)\}$.

2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x+y+z=7\\x+2y+z=8\\x+y+2z=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+y+z=7\\x+2y+z=8\\x+y+2z=9\\(2x+y+z)+(x+2y+z)+(x+y+2z)=7+8+9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+y+z=7\\x+2y+z=8\\x+y+2z=9\\x+y+z=6\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(2x+y+z)-(x+y+z)=7-6\\(x+2y+z)-(x+y+z)=8-6\\(x+y+2z)-(x+y+z)=9-6\\x+y+z=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=3\\x+y+z=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=3\end{array}\right. .$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, 2, 3)\}$.

3) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z=2\\3x-y=1\\4x+z=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=3x-1\\z=-4x+4\\x+(3x-1)+(-4x+4)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}0\times x=5\\y=3x-1\\z=-4x+4\end{array}\right. .$$

Le système proposé n'a pas de solution.

4) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x+y=1\\x+y=0\\3x+4y=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-x\\2x-x=1\\3x-4x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-x\\x=1\\x=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\y=-1\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, -1, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

5)

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=3\\x+y+z-t=3\\x-y-z-t=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x=2 \quad (L_1 \leftarrow L_1+L_3)\\x+y+z-t=3\\x-y-z-t=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\1+y+z-t=3\\1-y-z-t=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\y+z-t=2\\-y-z-t=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\-2t=0 \quad (L_2 \leftarrow L_2+L_3)\\-y-z-t=-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1\\t=0\\z=-y+2\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\{(1, y, 0, -y+2),\ y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 2.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}' &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=-2x+y+2 \\ x+y+2(-2x+y+2)=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x+3y=-3 \\ z=-2x+y+2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=x-1 \\ z=-2x+(x-1)+2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=x-1 \\ z=-x+1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=-\lambda+1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est la droite de représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=-\lambda+1 \end{array} \right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il revient au même de dire que l'ensemble des solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{array} \right.$ est $\{(x, x-1, -x+1),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 3. m est un paramètre réel.

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=4-2x-3y \\ -x+my+2\,(4-2x-3y)=5 \\ 7x+3y+(m-5)\,(4-2x-3y)=7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=4-2x-3y \\ -5x+(m-6)y=-3 \\ (-2m+17)x+(-3m+18)y=-4m+27 \end{array} \right. .$$

Le déterminant du système formé par les deux dernières équations est

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \begin{array}{cc} -5 & m-6 \\ -2m+17 & -3m+18 \end{array} \right| = -5(-3m+18)-(-2m+17)(m-6) = (m-6)(15-(-2m+17)) \\ &= 2(m-1)(m-6). \end{aligned}$$

Le système formé par les deux dernières équations est de Cramer si et seulement si $m \notin \{1, 6\}$.

• Si $m \notin \{1, 6\}$, les formules de Cramer fournissent alors :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} -5x+(m-6)y=-3 \\ (-2m+17)x+(-3m+18)y=-4m+27 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2(m-1)(m-6)} \left| \begin{array}{cc} -3 & m-6 \\ -4m+27 & -3m+18 \end{array} \right| \\ y=\dfrac{1}{2(m-1)(m-6)} \left| \begin{array}{cc} -5 & -3 \\ -2m+17 & -4m+27 \end{array} \right| \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{4m^2-42m+108}{2(m-1)(m-6)} \\ y=\dfrac{14m-84}{2(m-1)(m-6)} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{2(2m-9)(m-6)}{2(m-1)(m-6)}=\dfrac{2m-9}{m-1} \\ y=\dfrac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)}=\dfrac{7}{m-1} \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\dfrac{2m-9}{m-1} \\ y=\dfrac{7}{m-1} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m-9}{m-1} \\ y=\dfrac{7}{m-1} \\ z=4-2\times\dfrac{2m-9}{m-1}-3\times\dfrac{7}{m-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m-9}{m-1} \\ y=\dfrac{7}{m-1} \\ z=\dfrac{-4m-7}{m-1} \end{cases}$$

Si $m \notin \{1,6\}$, l'ensemble des solutions du système proposé est $\left\{\left(\dfrac{2m-9}{m-1}, \dfrac{7}{m-1}, \dfrac{-4m-7}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m=1$, le système s'écrit $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=5 \\ 7x+3y-4z=7 \end{cases}$ ou aussi $\begin{cases} z=4-2x-3y \\ -5x-5y=-3 \\ 15x+15y=23 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} z=4-2x-3y \\ x+y=\dfrac{3}{5} \\ x+y=\dfrac{23}{15}. \end{cases}$. Dans ce cas, le système n'a pas de solution.

• Si $m=6$, le système s'écrit $\begin{cases} z=4-2x-3y \\ -5x=-3 \\ 5x=3 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ z=4-2\times\dfrac{3}{5}-3y \end{cases}$ ou enfin $\begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ z=\dfrac{14}{5}-3y \end{cases}$.

Si $m=6$, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\dfrac{3}{5}, y, \dfrac{14}{5}-3y\right),\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

2) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} 2x+my+z=3m \\ x-(2m+1)y+2z=4 \\ 5x-y+4z=3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(2m+1)y-2z+4 \\ 2((2m+1)y-2z+4)+my+z=3m \\ 5((2m+1)y-2z+4)-y+4z=3m-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=(2m+1)y-2z+4 \\ (5m+2)y-3z=3m-8 \\ (10m+4)y-6z=3m-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(2m+1)y-2z+4 \\ (5m+2)y-3z=3m-8 \\ (5m+2)y-3z=\dfrac{3}{2}m-11. \end{cases}$$

Ensuite,

$$3m-8=\frac{3}{2}m-11 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m=-3 \Leftrightarrow m=-2.$$

• Si $m\neq -2$, le système n'a pas de solution.

• Si $m=-2$, le système s'écrit $\begin{cases} x=-3y-2z+4 \\ -8y-3z=-14 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} z=\dfrac{14-8y}{3} \\ x=-3y-2\dfrac{14-8y}{3}+4 \end{cases}$ ou enfin $\begin{cases} z=\dfrac{14-8y}{3} \\ x=\dfrac{-16+7y}{3} \end{cases}$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\dfrac{-16+7y}{3}, y, \dfrac{14-8y}{3}\right),\ y\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice n° 4.

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k\in\{1,...,n-1\},\ z_k+z_{k+1}=2a_k \text{ et } z_n+z_1=2a_n,$$

Résolvons le système constitué des $n-1$ premières équations

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ z_3 + z_4 = 2a_3 \\ \quad\vdots \\ z_{n-2} + z_{n-1} = 2a_{n-2} \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = 2a_1 - z_1 \\ z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1 \\ z_4 = 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 - z_1 \\ \quad\vdots \\ z_{n-1} = 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-3}a_1 + (-1)^{n-2}z_1 \\ z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + \ldots + 2(-1)^{n-2}a_1 + (-1)^{n-1}z_1 \end{cases}$$

La dernière équation s'écrit alors $2a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + \ldots + 2(-1)^{n-2}a_1 + (-1)^{n-1}z_1 + z_1 = 2a_n$ ou encore

$$(1 - (-1)^n)\, z_1 = 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + \ldots + 2(-1)^{n-1}a_1$$

• Si n est impair, cette dernière équations est équivalente à

$$z_1 = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}a_1$$

En reportant cette expression dans les $n-1$ premières équations, on obtient le fait que le problème posé a une solution et une seule.

• Si n est pair, la dernière équation s'écrit

$$0 \times z_1 = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots - a_1$$

Si $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots - a_1 \neq 0$, le problème posé n'a pas de solution.
Si $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots - a_1 = 0$, la dernière équation est vérifiée par tout nombre complexe z_1. Le système se réduit alors aux $n-1$ premières équations. Le problème posé a dans ce cas une infinité de solutions.

Remarque. Si n est pair, on peut poser $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. La condition $a_{2p} - a_{2p-1} + a_{2p-2} - a_{2p-3} + \ldots + a_2 - a_1 = 0$ s'écrit encore

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice n° 5.

1) Soient a, b et c trois réels. Pour tout réel x, posons $P(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P'(1) = 1 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 1 \\ a + (-2a + 1) + c = 1 \\ a - (-2a + 1) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 1 \\ -a + c = 0 \\ 3a + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 1 \\ c = a \\ 3a + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2.$$

Il existe un et un seul polynôme P de degré 2 tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$ et $P(-1) = 0$ à savoir le polynôme $x \mapsto \dfrac{1}{4}(x+1)^2$.

2) Soient a, b, c et d quatre réels. Pour tout réel x, posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\left\{\begin{array}{l} P(-1)=1 \\ P(1)=0 \\ P(2)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a+b-c+d=1 \\ a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-a-b-c \\ -a+b-c+(-a-b-c)=1 \\ 8a+4b+2c+(-a-b-c)=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-a-b-c \\ -2a-2c=1 \\ 7a+3b+c=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d=-a-b-c \\ c=-a-\dfrac{1}{2} \\ 7a+3b+\left(-a-\dfrac{1}{2}\right)=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-a-\dfrac{1}{2} \\ b=-2a+\dfrac{1}{2} \\ d=2a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x)=ax^3+\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-a-\frac{1}{2}\right)x+2a.$$

Les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1)=1$, $P(1)=0$ et $P(2)=1$ sont les polynômes de la forme

$$x \mapsto ax^3+\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(-a-\frac{1}{2}\right)x+2a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

