

Planche n° 5. Le binôme de NEWTON

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (IT)

Identités combinatoires (la difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable).

1) Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.

2) Montrer que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.

3) a) On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^3 = 1$.

b) Calculer la somme $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$

c) Calculer la somme $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$

4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

5) Montrer que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).

6) Calculer les sommes $0 \times \binom{n}{0} + 1 \times \binom{n}{1} + \dots + n \times \binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).

7) Montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leq p \leq n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?

Exercice n° 2. (**)

Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$.

Exercice n° 3. (**I)

Développer $(a + b + c + d)^2$ et $(a + b + c)^3$.

Exercice n° 4. (***)

Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a + b)^n$?

Exercice n° 5. (**)

Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.

Exercice n° 5. (**)

Soient n un entier naturel et θ un réel. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.