Planche n° 5. Le binôme de Newton : corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geqslant 1),$$

et donc $S_1 = S_2$. Puis $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.}$$

3) a) Posons $j = e^{2i\pi/3}$.

$$j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}\times 3} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi).$$

Ensuite, puisque $j \neq 1$,

$$1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{1-1}{1-j} = 0.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^k = (1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^{2k} = (1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+j^k+j^{2k}) = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n.$$

Maintenant,

- si $k \in 3\mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + (j^3)^p + (j^3)^{2p} = 3$ car $j^3 = 1$.
- si $k \in 3\mathbb{N}+1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+1$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j(j^3)^p + j^2(j^3)^{2p} = 1 + j + j^2 = 0$
- si $k \in 3\mathbb{N}+2$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3p+2$ et $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^2(j^3)^p + j^4(j^3)^{2p} = 1 + j^2 + j = 0$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+j^k+j^{2k}) = 3\sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k} &= \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\right) = \frac{1}{3}(2^n + 2\,\mathrm{Re}((1+j)^n)) \\ &= \frac{1}{3}(2^n + 2\,\mathrm{Re}((-j^2)^n)) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).}$$

4) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = k\binom{n-1}{k-1}.$$

5) $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

6) a) 1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

Pour tout x réel,

$$P(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

b) 1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\ dt = \int_0^x (1+t)^n\ dt = \frac{1}{n+1}\left((1+x)^{n+1} - 1\right).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

7) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k=0$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$). Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p} \binom{p+k}{p} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-p} \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 \text{ (somme télescopique)} \\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de Pascal. Quand on descend dans le triangle de Pascal, le long de la colonne p, du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve$\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

Exercice n° 2. La formule du binôme de Newton fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (a-b)^k (2c)^{9-k} = (a-b)^9 + \ldots + \binom{9}{6} (a-b)^6 (2c)^3 + \ldots + (2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^k (-b)^{6-k} = a^6 - \ldots + \binom{6}{4} a^4 (-b)^2 - .. + (-b)^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6}\binom{6}{4} 2^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times 2^3 = 3 \times 4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 8 = 10080.$$

Exercice n° 3.

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

et

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 6abc.$$

Exercice n° 4.

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k-1}}{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1} \times \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\dfrac{na-b}{a+b} > n-1$ (ce qui équivaut à $n < \dfrac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n.

2ème cas. Si $\dfrac{na-b}{a+b} \leqslant 0$ (ce qui équivaut à $n \leqslant \dfrac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n.

3ème cas. Si $0 < \dfrac{na-b}{a+b} \leqslant n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\dfrac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).

Si $\dfrac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, on pose $k_0 = E\left(\dfrac{na-b}{a+b}\right) + 1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis décroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k, atteint une et une seule fois.

Si $\dfrac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice $k_0 - 1$ et à l'indice k_0.

Exercice n° 5.

Pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n &\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \\ &\Leftrightarrow n(-24 + 3(n-1) + (n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 5.\end{aligned}$$

D'autre part, $1 + 0 + 0 \neq 5$ et $2 + 1 + 0 \neq 10$ et donc 1 et 2 ne sont pas solution de l'équation. L'équation proposée admet une solution et une seule dans $\mathbb{N}^*$ à savoir 5.

Exercice n° 6.

Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\theta}\right)^k 1^{n-k}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left((e^{i\theta} + 1)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}\right)\right)^n\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n e^{in\theta/2}\right) \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

