Planche n° 4. Les symboles Σ et Π

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.)

1) (*) Calculer $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} i$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$.

2) (*) Calculer le nombre $1,1111\ldots = \lim\limits_{n\to+\infty} 1,\underbrace{11\ldots1}_{n}$ et le nombre $0,9999\ldots = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}$.

3) (*) Calculer $\underbrace{1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4) (*) Calculer $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$.

5) (**) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

6) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$. (Indication : calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.)

7) (***) Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

8) (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice n° 2. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes télescopiques.)

Calculer les sommes suivantes :

1) (**) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

2) (**) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\times k!$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

3) (***) Calculer $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1,2,3,4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1)-P_p(x) = x^p$).

4) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$. (Indication : calculer $2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)C_n$ (on donne $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$).)

Exercice n° 3. (IT)

Calculer les sommes suivantes :

1) (**) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$.

2) (**) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j$.

3) (*) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

4) (***) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(5h^4-18h^2k^2+5k^4)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Exercice n° 4. (IT)

1) (*) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2) (***) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}$, $a\in]0,2\pi[$, $n\in\mathbb{N}^*$ (indication : on sait que pour tout réel x, $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.)

