Planche n° 4. Les symboles Σ et Π

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.)

1) (*) Calculer $\sum_{i=3}^{n} i$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$.

2) (*) Calculer le nombre $1,1111... = \lim_{n\to+\infty} 1,\underbrace{11...1}_{n}$ et le nombre $0,9999... = \lim_{n\to+\infty} 0,\underbrace{99...9}_{n}$.

3) (*) Calculer $\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4) (*) Calculer $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

5) (**) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos\frac{k\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

6) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. (Indication : calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.)

7) (***) Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

8) (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice n° 2. (IT)

(Cet exercice est consacré aux sommes télescopiques.)

Calculer les sommes suivantes :

1) (**) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

2) (**) $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

3) (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1,2,3,4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1) - P_p(x) = x^p$).

4) (***) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$. (Indication : calculer $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C_n$ (on donne $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$).)

Exercice n° 3. (IT)

Calculer les sommes suivantes :

1) (**) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$.

2) (**) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ et $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j$.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.

3) (*) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$.

4) (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}(5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n° 4. (IT)

1) (*) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (***) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}$, $a \in]0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$ (indication : on sait que pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.)

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.