Planche n° 4. Les symboles Σ et Π : corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $n \geqslant 3$.

$$\sum_{i=3}^{n} i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7) = \frac{(19+3n+10)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(3n+29)(n-2) = \frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 1,\underbrace{11...1}_{n}$. On a

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1-\dfrac{1}{10^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{10}{9} - \frac{1}{9\times 10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{9\times 10^n}$ tend vers 0, et donc u_n tend vers $\dfrac{10}{9}$.

$$\boxed{1,11111.... = \frac{10}{9}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = 0,\underbrace{99...9}_{n}$. On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k} = \frac{9}{10}\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc u_n tend vers 1.

$$\boxed{0,9999.... = 1.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-(-1)^n) = \left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ 1 \text{ si } n \text{ est impair}\end{array}\right. .$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = 1.}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos\frac{k\pi}{2} &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\pi/2}\right) \left(= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} i^k\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{(n+1)i\pi/2}}{1-e^{i\pi/2}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\pi/4}}{e^{i\pi/4}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{-2i\sin\frac{\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{1}{2} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } n \in 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}+1) \\ 0 \text{ si } n \in (4\mathbb{N}+2) \cup (4\mathbb{N}+3) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi + \cos\frac{3\pi}{2} = 1+0-1+0 = 0$, on a immédiatement $S_{4n} = S_0 = 1$, $S_{4n+1} = S_1 = 1$, $S_{4n+2} = S_2 = 0$ et $S_{4n+3} = S_3 = 0$.

6) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de Moivre,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k.$$

- 1er cas. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1-1)/2}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n + iS_n) = \frac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \mathrm{Im}(C_n + iS_n) = \frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

- 2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n+1$ et $S_n = 0$.

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \text{et } \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array}\right. .}$$

7) Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}(1-(-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\ dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\ dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\ dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\ dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\ dt \leqslant \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}x^{k-1} = \ln(1+x).}$$

En particulier,

$$\boxed{\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}.$$

8) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}-3 = 2u_n-6 = 2(u_n-3)$. La suite $(u_n-3)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raison $q=2$ et de premier terme $u_0-3=-2$. On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n-3=-2\times 2^n$ et donc que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 3-2^{n+1}.}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{k=0}^{n}3-2\sum_{k=0}^{n}2^k = 3(n+1)-2\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = -2^{n+2}+3n+5.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}u_k = -2^{n+2}+3n+5.}$$

Exercice n° 2.

1) Pour tout naturel non nul k, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k, on a $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k, $k\times k! = (k+1-1)\times k! = (k+1)\times k!-k! = (k+1)!-k!$ puis

$$\sum_{k=0}^{n}k\times k! = \sum_{k=0}^{n}((k+1)!-k!) = (n+1)!-1.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k,

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1-1)}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Calcul de S_1. Posons $P_1 = aX^2+bX+c$. On a

$$P_1(X+1)-P_1(X) = a((X+1)^2-X^2)+b((X+1)-X) = 2aX+(a+b).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}P_1(X+1)-P_1(X) = X &\Leftarrow 2a=1 \text{ et } a+b=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \text{ et } b=-\frac{1}{2}\\ &\Leftarrow P_1 = \frac{X^2}{2}-\frac{X}{2} \Leftrightarrow P_1 = \frac{X(X-1)}{2}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Calcul de S_2. Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 &\Leftarrow 3a = 1 \text{ et } 3a + 2b = 0 \text{ et } a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6} \\ &\Leftarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} \Leftrightarrow P_2 = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Calcul de S_3. Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X) \\ &= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftarrow 4a = 1,\ 6a + 3b = 0,\ 4a + 3b + 2c = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0 \\ &\Leftarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} \Leftrightarrow P_3 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Calcul de S_4. Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2) \\ &\quad + e((X+1) - X) \\ &= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a + b + c + d + e. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftarrow 5a = 1,\ 10a + 4b = 0,\ 10a + 6b + 3c = 0,\ 5a + 4b + 3c + 2d = 0 \\ &\quad \text{et } a + b + c + d + e = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3},\ d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30} \\ &\Leftarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} \Leftrightarrow P_4 = \frac{X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)}{30}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} (P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$
$$\text{et } \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.$$

4) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\theta}{2}C_n &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(-k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\left((k+1)-\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right)\\ &= \sin\left(\left((n+1)-\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

- 1er cas. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\dfrac{\theta}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ puis $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \neq 0$. On peut alors écrire $C_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

- 2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n+1$.

Exercice n° 3.

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1 ère solution. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} 1\right) = \sum_{j=2}^{n}(j-1) = \sum_{k=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$.

2 ème solution. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$ est le nombre de couples (i,j) d'entiers compris au sens large entre 1 et n tels que $i<j$. Il y a n^2 couples (i,j) d'entiers compris au sens large entre 1 et n.
Parmi ces n^2 couples, il y en a n tels que $i=j$ et donc $n^2-n = n(n-1)$ tels que $1 \leqslant i,j \leqslant n$ et $i \neq j$. Comme il y a autant de couples (i,j) tels que $i>j$ que de couples (i,j) tels que $i<j$, il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples (i,j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
Finalement,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} j\right) = \sum_{j=1}^{n} nj = n\sum_{j=1}^{n} j = n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}(j-1)j = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j\\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right)\\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'exercice n° 2, question3), on a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après

$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n} h^2k^2 = \left(\sum_{h=1}^{n} h^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2.$$

Comme d'autre part, $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} h^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ d'après l'exercice n° 2, question3), on a

$$\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n} h^4 = \sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} h^4\right) = \sum_{h=1}^{n} nh^4 = n\sum_{h=1}^{n} h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr $\displaystyle\sum_{1\leqslant h,k\leqslant n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n^5}\left(2\times 5\times\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\right)\\
&= \frac{1}{n^5}\left(\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{3} - \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n^5}\left(2n^6 - 2n^6 + n^5\left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2}\right) + \text{termes de degré au plus } 4\right)\\
&= -1 + \text{termes tendant vers } 0
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.$$

Exercice n° 4.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1 \text{ (produit télescopique)}.$$

2) Soit $a \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout naturel non nul k, on a $0 < \dfrac{a}{2^k} \leqslant \dfrac{a}{2} < \pi$ et donc $\sin\dfrac{a}{2^k} \neq 0$.
On sait alors que pour tout réel x, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$. Par suite, pour tout naturel k,

$$\sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right) = 2\sin\frac{a}{2^k}\cos\frac{a}{2^k} \quad \text{et donc} \quad \cos\frac{a}{2^k} = \frac{\sin\left(a/2^{k-1}\right)}{2\sin\left(a/2^k\right)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)} = \frac{1}{2^n}\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^{k-1})}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)} = \frac{\sin a}{2^n\sin\left(a/2^n\right)} \text{ (produit télescopique)}.$$

