Planche n° 3. Ensembles, relations, applications : corrigé

Exercice n° 1

Si $E = F$, alors $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$. F est un élément de $\mathscr{P}(F)$ et donc F est un élément $\mathscr{P}(E)$. Mais alors $F \subset E$. En échangeant les rôles de E et F on a aussi $E \subset F$ et finalement $E = F$.

Exercice n° 2

1) Si $A = B = \varnothing$ alors $A\Delta B = \varnothing = A \cap B$.
Si $A\Delta B = A \cap B$, supposons par exemple $A \neq \varnothing$.
Soit $x \in A$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B$ et donc $x \in A\Delta B$ ce qui est absurde et si $x \notin B$, $x \in A\Delta B$ et donc $x \in A \cap B$ ce qui est absurde. Donc $A = B = \varnothing$.
Finalement, $A\Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

2) Par distributivité de $\cup$ sur $\cap$,

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)) \cap (C \cup A) \\
&= ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) \text{ (car } B \cap B = B \text{ et } A \cap B \subset B \text{ et } B \cap C \subset B) \\
&= (A \cap C \cap C) \cup (A \cap C \cap A) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (C \cap A) \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)
\end{aligned}$$

3) $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A$.

4)

$$\begin{aligned}
x \in (A\Delta B)\Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A\Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux} \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A\Delta B) \\
&\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}
\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de A, B et C, $A\Delta(B\Delta C)$ est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties A, B ou C ou dans les trois. Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes $A\Delta B\Delta C$.

5) $A = B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ et $B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A\Delta B = \varnothing$.
$A \neq B \Rightarrow \exists x \in E/\ ((x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)) \Rightarrow \exists x \in E/\ x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B \Rightarrow A\Delta B \neq \varnothing$.

6) $\Leftarrow$/ Immédiat.

$\Rightarrow$] Si A et B sont vides, alors $A = B$. Sinon, l'une au moins des deux parties A ou B n'est pas vide. Supposons sans perte de généralité que A n'est pas vide. Soit x un élément de A.
Si $x \notin C$ alors $x \in A\Delta C = B\Delta C$ et donc $x \in B$ car $x \notin C$.
Si $x \in C$ alors $x \notin A\Delta C = B\Delta C$. Puis $x \notin B\Delta C$ et $x \in C$ et donc $x \in B$. Dans tous les cas, x est dans B. Tout élément de A est dans B et donc $A \subset B$.
En échangeant les rôles de A et B, on a aussi $B \subset A$ et finalement $A = B$.

Exercice n° 3

Réflexivité. Pour tout réel x, on a $xe^x = xe^x$ et donc, pour tout réel x, on a $x\mathscr{R}x$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive.
Symétrie. Soient x et y deux réels tels que $x\mathscr{R}y$. On a donc $xe^y = ye^x$ puis $ye^x = xe^y$ et donc $y\mathscr{R}x$. On a montré que pour tous réels x et y, si $x\mathscr{R}y$ alors $y\mathscr{R}x$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.
Transitivité. Soient x, y et z trois réels tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. On a donc $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. On en déduit que

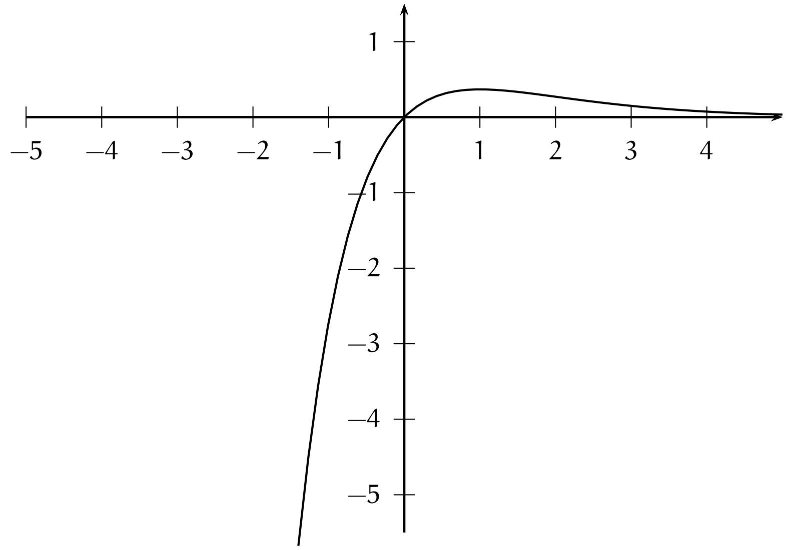
$$xe^z = xe^y e^{-y} e^z = ye^x e^{-y} e^z = ye^z e^{-y} e^x = ze^y e^{-y} e^x = ze^x$$

et donc $x\mathscr{R}z$. On a montré que pour tous réels x, y et z, si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $x\mathscr{R}z$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est transitive.

Finalement, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel. Déterminons le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = te^{-t}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = (1-t)e^{-t}$. f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et tend vers 0 en $+\infty$. Le graphe de f est



Pour tout réel y,

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} = ye^{-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

L'étude de f montre que si $x \in]-\infty, 0] \cup \{1\}$, la classe de x est un singleton et si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la classe de x est constituée de deux éléments distincts.

Exercice n° 4

Réflexivité. Soit z un élément de P. Puisque $z = \dfrac{z\cos(0) + \sin(0)}{-z\sin(0) + \cos(0)}$, il existe un réel θ tel que $z = \dfrac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}$ et donc $z\mathscr{R}z$. Ceci montre que $\mathscr{R}$ est un élément de P.

Symétrie. Soient z et z' deux éléments de P tels que $z\mathscr{R}z'$. Il existe un réel θ tel que $z' = \dfrac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}$. On en déduit que $z'(-z\sin(\theta) + \cos(\theta)) = z\cos(\theta) + \sin(\theta)$ puis que $z(\cos(\theta) + z'\sin(\theta)) = z'\cos(\theta) - \sin(\theta)$.

Supposons $\cos(\theta) + z'\sin(\theta) = 0$. On ne peut avoir $\sin(\theta) = 0$ car alors $\cos(\theta) = 0$ ce qui est absurde, les fonctions sin et cos ne s'annulant pas simultanément. Donc, $\sin(\theta) \neq 0$ puis $z' = -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et en particulier z' est un réel. Ceci est absurde car la partie imaginaire de z' n'est pas nulle et donc $\cos(\theta) + z'\sin(\theta) \neq 0$.

On peut alors écrire

$$z = \frac{z'\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + z'\sin(\theta)} = \frac{z'\cos(-\theta) + \sin(-\theta)}{-z'\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}.$$

Le réel $\theta' = -\theta$ est tel que $z = \dfrac{z'\cos(\theta') - \sin(\theta')}{-z'\sin(\theta') + \cos(\theta')}$ et donc $z'\mathscr{R}z$.

On a montré que pour tous éléments z et z' de P, si $z\mathscr{R}z'$ alors $z'\mathscr{R}z$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.

Transitivité. Soient z, z' et z'' trois éléments de P tels que $z\mathscr{R}z'$ et $z'\mathscr{R}z''$. Il existe donc des réels θ et θ' tels que $z' = \dfrac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}$ et $z'' = \dfrac{z'\cos(\theta') + \sin(\theta')}{-z'\sin(\theta') + \cos(\theta')}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
z'' = \frac{z'\cos(\theta') + \sin(\theta')}{-z'\sin(\theta') + \cos(\theta')} &= \frac{\dfrac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}\cos(\theta') + \sin(\theta')}{-\dfrac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}\sin(\theta') + \cos(\theta')} \\
&= \frac{(z\cos(\theta) + \sin(\theta))\cos(\theta') + (-z\sin(\theta) + \cos(\theta))\sin(\theta')}{-(z\cos(\theta) + \sin(\theta))\sin(\theta') + (-z\sin(\theta) + \cos(\theta))\cos(\theta')} \\
&= \frac{z(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')}{-z(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) + \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')} \\
&= \frac{z\cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta')}{-z\sin(\theta + \theta') + \cos(\theta + \theta')}.
\end{aligned}$$

Le réel $\theta'' = \theta + \theta'$ est tel que $z'' = \dfrac{z\cos(\theta') - \sin(\theta')}{-z\sin(\theta') + \cos(\theta')}$ et donc $z\mathscr{R}z''$. On a montré que pour tous éléments z, z' et z'' de P, si $z\mathscr{R}z'$ et $z'\mathscr{R}z''$, alors $z\mathscr{R}z''$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est transitive.

Finalement, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Par suite, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur P.

On peut montrer que les classes d'équivalences pour la relation $\mathscr{R}$ sont des cercles centrés sur l'axe des ordonnées.

Exercice n° 5

Réflexivité. Pour tout élément A de $\mathscr{P}(E)$, on a $A \subset A$. Par suite, la relation $\subset$ est réflexive.
Anti-symétrie. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset A$. Alors $A = B$. Par suite, la relation $\subset$ est anti-symétrique.
Transitivité. Soient A, B et C trois éléments de $\mathscr{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Alors $A \subset C$. On en déduit que la relation $\subset$ est transitive.

Finalement, la relation $\subset$ est réflexive, anti-symétrique et transitive. Par suite, la relation $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.

Si E contient au moins deux éléments distincts x et y, posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On a $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$. Donc, $\mathscr{P}(E)$ contient au moins deux éléments non comparables ou encore la relation $\subset$ est une relation d'ordre partielle.
Si E est vide ou un singleton, $\subset$ est une relation d'ordre totale sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice n° 6

1) f est dérivable et donc continue sur $I =]-\infty, 2]$, et pour $x \in]-\infty, 2[$, $f'(x) = 2x - 4 < 0$. f est ainsi continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$.

f réalise donc une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $f(]-\infty, 2]) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[= J$. On note g l'application de I dans J qui, à x associe $x^2 - 4x + 3 (= f(x))$. g est bijective et admet donc une réciproque. Déterminons g^{-1}. Soit $y \in [-1, +\infty[$ et $x \in]-\infty, 2]$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0.$$

$\Delta' = 4 - (3 - y) = y + 1 \geqslant 0$. Donc, $x = 2 + \sqrt{y+1}$ ou $x = 2 - \sqrt{y+1}$. Enfin, $x \in]-\infty, 2]$ et donc, $x = 2 - \sqrt{y+1}$. En résumé,

$$\forall x \in]-\infty, 2],\ \forall y \in [-1, +\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[,\ g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}}.$$

2) Je vous laisse vérifier que f réalise une bijection de $]-2, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[$, notée g. Soient alors $x \in]-2, +\infty[$ et $y \in]-\infty, 2[$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = 2x - 1 \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

(on a ainsi trouvé au plus une valeur pour x à savoir $x = \dfrac{2y+1}{-y+2}$, mais il n'est pas nécessaire de vérifier que cette expression est bien définie et élément de $]-2, +\infty[$ car on sait à l'avance que y admet au moins un antécédent dans $]-2, +\infty[$), et c'est donc nécessairement le bon). En résumé,

$$\forall x \in]-2, +\infty[,\ \forall y \in]-\infty, 2[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 2[,\ g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}}.$$

3) f est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et donc bijective de $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ sur

$$f\left(\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\right) = \left[f\left(-\frac{3}{2}\right), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[.$$

Notons g l'application de $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ dans $[-1,+\infty[$ qui à x associe $\sqrt{2x+3}-1$. Soient alors $x \in \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ et $y \in [-1,+\infty[$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-1 = y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-3+(y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1.$$

Comme g est une bijection, le réel x obtenu convient nécessairement. En résumé, $\forall x \in \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$, $\forall y \in [-1,+\infty[$, $y = g(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{2}+y-1$. On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}+x-1.}$$

4) f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f(x) = \dfrac{x}{1+x} < \dfrac{1+x}{1+x} = 1$. Donc, $f([0,+\infty[) \subset [0,1[$.
Pour $x \in]-\infty,0]$, $1-x > 0$ et donc $0 \geqslant f(x) = \dfrac{x}{1-x} > \dfrac{x-1}{1-x} = -1$. Donc, $f(]-\infty,0]) \subset]-1,0]$.
Finalement, $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$.

Vérifions alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $[0,+\infty[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y(1+x) \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq 1$, et positif, car $y \in [0,1[$. On a montré que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit $y \in]-1,0[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty,0[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq -1$, et strictement négatif, car $y \in]-1,0[$. On a montré que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x),$$

ce qui montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour $y \in]-1,1[$ donné, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-y}$ si $y \geqslant 0$ et $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+y}$ si $y < 0$. Dans tous les cas, on a $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.
En notant encore f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ qui à x associe $\dfrac{x}{1+|x|}$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

Exercice n° 7

1) Montrons que la restriction de f à D, notée g, est bien une application de D dans P.
Soit $z \in D$. On a $|z| < 1$ et en particulier $z \neq i$. Donc, $f(z)$ existe. De plus,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z)+\overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i}+\frac{\overline{z}-i}{\overline{z-i}}\right) = \frac{1}{2}\frac{2z\overline{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc, $f(z)$ est élément de P. g est donc une application de D dans P.

2) Montrons que g est injective. Soit $(z,z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow zz' + iz' - iz + 1 = zz' + iz - iz' + 1 \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

Donc g est injective.

3) Montrons que g est surjective. Soient $z \in D$ et $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Rightarrow z + i = zZ - iZ \Rightarrow z(Z-1) = i(Z+1) \Rightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1},$$

(ce qui montre que Z admet au plus un antécédent dans D, à savoir $z = \frac{i(Z+1)}{Z-1}$ (mais on le sait déjà car g est injective). Il reste cependant à vérifier que $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$ est défini et est effectivement dans D).

Réciproquement, le nombre $\frac{i(Z+1)}{Z-1}$ est bien défini puisque Z est dans P et donc $Z \neq 1$. De plus, puisque $\text{Re}(Z) < 0$, $\left|\frac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$ (Z étant strictement plus proche de -1 que de 1) et donc $\frac{i(Z+1)}{Z-1} \in D$. Finalement g est une bijection de D sur P, et :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

Exercice n° 8

1) Si $A = E$, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap E = X$ et donc $\varphi_A = Id_{\mathscr{P}(E)}$. Dans ce cas, φ_A est injective et surjective.

, Soit A une partie de E, distincte de E. Vérifions que φ_A n'est ni injective, ni surjective.
Puisque $A \neq E$, il existe un élément x_0 de E qui n'est pas dans A. Soient $B = \varnothing$ et $C = \{x_0\}$. On a

$$\varphi_A(B) = B \cap A = \varnothing = C \cap A = \varphi_A(C)$$

mais $B \neq C$. Donc, φ_A n'est pas injective. D'autre part, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $A \cap X$ est contenue dans A et en particulier ne peut être égale à E. Donc, E n'a pas d'antécédent par φ_A. Ceci montre que φ_A n'est pas surjective.

En résumé, si $A = E$, φ_A est injective et surjective et si $A \neq E$, φ_A n'est ni injective, ni surjective. On a donc montré que : φ_A injective $\Leftrightarrow$ φ_A surjective $\Leftrightarrow A = E$.

2) Si $A = \varnothing$, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cup \varnothing = X$ et donc $\varphi_A = Id_{\mathscr{P}(E)}$. Dans ce cas, φ_A est injective et surjective.

, Soit A une partie de E, distincte de $\varnothing$. Vérifions que φ_A n'est ni injective, ni surjective.
Puisque $A \neq \varnothing$, il existe un élément x_0 de A. Soient $B = \varnothing$ et $C = \{x_0\}$. Puisque x_0 est dans A, on a

$$\varphi_A(B) = B \cup A = A = C \cup A = \varphi_A(C)$$

mais $B \neq C$. Donc, φ_A n'est pas injective. D'autre part, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $A \cup X$ contient A et en particulier ne peut être égale à $\varnothing$. Donc, $\varnothing$ n'a pas d'antécédent par φ_A. Ceci montre que φ_A n'est pas surjective.

En résumé, si $A = \varnothing$, φ_A est injective et surjective et si $A \neq \varnothing$, φ_A n'est ni injective, ni surjective. On a donc montré que : φ_A injective $\Leftrightarrow$ φ_A surjective $\Leftrightarrow A = \varnothing$.

Exercice n° 9

1) Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective).} \end{aligned}$$

On a montré que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, et donc f est injective.

2) Soit $y \in H$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x dans E tel que $g(f(x)) = y$. En posant $z = f(x)$, z est un élément de F tel que $g(z) = y$. On a montré : $\forall y \in G,\ \exists z \in F/\ g(z) = y$, et donc g est surjective.

Exercice n° 10

• Supposons f injective. Soit x un élément de E. Par hypothèse, $f(f(x)) = f(x)$. Puisque f est injective, on en déduit que $f(x) = x$.

Ainsi, pour tout x de E, $f(x) = x$ et donc $f = Id_E$. En particulier, f est bijective et en particulier, f est surjective.

• Supposons f surjective. Soit x_1 et x_2 deux éléments de E. Puisque f est surjective, il existe deux éléments y_1 et y_2 de E tels que $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \Rightarrow f(y_1) = f(y_2) \text{ (car } f \circ f = f) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Donc, f est injective puis f est bijective. On note de nouveau que puisque f est injective, nécessairement $f = Id_E$.

Remarque. Si on sait que f est bijective, on peut écrire

$$f \circ f = f \Rightarrow f \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} \Rightarrow f = Id_E.$$

Exercice nº 11

On peut supposer sans perte de généralité que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. D'après le nº 9, puisque $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ est injective, h est injective et puisque $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ est surjective, h est surjective.
Déjà h est bijective. Mais alors, h^{-1} est surjective et donc $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ est surjective en tant que composée de surjections. Puis h^{-1} est injective et donc $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective. $f \circ g$ est donc bijective. $f \circ g$ est surjective donc f est surjective. $g \circ h \circ f$ est injective donc f est injective. Donc f est bijective. Enfin $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est bijective en tant que composée de bijections.

Exercice nº 12

1) a) • Supposons f injective.
Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $X \subset f^{-1}(f(X))$. ($x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$).
Réciproquement, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X/\ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X/\ x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalement, $f^{-1}(f(X)) \subset X$ et donc $f^{-1}(f(X)) = X$.

• Supposons que pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(X)) = X$. Soit $x \in X$. Par hypothése, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ ce qui signifie que $f(x)$ a un et un seul antécédent à savoir x. Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f et f est injective.

b) • Supposons f injective. Soit $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. On a toujours $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ ($X \cap Y \subset X \Rightarrow f(X \cap Y) \subset f(X)$ et de même, $f(X \cap Y) \subset f(Y)$ et finalement, $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$).
Réciproquement, soit $y \in F$. $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists (x, x') \in X \times Y/\ y = f(x) = f(x')$. Mais alors, puisque f est injective, $x = x' \in X \cap Y$ puis $y = f(x) \in f(X \cap Y)$. Finalement, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

• Supposons que pour tout $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$, on a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $X = \{x_1\}$ et $Y = \{x_2\}$. Par hypothèse $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ ce qui fournit

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}.$$

En particulier, $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \varnothing$ ce qui impose $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \varnothing$ puis $x_1 = x_2$. Donc f est injective.

2) • Supposons f surjective. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $f\left(f^{-1}(X)\right) \subset X$ (l'image d'un antécédent d'élément de X est dans X).
Réciproquement, soit y un élément de X. Puisque f est surjective, y a un antécédent x par f qui est par définition un élément de $f^{-1}(X)$. Mais alors, y qui est l'image de x appartient à $f\left(f^{-1}(X)\right)$. On a montré que $X \subset f\left(f^{-1}(X)\right)$ est finalement que $f\left(f^{-1}(X)\right) = X$

• Supposons que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(f^{-1}(X)\right) = X$. Soient y un élément de E puis $X = \{y\}$. Par hypothèse, $f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$. y est donc l'image d'un élément de $f^{-1}(\{y\})$ et en particulier y a un antécédent par f. On a montré que tout élément y de E a un antécédent par f dans E et donc f est surjective.

Exercice nº 13

1) Il y a l'injection triviale $f: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.

2) Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective.

Soit $A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que A a un antécédent a. Dans ce cas, où est a ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de Cantor : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice nº 14 f est bien une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ car, pour tout couple (x, y) d'entiers naturels, l'un des deux entiers $x+y$ ou $x+y+1$ est pair et donc, $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ est bien un entier naturel (on peut aussi constater que $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\ldots+(x+y)$ est entier pour $x+y \geqslant 1$).

Remarque. La numérotation de $\mathbb{N}^2$ a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	...	x	...
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

Sur une parallèle à la droite d'équation $y = -x$, la somme $x+y$ est constante. Il en est de même de l'expression $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ et quand on descend de 1 en y, on avance de 1 dans la numérotation.

Lemme. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists! p \in \mathbb{N} / \ \dfrac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)_{p \geqslant 0}$ est strictement croissante. Néanmoins, on va faire mieux et fournir explicitement p en fonction de n.

Soient n et p deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}
\frac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2 + p - 2n \leqslant 0 \text{ et } p^2 + 3p + 2 - 2n > 0 \\
&\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} = -1 + \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \\
&\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Le lemme est démontré car $E\left(\dfrac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ est un entier naturel.

Montrons que f est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier n donné).

Soient n un entier naturel et $p = E\left(\dfrac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p est un entier naturel). On pose $\left\{\begin{array}{l} x+y = p \\ y = n - \dfrac{p(p+1)}{2} \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} y = n - \dfrac{p(p+1)}{2} \\ x = p - y = \dfrac{p(p+3)}{2} - n \end{array}\right.$. Tout d'abord, $y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n - \dfrac{p(p+1)}{2} + \dfrac{p(p+1)}{2} = n$. Mais il reste encore à vérifier que x et y ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque $\dfrac{p(p+1)}{2}$ est un entier naturel et que $n \geqslant \dfrac{p(p+1)}{2}$, y est bien un entier naturel. Ensuite, $\dfrac{p(p+3)}{2} = \dfrac{p(p+1)}{2} + p$ est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2} - n \geqslant \frac{p(p+3)}{2} - \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1\right) = 0,$$

et x est bien un entier naturel. Ainsi, pour n naturel donné, en posant $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2} - n$ et $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$, x et y sont des entiers naturels tels que $f((x,y)) = n$. f est donc surjective.

Montrons que f est injective.

Pour cela, on montre que si x et y sont des entiers naturels vérifiant $y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$, alors nécessairement, $x+y = p$ (et donc $y = n - \frac{p(p+1)}{2}$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2} - n$).

Soient donc x et y deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leqslant \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + (x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que $x+y = p$. L'unicité du couple (x,y) est donc démontrée. f est une application injective et surjective et donc f est bijective. Sa réciproque est $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ n & \mapsto & \left(\frac{p(p+3)}{2}, n - \frac{p(p+1)}{2}\right) \end{array}$ où $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.

