

Planche n° 2. Raisonnement par récurrence : corrigé

Exercice n° 1

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

- Pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $2^n > n$ et montrons que $2^{n+1} > n + 1$.

$$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2(n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= n+1 + n+1 \\ &> n+1.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n.}$$

Exercice n° 2

Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 4, n! \geq n^2$.

- Pour $n = 4$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ et $4^2 = 16$. Puisque $24 > 16$, l'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 4$.
- Soit $n \geq 4$. Supposons que $n! \geq n^2$ et montrons que $(n+1)! \geq (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \times n! \\ &\geq (n+1) \times n^2 \text{ (par hypothèse de récurrence)}.\end{aligned}$$

Or, $(n+1) \times n^2 - (n+1)^2 = (n+1)(n^2 - n - 1) = (n+1)(n(n-1) - 1) \geq 5 \times (4 \times 3 - 1) = 55 \geq 0$ et donc $(n+1) \times n^2 \geq (n+1)^2$ puis $(n+1)! \geq (n+1)^2$.

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geq 4, n! \geq n^2.}$$

Exercice n° 3

Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 2, n$ est divisible par au moins un nombre premier.

- 2 est divisible par 2 qui est un nombre premier. La propriété à démontrer est donc vraie quand $n = 2$.
- Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, k est divisible par au moins un nombre premier et montrons que $n+1$ est divisible par au moins un nombre premier.

Si $n+1$ est un nombre premier, $n+1$ admet au moins un diviseur premier à savoir lui-même. Sinon, $n+1$ n'est pas premier. Dans ce cas, il existe deux entiers a et b éléments de $\llbracket 2, n \rrbracket$ tels que $n+1 = a \times b$. Par hypothèse de récurrence, l'entier a est divisible par au moins un nombre premier p . L'entier p divise l'entier a et l'entier a divise l'entier $n+1$. Donc l'entier p divise l'entier $n+1$.

Dans tous les cas, l'entier $n+1$ est divisible par au moins un nombre premier.

On a montré par récurrence que tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible par au moins un nombre premier.

Exercice n° 4

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-2)^n + 3^n$.

- $(-2)^0 + 3^0 = 2 = u_0$ et $(-2)^1 + 3^1 = 1 = u_1$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = (-2)^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}$ et montrons que $u_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}$.

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n \\ &= ((-2)^{n+1} + 3^{n+1}) + 6((-2)^n + 3^n) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-2+6) \times (-2)^{n+2} + (3+6) \times 3^n = 4 \times (-2)^{n+2} + 9 \times 3^n \\ &= (-2)^2 \times (-2)^{n+2} + 3^2 \times 3^n = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-2)^n + 3^n.$$

Exercice n° 5

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

• Pour $n = 1, \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère démonstration. Pour $k \geq 1, (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2 \sum_{k=1}^n k + n$ ou encore $2 \sum_{k=1}^n k = n^2 + n$ ou enfin $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

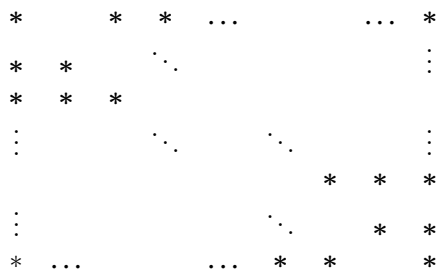
2ème démonstration. On écrit

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^n (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1).$$

3ème démonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1+2+\dots+n$ points. D'où le résultat.



4ème démonstration. Dans le triangle de PASCAL, on sait que pour n et p entiers naturels donnés, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. Donc, pour $n \geq 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1 + 2 + \dots + n = 1 + \sum_{k=2}^n C_k^1 = 1 + \sum_{k=2}^n (C_{k+1}^2 - C_k^2) = 1 + (C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Pour $k \geq 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$:

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \frac{1}{6} (2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + n),$$

et donc

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $k \geq 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$, on a

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n \right) = \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1) + 2n + 1) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1) \right) = \frac{(n+1)^2 \left((n+1)^2 - (2n+1) \right)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Pour $k \geq 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$,

$$5 \sum_{k=1}^n k^4 + 10 \sum_{k=1}^n k^3 + 10 \sum_{k=1}^n k^2 + 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{k=1}^n ((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2} n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3} n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2} n(n+1) - n \right) \\ &= \frac{1}{30} (6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1)) \\ &= \frac{1}{30} (n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}. \end{aligned}$$

Exercice n° 6

1) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

• Pour $n = 1, \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Démonstration directe. Pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

2) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

• Pour $n = 1, \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times (1+3)}{4 \times (1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Démonstration directe. Pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right),$$

et donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Exercice n° 7

Montrons par récurrence que, pour $n \geq 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais à coup sûr pas un entier).

• Pour $n = 2$, $H_2 = \frac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé.

• Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, on ait $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair.

(Recherche. L'idée $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n + q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sûr que si $(n+1)p_n + q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc si n est pair).

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{2k+1} = \frac{(2k+1)p_n + q_n}{(2k+1)q_n}$. $(2k+1)p_n$ est impair et donc $(2k+1)p_n + q_n$ est impair car q_n est pair. D'autre part, q_n est pair et donc $(2k+1)q_n$ est pair. H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n = 2k - 1$ où $k \geq 2$ (de sorte que $2k - 1 \geq 3$).

$$H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$$

(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2} H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}.$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est impair, on voit que $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est du type $\frac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2 \leq k \leq 2k - 1 = n$, par hypothèse de récurrence, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{2q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + 2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$ est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $2q_k(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est encore une fois de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout naturel $n \geq 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et en particulier n'est pas un entier.