Produit vectoriel

En SI, on définit et on utilise le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace de dimension 3. La notion de produit vectoriel ne fait pas partie du programme de mathématiques de maths sup et de maths spé. Nous donnons ici un complément hors programme sur le sujet.

Dans tout ce qui suit, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'un produit scalaire (le produit scalaire de deux vecteurs u et v sera noté $u.v$). On fixe une bonne fois pour toutes une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$. Le produit mixte de trois vecteurs u, v et w est noté $[u, v, w]$ (on rappelle que $[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$, le résultat ne dépendant pas du choix d'une base orthonormée directe).

1) Définition algébrique du produit vectoriel

On rappelle la description des formes linéaires de l'espace euclidien $(E, .)$.

Théorème 1. Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un vecteur u et un seul tel que $\forall x \in E,\ \varphi(x) = u.x$.

Soient alors u et v deux vecteurs. L'application $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien $(E, .)$. Donc, il existe un unique vecteur w tel que

$$\forall x \in E,\ [u, v, x] = w.x$$

Le vecteur w est par définition le **produit vectoriel** de u et v. Il se note $u \wedge v$. Ainsi, par définition,

$$\forall x \in E,\ [u, v, x] = (u \wedge v) .x$$

L'utilisation du mot « produit » utilisé dans l'expression « produit vectoriel » sera motivée au paragraphe suivant par le fait que l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire. L'expression « produit mixte » vient de la formule en rouge ci-dessus : le produit mixte est un « mélange » de produit vectoriel et de produit scalaire.

2) Propriétés algébriques et géométriques du produit vectoriel.

Théorème 2. Le produit vectoriel est anti-symétrique ou encore

$$\forall (u, v) \in E^2,\ v \wedge u = -u \wedge v.$$

Démonstration . Soit $(u, v) \in E^2$. Soit $x \in E$.

$$(v \wedge u).x = [v, u, x] = -[u, v, x] = -(u \wedge v).x$$

Donc, pour tout x de E, $(v \wedge u + u \wedge v).x = 0$. On en déduit que $v \wedge u + u \wedge v \in E^{\perp} = \{0\}$ puis que $v \wedge u = -u \wedge v$.

❑

Théorème 3. Le produit vectoriel est bilinéaire ou encore

$$\forall (u, v, w) \in E^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w)$$

et

$$\forall (u, v, w) \in E^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ u \wedge (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w)$$

Démonstration . On démontre la linéarité par rapport à la première variable.

Soient $(u, v, w) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}((\lambda u + \mu v) \wedge w).x &= [\lambda u + \mu v, w, x] = \lambda[u, w, x] + \mu[v, w, x] = \lambda(u \wedge w).x + \mu(v \wedge w).x \\ &= (\lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w)).x\end{aligned}$$

Comme dans la démonstration précédente, $(\lambda u + \mu v) \wedge w - (\lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w)) \in E^{\perp}$ puis $(\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + \mu(v \wedge w)$.

La linéarité du produit vectoriel par rapport à la deuxième variable découle alors de sa linéarité par rapport à la première variable et de son anti-symétrie.

❑

Théorème 4. $\forall (u,v) \in E^2$, $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow (u,v)$ liée. $\forall (u,v) \in E^2$, $u \wedge v \neq 0 \Leftrightarrow (u,v)$ libre.

Démonstration . Soit $(u,v) \in E^2$.

Si (u,v) est liée, alors pour tout $x \in E$, (u,v,x) est liée en tant que sur-famille d'une famille liée puis, pour tout $x \in E$,

$$(u \wedge v).x = [u,v,x] = 0$$

Donc, $u \wedge v \in E^{\perp} = \{0\}$ puis $u \wedge v = 0$.

Si (u,v) est libre, il existe $x_0 \in E$ tel que (u,v,x_0) soit une base de E. Mais alors,

$$(u \wedge v).x_0 = [u,v,x_0] \neq 0$$

et en particulier, $u \wedge v \neq 0$.

❏

Théorème 5. $\forall (u,v) \in E^2$, $[u,v,u \wedge v] = \|u \wedge v\|^2$

Démonstration . Pour tout vecteur x de E, $[u,v,x] = (u \wedge v).x$ et en particulier,

$$[u,v,u \wedge v] = (u \wedge v).(u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2.$$

❏

Théorème 6. Soit $(u,v) \in E^2$ tel que (u,v) soit une famille libre de E. Alors, $(u,v,u \wedge v)$ est une base de directe de E.

Démonstration . Soit $(u,v) \in E^2$ tel que (u,v) soit une famille libre de E. D'après les théorèmes 4 et 5,

$$[u,v,u \wedge v] = \|u \wedge v\|^2 > 0$$

et donc $(u,v,u \wedge v)$ est une base de directe de E. ❏

Théorème 7. $\forall (u,v) \in E^2$, $u \wedge v \in (u,v)^{\perp}$.

Démonstration . Soit $(u,v) \in E^2$. La famille (u,v,u) est liée et donc $(u \wedge v).u = [u,v,u] = 0$. De même, $(u \wedge v).v = 0$. Ainsi, $u \wedge v \in u^{\perp}$ et $u \wedge v \in v^{\perp}$ puis $u \wedge v \in (u,v)^{\perp}$. ❏

⇨ **Commentaire** . *Donc, si (u,v) est une famille libre, $u \wedge v$ est un vecteur normal au plan Vect(u,v).*

Théorème 8. Soit (u,v) une famille orthonormée de E. Alors, $(u,v,u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.

Démonstration . Soit (u,v) une famille orthonormée de E. On sait déjà que $u \wedge v$ est orthogonal à u et v et que $(u,v,u \wedge v)$ est une base directe de E. Il ne reste plus à vérifier que $\|u \wedge v\| = 1$.

Il existe un vecteur w et un seul tel que (u,v,w) soit une base orthonormée directe de E. Le vecteur $u \wedge v$ est dans $(u,v)^{\perp} = \text{Vect}(w)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u \wedge v = \lambda w$. Mais alors,

$$\lambda = \lambda(w.w) = (\lambda w).w = (u \wedge v).w = [u,v,w] = 1$$

(déterminant de la base orthonormée directe (u,v,w) dans la base orthonormée directe (i,j,k)). On en déduit que $u \wedge v = w$ puis que $(u,v,u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E.

❏

Ainsi, si (u,v) est une famille orthonormée, $u \wedge v$ est l'**unique** vecteur w de l'espace tel que la famille (u,v,w) soit une base orthonormée directe de l'espace. Donc,

Théorème 9. $i \wedge j = -j \wedge i = k$, $j \wedge k = -k \wedge j = i$ et $k \wedge i = -i \wedge k = j$.

Démonstration . Les familles (i,j,k), (j,k,i) et (k,i,j) sont des bases orthonormées directes. Donc, $i \wedge j = k$, $j \wedge k = i$ et $k \wedge i = j$. Les trois autres égalités en découlent par anti-symétrie.

❏

Théorème 10. (coordonnées du produit vectoriel dans la base orthonormée directe (i, j, k))

Si u a pour coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ et v a pour coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{B}$, alors les coordonnées de $u \wedge v$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right).$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Démonstration .

1 ère démonstration. Par bilinéarité du produit vectoriel,

$$\begin{aligned} u \wedge v &= (xi + yj + zk) \wedge (x'i + y'j + z'k) \\ &= xx'(i \wedge i) + xy'(i \wedge j) + xz'(i \wedge k) + yx'(j \wedge i) + yy'(j \wedge j) + yz'(j \wedge k) + zx'(k \wedge i) + zy'(k \wedge j) + zz'(k \wedge k) \\ &= 0 + xy'k - xz'j - yx'k + 0 + yz'i + zx'j - zy'i + 0 = (yz' - zy')i - (xz' - zx')j + (xy' - yx')k \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} k. \end{aligned}$$

2 ème démonstration. Notons (α, β, γ) les coordonnées de $u \wedge v$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout vecteur w de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma c = (u \wedge v).w = [u, v, w] &= \begin{vmatrix} x & x' & a \\ y & y' & b \\ z & z' & c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} c \text{ (en développant suivant la troisième colonne).} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha a + \beta b + \gamma c = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} c.$$

En évaluant les deux membres en chacun des trois triplets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, on obtient $\alpha = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $\beta = - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $\gamma = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

❏

Les coordonnées du produit vectoriel de u et v dans la base $\mathcal{B}$ sont donc effectivement **les cofacteurs** des coefficients de la troisième colonne dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & x' & \bullet \\ y & y' & \bullet \\ z & z' & \bullet \end{vmatrix}.$$

On peut aussi écrire formellement (le déterminant qui suit n'a aucun sens car i, j et k sont des vecteurs) :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x & x' & i \\ y & y' & j \\ z & z' & k \end{vmatrix}.$$

Théorème 11. (norme du produit vectoriel)

Si u et v sont orthogonaux, alors $\|u \wedge v\| = \|u\| \times \|v\|$.
Plus généralement, si u et v sont tous les deux non nuls, $\|u \wedge v\| = \|u\| \times \|v\| \times \sin(\widehat{u, v})$ où $(\widehat{u, v})$ désigne l'angle géométrique (non orienté) entre u et v.

Démonstration . Si $u = 0$ ou $v = 0$, $\|u\| \times \|v\| = 0 = \|u \wedge v\|$. Si $u \neq 0$, $v \neq 0$ et si u et v sont orthogonaux, la famille $\left(\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, \left(\frac{1}{\|u\|}u\right) \wedge \left(\frac{1}{\|v\|}v\right)\right)$ est une base orthonormée directe de l'espace. Donc,

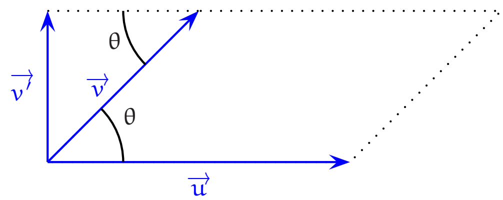
$$\left[\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, \left(\frac{1}{\|u\|}u\right) \wedge \left(\frac{1}{\|v\|}v\right)\right] = 1.$$

Par trilinéarité, $\left[\frac{1}{\|u\|}u, \frac{1}{\|v\|}v, \left(\frac{1}{\|u\|}u\right) \wedge \left(\frac{1}{\|v\|}v\right)\right] = \frac{[u, v, u \wedge v]}{\|u\|^2\|v\|^2}$ puis

$$\|u \wedge v\|^2 = [u, v, u \wedge v] = \|u\|^2\|v\|^2.$$

Finalement, si u et v sont orthogonaux, $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$.

Supposons maintenant, u et v tous deux non nuls et quelconques. Si (u, v) est liée, $\sin(u, v) = 0$ puis $\|u\|\times\|v\|\times\sin(\widehat{u, v}) = 0 = \|u \wedge v\|$. Si (u, v) est libre, posons $\theta = (\widehat{u, v})$ (θ est un réel élément de $[0, \pi]$). Notons v' le projeté orthogonal de v sur $u^\perp$ dans le plan $\text{Vect}(u, v)$.



$u \wedge v = u \wedge v' + u \wedge (v - v') = u \wedge v'$ car $v - v'$ est colinéaire à u puis, u et v' étant orthogonaux,

$$\|u \wedge v\| = \|u \wedge v'\| = \|u\| \times \|v'\| = \|u\| \times \|v\| \times \sin\theta.$$

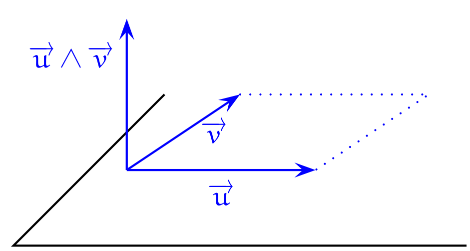
❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *On note que,* u *et* v *ayant une norme donnée, la norme de* $u \wedge v$ *est maximum quand* u *et* v *sont orthogonaux et minimum quand* u *et* v *sont colinéaires.*

◇ *Au passage, on a vu que* $u \wedge v = u \wedge v'$ *où* v' *est le projeté orthogonal de* v *sur* $u^\perp$ *dans Vect*(u, v) *alors que* $u.v = u.v''$ *où* v'' *est le projeté orthogonal de* v *sur* u *dans Vect*(u, v)*. Le produit scalaire élimine ce qui est orthogonal pour garder ce qui est colinéaire alors que le produit vectoriel élimine ce qui est colinéaire pour garder ce qui est orthogonal.*

Ainsi, quand (u, v) est une famille libre, $u \wedge v$ est le vecteur orthogonal à u et v, de norme l'aire du parallélogramme bâti sur u et v et tel que la famille $(u, v, u \wedge v)$ soit directe. On dit souvent que le produit vectoriel de deux vecteurs « est une aire orientée ».



Théorème 12. (aire d'un parallélogramme ou d'un triangle en dimension 3)

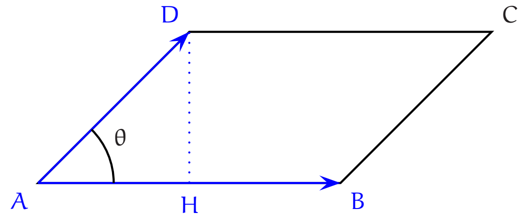
Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire de ce parallélogramme est :

$$\text{aire de } ABCD = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|.$$

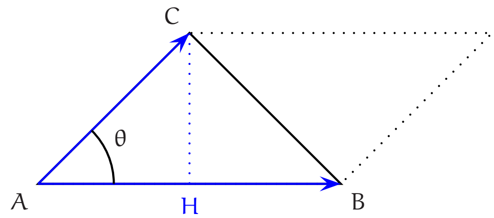
Soit ABC un triangle. L'aire de ce triangle est :

$$\text{aire de } ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Démonstration . aire de $ABCD = AB \times AH = AB \times AD \times \sin\theta = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$.



Ensuite, comme d'habitude, l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme.



❑

Par exemple, si $A(3,0,-1)$, $B(0,2,2)$ et $C(1,1,5)$, alors

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\\1\end{pmatrix},$$

puis

$$\text{aire de } ABC=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+12^2+1^2}=\frac{\sqrt{226}}{2}.$$

On rappelle maintenant un résultat du chapitre « Produits scalaires. Espaces euclidiens » :

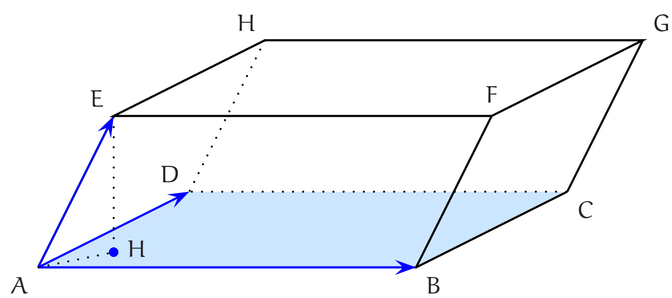
Théorème 13. (volume d'un parallélépipède)

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède. Son volume est :

$$\text{volume de } ABCDEFGH=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]\right|=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|.$$

On peut le redémontrer :

Démonstration . volume de $ABCDEFGH$ = aire de $ABCD\times AH=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|\times AH=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AH}\right|=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$.



❑

Théorème 14. (identité de Lagrange)

$\forall(u,v)\in E^2$, $(u.v)^2+\|u\wedge v\|^2=\|u\|^2\|v\|^2$.

Démonstration . En posant $\theta=(\widehat{u,v})$,

$$(u.v)^2+\|u\wedge v\|^2=\|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta+\|u\|^2\|v\|^2\sin^2\theta=\|u\|^2\|v\|^2.$$

❑

Théorème 15. (formule du double produit vectoriel)

Soit $(u, v, w) \in E^3$.

$u \wedge (v \wedge w) = (u.w)v - (u.v)w$.
$(u \wedge v) \wedge w = (u.w)v - (v.w)u$.

Démonstration. Si $v = 0$, alors $u \wedge (v \wedge w) = 0 = (u.w)v - (u.v)w$. De même, si $w = 0$. Si $v \neq 0$, $w \neq 0$ et (v, w) liée, alors il existe un réel λ tel que $w = \lambda v$. Dans ce cas, $(u.w)v - (u.v)w = \lambda(u.v)v - \lambda(u.v)v = 0 = u \wedge (v \wedge w)$.

Dorénavant, on suppose que les vecteurs v et w sont fixés tels que la famille (v, w) est libre. Soient (e_1, e_2) l'orthonormalisée de (v, w) puis $e_3 = e_1 \wedge e_2$ de sorte que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de E.
Les vecteurs v, w et u s'écrivent respectivement sous la forme $v = ae_1$, $w = b_1e_1 + b_2e_2$ et $u = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$.

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) &= (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) \wedge (ae_1 \wedge (b_1e_1 + b_2e_2)) = (c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) \wedge (ab_2e_3) \\ &= ab_2c_2e_1 - ab_2c_1e_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (u.w)v - (u.v)w = (b_1c_1 + b_2c_2)\, ae_1 - (ac_1)\,(b_1e_1 + b_2e_2) = \\ = ab_2c_2e_1 - ab_2c_1e_2. \end{aligned}$$

Donc, $u \wedge (v \wedge w) = (u.w)v - (u.v)w$.

Ensuite, $(u \wedge v) \wedge w = -w \wedge (u \wedge v) = -((w.v)u - (w.u)v) = (u.w)v - (v.w)u$.

❏

On notera que le produit vectoriel n'est pas associatif.

On peut encore établir de très nombreuses formules sur le produit vectoriel mais nous nous arrêterons là.