Développement décimal d'un réel

1) Les nombres décimaux

Définition 1. Un nombre réel x est un nombre décimal si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $10^n \times x$ soit un entier relatif. L'ensemble des nombres décimaux se note $\mathbb{D}$.

On a donc

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{p}{10^n},\ (p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}.$$

Par exemple $\frac{5}{4} = 1,25$ est décimal car $100 \times \frac{5}{4} = 125$ est entier.

Théorème 1. Soient p et q deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux et soit $r = \frac{p}{q}$.
r est décimal si et seulement si q est de la forme $2^a 5^b$ où a et b sont deux entiers naturels.

Démonstration .

$$\begin{aligned}
r \text{ est décimal} &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ 10^n \times r \in \mathbb{N}\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ q \text{ divise } 10^n \times p\\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ q \text{ divise } 10^n \text{ (d'après le théorème de Gauss, car } p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux)}\\
&\Leftrightarrow q = 1 \text{ ou bien } q \geqslant 2 \text{ et les facteurs premiers de } q \text{ sont dans } \{2;5\}\\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2/\ q = 2^a 5^b.
\end{aligned}$$

❑

Ainsi, $\frac{7}{20}$ ou $\frac{4}{25}$ sont décimaux mais $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{75}$ ne le sont pas.
Les ensembles de nombres usuels sont

$$\mathbb{N} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Z} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{D} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}.$$

2) Développement décimal d'un réel.

a) Rappel.

On sait que les réels peuvent être approchés d'aussi près qu'on le désire par les nombres décimaux ($\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$) :

Soit x un réel quelconque. Pour n entier naturel donné, soient $a_n = E(10^n x) \in \mathbb{Z}$ puis $d_n = \frac{a_n}{10^n} \in \mathbb{D}$. Alors, $a_n \leqslant 10^n x < a_n + 1$ puis, après division des membres de cet encadrement par le réel strictement positif 10^n,

$$d_n \leqslant x < d_n + \frac{1}{10^n}.$$

d_n est une valeur décimale approchée de x à 10^n près.

b) Développement décimal d'un réel.

On veut améliorer le travail précédent. On veut obtenir tout réel comme somme d'une série dont les sommes partielles sont les nombres décimaux précédents.

Soit x un réel quelconque fixé dans tout ce qui suit.
On pose, pour n entier naturel non nul donné, $a_n = E(10^n x)$ puis $x_n = \frac{a_n}{10^n}$ puis $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$.
Enfin, on pose $c_0 = a_0$ (c_0 est la partie entière de x et est un entier relatif) puis, pour n entier naturel non nul, $c_n = a_n - 10a_{n-1}$ (pour n supérieur ou égal à 1, les c_n seront les chiffres du développement décimal de x).

Théorème 2.

1) $(\forall n \in \mathbb{N})$, $x_n \leqslant x < y_n$;
2) les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x ;
3) c_0 est entier relatif et pour $n \geqslant 1$, c_n est élément de $[\![0, 9]\!]$.
4) Pour tout entier naturel n, $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k}$.
5) L'ensemble des n tels que $c_n \neq 9$ est infini.

Remarque. x_n et y_n sont, par définition, des valeurs décimales approchées de x par défaut et par excès respectivement à 10^{-n} près.

Démonstration .

1) $a_n = E(10^n x) \Leftrightarrow a_n \leqslant 10^n x < a_n + 1 \Leftrightarrow x_n \leqslant x < y_n$.

2) $y_n - x_n = \dfrac{1}{10^n} > 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$.
De plus , $10a_n = 10E(10^n x) \leqslant 10 \times 10^n x = 10^{n+1} x < 10\,(E(10^n x) + 1) = 10a_n + 10$.
En particulier $10a_n$ est un entier inférieur ou égal à $10^{n+1}x$ et donc $10a_n \leqslant E\left(10^{n+1}x\right) = a_{n+1}$.
De même, $10a_n + 10$ est un entier strictement plus grand que $10^{n+1}x$ et donc $10a_n + 10 \geqslant 1 + E\left(10^{n+1}x\right) = 1 + a_{n+1}$.
En résumé, $10a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 10^{n+1}x < a_{n+1} + 1 \leqslant 10a_n + 10$ et après division par 10^{n+1}, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x < y_{n+1} \leqslant y_n$$

avec $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$. Donc, les suites (x_n) et (y_n) sont bien adjacentes de limite x.

3) c_0 est un entier relatif . Soit n un entier naturel non nul. a_{n-1} et a_n sont entiers relatifs. Donc, c_n est un entier relatif. De plus, $10a_{n-1} \leqslant a_n < 10a_{n-1} + 10$ et donc $0 \leqslant a_n - 10a_{n-1} = c_n < 10$.

On a montré que pour $n > 0$, c_n est élément de $[\![0, 9]\!]$.

4) On a $x_0 = a_0 = c_0$ et pour $n > 0$,

$$\begin{aligned} x_n = \frac{a_n}{10^n} &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{10^k} - \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - 10a_{k-1}}{10^k} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{10^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{10^k}. \end{aligned}$$

5) Supposons par l'absurde que (dans la construction précédente), il existe un entier naturel m tel que pour $n \geqslant m$, on ait $c_n = 9$. Alors, pour $n > m$, on a

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{m+1}} \times \frac{1 - \dfrac{1}{10^{n-m}}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{9}{10^{m+1}} \left(1 - \frac{1}{10^{n-m}}\right).$$

Quand n tend vers l'infini (m étant fixé), on obtient $x - x_m = \dfrac{1}{10^m}$ et donc $x = y_m$ pour un certain m contredisant $x < y_n$ pour tout entier n.
Donc $\{n \in \mathbb{N} / \ c_n \neq 9\}$ est infini ou encore les décimales ne sont pas toutes égales à 9 à partir d'un certain rang. ❏

**Résumé. Soit x un réel. Soient $c_0 = E(x)$ et, pour $n \geqslant 1$, $c_n = E(10^n x) - 10E\left(10^{n-1}x\right)$.
Alors $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n}$. On écrit $x = c_0, c_1c_2\ldots$ Une telle écriture s'appelle un développement décimal illimité de x** (même si toutes les décimales sont nulles ou plus généralement nulles à partir d'un certain rang).

On s'intéresse maintenant à l'unicité d'un tel développement.

Définition 1. On appelle développement décimal propre d'un réel x tout développement décimal ne comportant pas que des 9 à partir d'un certain rang. Le développement est dit impropre dans le cas contraire.

D'après ce qui précède,

Théorème 3. Tout réel admet au moins un développement décimal propre.

On va maintenant démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. Soit x un réel quelconque.

1) x admet un unique développement décimal (nécessairement propre) si et seulement si x n'est pas un nombre décimal non nul.

2) Tout nombre décimal non nul admet deux développement décimaux distincts, l'un propre et l'autre impropre.

Lemme. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles vérifiant

$$1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n \text{ et } 2)\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_m < b_m.$$

Alors, si les séries de termes généraux respectifs a_n, $n \in \mathbb{N}$, et b_n, $n \in \mathbb{N}$ convergent et ont pour sommes respectives des réels A et B, on a $A < B$.

Démonstration du lemme. Pour $n \geqslant m$, $B_n - A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) \geqslant b_m - a_m > 0$ et quand n tend vers l'infini, on obtient $B - A \geqslant b_m - a_m > 0$. ❑

On démontre maintenant le théorème 4.

Démonstration . Soit x un réel admettant deux développements décimaux distincts $x = c_0, c_1c_2\ldots = c'_0, c'_1c'_2\ldots$ où les suites (c_n) et (c'_n) sont distinctes, telles que c_0 et c'_0 soient entiers relatifs et c_n et c'_n soient éléments de $[\![0, 9]\!]$ pour $n \geqslant 1$.
Soit $m = \text{Min}\{n \in \mathbb{N}/\ c_n \neq c'_n\}$. Supposons par exemple que $c'_m < c_m$.
Pour $n > m$, on a $x_n - x'_n = \dfrac{c_m - c'_m}{10^m} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}\dfrac{c_k - c'_k}{10^k}$.
Mais les suites (x_n) et (x'_n) convergent vers x. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(x_n - x'_n) = 0$ et donc

$$\frac{1}{10^m} \leqslant \frac{c_m - c'_m}{10^m} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{c'_k - c_k}{10^k}$$

(car $c_m - c'_m \geqslant 1$). Mais d'autre part

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{c'_k - c_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}\frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{m+1}} \times \frac{1 - \dfrac{1}{10^{n-m}}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^m},$$

et donc, quand n tend vers l'infini, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{c'_k - c_k}{10^k} \leqslant \frac{1}{10^m}$.

Finalement, $\dfrac{c_m - c'_m}{10^m} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{c'_k - c_k}{10^k} = \frac{1}{10^m}$.
Donc $c_m - c'_m = 1$ (c'est-à-dire que, à la première décimale qui diffère, il y a 1 d'écart entre les deux décimales) puis, puisque pour tout $n \geqslant m+1$ on a $c'_n - c_n \leqslant 9$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{c'_k - c_k}{10^k} = \frac{1}{10^m} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{9}{10^k}$, on en déduit d'après le lemme que

pour $n \geqslant m+1$, $c'_n - c_n = 9$ et donc que $c'_n = 9$ et $c_n = 0$ (et en particulier x est nécessairement décimal).

On vient déjà de montrer que tout nombre réel non décimal admet un et un seul développement décimal (propre) et que tout nombre décimal admet un unique développement décimal propre.
Maintenant, si x est un décimal non nul, x admet une écriture de la forme $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{c_k}{10^k}$ où c_m est non nul mais puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^m}$, on a aussi $x = c_0, c_1 \ldots c_{m-1}(c_m - 1)9999\ldots$ ❑

Par exemple $0,9999\ldots = 1$ ou $0,324 = 0,32399999\ldots$ ou $0,41 = 0,409999\ldots$

3) Cas des rationnels.

Théorème 5. Soit x un réel. x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

« Démonstration ».

$\Leftarrow$ /. x est rationnel si et seulement si $x - E(x)$ est rationnel (ce qui ramène l'étude aux réels de $[0, 1[$).

Posons $x = 0, d_1 ... d_m c_1 ... c_p c_1 ... c_p c_1 ... c_p \ldots$. x est rationnel si et seulement si $10^m x - E(10^m x)$ est rationnel ce qui ramène à montrer que $y = 0, c_1 \ldots c_p c_1 \ldots c_p \ldots$ est rationnel.

$10^p y = c_1 \ldots c_p + 0, c_1 \ldots c_p c_1 \ldots c_p \ldots = N + y$ où N est un entier et donc $y = \dfrac{N}{10^p - 1}$ est un rationnel (p est supérieur ou égal à 1 puisque (c_k) est périodique et donc $10^p - 1 \neq 0$).

Par exemple , soit $x = 3, 1415151515\ldots$ Alors $x = \dfrac{1}{100}(314 + y)$ où $y = 0, 1515\ldots$ vérifie $100y = 15, 1515... = 15 + y$ et donc $y = \dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$.
Finalement, $x = \dfrac{1}{100}\left(314 + \dfrac{15}{33}\right) = \dfrac{10367}{3300}$.
$\Rightarrow$ /. Si x est un rationnel positif, on pose la division du numérateur p par le dénominateur q, division que l'on poursuit après la virgule. A chaque étape de la division, il n'y a que q restes possibles, l'un des nombres 0, 1,..., $q - 1$ et après au plus $q + 1$ étapes, on aura obtenu deux restes égaux (principe des tiroirs). La même séquence de décimales recommence alors.

On peut noter que la périodicité n'a aucune raison de s'installer à partir de la première décimale mais elle s'instaure nécessairement avant la q-ème décimale et la période est inférieure ou égale à q.

On doit aussi avoir conscience que les parties décimales de $\sqrt{2}$ ou π ou e ne sont pas périodiques à partir d'un certain rang.