Systèmes d'équations linéaires

Plan du chapitre

1 Les différentes présentations d'un système d'équations linéaires . . . . . **page 1**
- **1.1** Présentation classique . . . . . page 2
- **1.2** Ecriture matricielle d'un système . . . . . page 2
- **1.3** Présentation en colonnes . . . . . page 2
- **1.4** Avec une application linéaire . . . . . page 2

2 Systèmes de Cramer . . . . . **page 3**

3 Résolution d'un système. Structure de l'ensemble des solutions . . . . . **page 4**
- **3.1** Structure de l'ensemble des solutions . . . . . page 3
- **3.2** Résolution d'un système : cas des systèmes homogènes . . . . . page 4
- **3.3** Résolution d'un système : cas général . . . . . page 5

4 La méthode du pivot de Gauss . . . . . **page 5**

1 Les différentes présentations d'un système d'équations linéaires

1.1 Présentation classique

On se donne $n \times p$ nombres $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$, puis p nombres b_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. On considère le système d'équations

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_p \end{array}\right.,$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. (S) est un système de p **équations linéaires à n inconnues** (les nombres x_1, ..., x_n). On peut aussi ne considérer qu'il n'y a qu'une inconnue, le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$.

Le système est dit **homogène** si et seulement si $b_1 = \ldots = b_p = 0$. Le système homogène associé au système (S) est

$$(S_h) \quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = 0 \end{array}\right..$$

Résoudre le système (S), c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant (S). Jusqu'à la fin du chapitre, on notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_h$) l'ensemble des solutions su système (S) (resp. (S_h)).

Le système (S) est dit **compatible** si et seulement si $\mathcal{S} \neq \varnothing$. On note qu'un système homogène est toujours compatible car le n-uplet $(0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène.

1.2 Ecriture matricielle d'un système

Soit $A \in (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![p]\!] \times [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. A est la **matrice du système** (S). Soient $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ puis $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit matriciellement

$$(S) \quad AX = B.$$

Le vecteur colonne B est le **second membre du système** (S). Le rang de A est le **rang du système** (S). On dit dans ce cas que le système est un système (n, p, r) (n inconnues, p équations, de rang r).

Si $B \in \text{Im}(A)$, alors (S) est compatible et si $B \notin \text{Im}(A)$, alors (S) n'est pas compatible.

Si de plus A est une matrice carrée (systèmes ayant autant d'équations que d'inconnues), le **déterminant du système** (S) est le déterminant de A.

1.3 Présentation en colonnes

On note C_1, ..., C_n les colonnes de la matrices A. Donc, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le système (S) s'écrit alors

$$(S) \quad \sum_{j=1}^{n} x_j C_j = B.$$

Si $B \in \text{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, alors (S) est compatible et si $B \notin \text{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, alors (S) n'est pas compatible.

1.4 Avec une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectivement notées n et p respectivement. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de E et une base de F respectivement.

Soit f l'élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$. Soient $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ et $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e'_i \in F$. Le système (S) s'écrit

$$(S) \quad f(x) = b.$$

L'inconnue x est alors un élément de E. Le système (S) est compatible si et seulement si $b \in \text{Im}(f)$.

2 Systèmes de Cramer

Définition 1. Un système (n, p, r) est dit **de Cramer** (on dit aussi **cramérien**) si et seulement si $n = p = r$.

Un résultat immédiat est

Théorème 1. (S) est un système de Cramer $\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(S) \neq 0$.

Théorème 2. Un système de Cramer admet une et une seule solution. En particulier, un système de Cramer homogène admet une et une seule solution à savoir la solution nulle $(0, \dots, 0)$.

Démonstration . Notons A la matrice du système (S). Puisque $n = p$, A est une matrice carrée. Puisque $r = n$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Mais alors, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de la solution.

❏

Dans le théorème qui suit, on note $C_1, \dots, C_n$, les colonnes de la matrice A.

Théorème 2. (formules de Cramer)

Soit $(S) : AX = B$ un système de Cramer à n équations. Soit $X_0 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'unique solution du système (S). Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

où $\Delta = \det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$ est le déterminant du système (S) et pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\Delta_i = \det(C_1 \dots C_{i-1}\ B\ C_{i+1} \dots C_n).$$

Démonstration . (S) est un système de Cramer. Donc, Δ est non nul.

Par définition de X_0, $B = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\Delta_i = \det\left(C_1 \dots C_{i-1}\ \sum_{j=1}^{n} x_j C_j\ C_{i+1} \dots C_n\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1 \dots C_{i-1}\ C_j\ C_{i+1} \dots C_n).$$

Dans cet somme, si $j = i$, le terme s'écrit $x_i \det(C_1 \dots C_{i-1}\ C_i\ C_{i+1} \dots C_n) = x_i\Delta$. Si $j \neq i$, le déterminant $\det(C_1 \dots C_{i-1}\ C_j\ C_{i+1} \dots C_n)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales (les i-ème et j-ème). Il reste $\Delta_i = x_i\Delta$ et donc, puisque $\Delta \neq 0$,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

❏

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $(S) : \left\{\begin{array}{l} x + y + z = j^2 \\ x + jy + j^2z = j \\ x + j^2y + jz = 1 \end{array}\right.$ où $j = e^{2i\pi/3}$.

Solution 1. Le déterminant du système (S) est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \text{Van}\left(1, j, j^2\right) = (j-1)\left(j^2-1\right)\left(j^2-j\right) = \left(1 - j - j^2 + 1\right)\left(j^2 - j\right) = 3\left(j^2 - j\right) \neq 0.$$

Le système (S) est un système de Cramer et admet donc un et un seul triplet solution (x, y, z). Les formules de Cramer fournissent

- $\Delta x = \begin{vmatrix} j^2 & 1 & 1 \\ j & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = j^2\left(j^2 - j^4\right) - j\left(j - j^2\right) + \left(j^2 - j\right) = \left(j^2 - j\right)\left(j^2 + j + 1\right) = 0$ et donc $x = 0$.
- $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & j^2 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & j \end{vmatrix} = 1\left(j^2 - j^2\right) - (1 - 1) + \left(j^4 - j\right) = 0$ et donc $y = 0$.

• $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & j^2 \\ 1 & j & j \\ 1 & j^2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(j-1) - (1-j) + (j-1) = 3(j-1)$ et donc $z = \dfrac{3(j-1)}{3\,(j^2-j)} = \dfrac{1}{j} = j^2$.

Donc, $\mathcal{S} = \left\{\left(0, 0, j^2\right)\right\}$ (ce qui était clair dès le départ).

---

3 Résolution d'un système. Structure de l'ensemble des solutions

3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 3. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \,,(\mathbb{K})$. Soient (S) le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et (S_h) le système homogène associé $AX = 0$. On suppose de plus que le rang de A (ou de (S) ou de (S_h)) est r.

1) L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (S_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de dimension $n-r$ (nombre d'inconnues moins rang).

2) L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de direction $\mathcal{S}_h$ ou encore si $\mathcal{S}$ n'est pas vide, la solution générale de (S) est somme d'une solution particulière de (S) et de la solution générale de (S_h).

Démonstration .

1) L'application $\begin{array}{cccc} a : & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \mapsto & AX \end{array}$ est linéaire. Puisque $\mathcal{S}_h = \mathrm{Ker}(a)$, $\mathcal{S}_h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. De plus, d'après le théorème du rang,

$$\dim\left(\mathcal{S}_h\right) = \dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right) - \mathrm{rg}(a) = n - r.$$

2) Supposons $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Soit X_0 une solution particulière de (S). Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A\,(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \mathcal{S}_h \Leftrightarrow X \in X_0 + \mathcal{S}_h$$

et donc $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_h$.

❏

⇨ **Commentaire** . *Le 2) du théorème précédent est en fait déjà connu. Ce résultat a été établi dans un cadre plus général, à la fin du chapitre « Espaces vectoriels », paragraphe 7.4.*

3.2 Résolution d'un système : cas des systèmes homogènes

Soit $(S_h) : AX = 0$ un système (n, p, r). Il existe r lignes de A notées L_{i_1}, ..., L_{i_r}, telles que $(L_{i_1}, \ldots, L_{i_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(L_1, \ldots, L_p)$. Ces lignes correspondent à des équation (E_{i_1}), ..., (E_{i_r}) que l'on appelle **équations principales**. Les autre équations sont appelées **équations non principales**. Il n'y a pas unicité du choix des équations principales et des équations non principales.

Toute ligne de A est combinaison linéaire des lignes L_{i_1}, ..., L_{i_r}. Soit A' la matrice format (r, n) dont les lignes sont L_{i_1}, ..., L_{i_r}. Alors $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A')$ car $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A')$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = r = \dim(\mathrm{Ker}(A'))$. L'égalité $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A')$, exprimée en terme d'équations linéaires, s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} (E_1) \\ \vdots (E_p) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (E_{i_1}) \\ \vdots (E_{i_r}) \end{array}\right.$$

ou encore, le système (S) est équivalent au système des r équations principales (on a supprimé les équations non principales).

Le nouveau système $(S') : A'X = 0$ (qui a le même ensemble de solutions que (S)) est toujours de rang r. Il existe r colonnes de A' notées C_{j_1}, ..., C_{j_r} telles que $(C_{j_1}, \ldots, C_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}\,(C_1, \ldots, C_n)$ (où C_1, ..., C_n sont les colonnes de A'). Ces colonnes correspondent à des inconnues x_{j_1}, ..., x_{j_r}, appelées **inconnues principales**. Les autres inconnues sont appelées **inconnues non principales**. Il n'y a pas unicité de ce choix.

On passe en second membre du système $A'X = 0$ tout ce qui n'est pas inconnue principale et on obtient un système du type $A''X' = B$ où A'' est une matrice carrée de format r et de rang r, X' est le vecteur colonne à r lignes dont les composantes sont les inconnues principales et B un vecteur colonne à r composantes, toutes combinaisons linéaires des inconnues non principales.

La matrice A'' est inversible et le système $A''X' = B$ est donc un système de Cramer en les inconnues principales avec les inconnues non principales pour paramètres.

En résumé, la résolution de $AX = 0$ s'effectue comme suit
- on choisit r équations principales et on supprime les équations non principales,
- on résout le système obtenu comme un système de Cramer en les inconnues principales en exprimant, grâce aux formules de Cramer, les inconnues principales en fonction des inconnues non principales.

Exemple. Considérons le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 3x - y + z - 4t = 0 \\ 6x - 2y + z - 8t = 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Ce système est de rang 2. La matrice extraite $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul et n'est donc pas inversible. On ne peut pas prendre x et y pour inconnues principales. Par contre, la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à -3. On peut donc prendre x et z pour inconnues principales. De même, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à 1 et on peut prendre y et z pour inconnues principales. On fait ce choix car un déterminant égal à 1 est préférable à un déterminant égal à -3. On évite ainsi de compliquer les expressions avec des fractions de dénominateur 3.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} 3x - y + z - 4t = 0 \\ 6x - 2y + z - 8t = 0 \end{array}\right. & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -y + z = -3x + 4t \\ -2y + z = -6x + 8t \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow y = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -3x + 4t & 1 \\ -6x + 8t & 1 \end{vmatrix} \text{ et } z = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} -1 & -3x + 4t \\ -2 & -6x + 8t \end{vmatrix} \\
& \Leftrightarrow y = 3x - 4t \text{ et } z = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{(x, 3x - 4t, 0, t)\ (x, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$. ❏

3.3 Résolution d'un système : cas général

Le principe est le même, à la nuance près que un système du type $AX = B$, non homogène, peut ne pas être compatible. Dans le cas où ce système est compatible, la système est équivalent à un système d'équations principales obtenu en supprimant les équations non principales que l'on résout comme un système de Cramer en les inconnues principales. On exprime alors les inconnues principales en fonction des inconnues non principales. Notons que le programme officiel de classes préparatoires ne fournit aucun outil pour savoir à l'avance si un système est compatible ou pas. Dans la pratique, dans le cas où le système n'est pas un sytème de Cramer, on le résout par substitution ou par toute autre méthode usuelle.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m - 5)z = 7 \end{array}\right.,$$

où m est un paramètre réel.

Solution 2. Soit $m \in \mathbb{R}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
\det(S) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m - 5 \end{vmatrix} \\
&= 2(m(m - 5) - 6) + (3(m - 5) - 3) + 7(6 - m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m - 1)(m - 6).
\end{aligned}$$

Le système est de Cramer si et seulement si $m \notin \{1, 6\}$.

- Si $m \notin \{1, 6\}$, les formules de Cramer fournissent :

$$x = \frac{1}{2(m - 1)(m - 6)}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m - 5 \end{vmatrix} = \frac{4(m^2 - 5m - 6) - 5(3m - 18) - 7(m - 6)}{2(m - 1)(m - 6)} = \frac{2(m - 6)(2m - 9)}{2(m - 1)(m - 6)} = \frac{2m - 9}{m - 1}$$

$$y = \frac{1}{2(m - 1)(m - 6)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m - 5 \end{vmatrix} = \frac{2(5m - 39) + (4m - 27) + 21}{2(m - 1)(m - 6)} = \frac{14(m - 6)}{2(m - 1)(m - 6)} = \frac{7}{m - 1}$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{2(7m-15)+9+7(-4m+15)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

Si $m \notin \{1, 6\}$, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2m-9}{m-1}, \frac{7}{m-1}, -\frac{7}{m-1}\right)\right\}$.

• Si $m \in \{1, 6\}$, $\det(S) = 0$. Puisque $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, on peut choisir les deux premières équations comme équations principales et x et z comme inconnues principales. Le système des deux premières équations s'écrit $\left\{\begin{array}{l} 2x+z = 4-3y \\ -x+2z = 5-my \end{array}\right.$ et équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3+(m-6)y}{5} \\ z = \dfrac{14-(2m+3)y}{5} \end{array}\right.$.

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en y disparaissent si $m \in \{1, 6\}$ car dans le cas contraire le système serait de Cramer ce qui n'est pas).

$$\begin{aligned} 7x+3y+(m-5)z = 7 &\Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5} + 3y + (m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21 + 14(m-5) = 35 \\ &\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, le système n'a pas de solution et si $m = 6$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{5}, y, \frac{14-15y}{5}\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

4 La méthode du pivot de Gauss