

# Déterminants

## Plan du chapitre

<b>1</b>	<b>Déterminant d'une famille de <math>n</math> vecteurs dans une base</b>	<b>page 2</b>
1.1	Formes $p$ -linéaires	page 3
1.2	Formes $p$ -linéaires alternées, formes $p$ -linéaires anti-symétriques.	page 3
1.3	Formes $n$ -linéaires alternées sur un espace de dimension $n$ . Déterminant d'une famille de $n$ vecteurs dans une base	page 3
1.4	Changement de base	page 7
1.5	Critère d'indépendance d'une famille de $n$ vecteurs en dimension $n$	page 7
<b>2</b>	<b>Déterminant d'une matrice carrée</b>	<b>page 7</b>
2.1	Définitions et notations	page 7
2.2	Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	page 9
2.3	Propriétés du déterminant d'une matrice carrée	page 9
<b>3</b>	<b>Déterminant d'un endomorphisme</b>	<b>page 11</b>
3.1	Définition	page 11
3.2	Propriétés du déterminant d'un endomorphisme	page 11
<b>4</b>	<b>Calculs de déterminants</b>	<b>page 11</b>
4.1	Déterminant d'une matrice triangulaire	page 12
4.2	Transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes	page 12
4.3	Déterminants par blocs	page 14
4.4	Développement suivant une ligne ou une colonne	page 15
4.4.1	Mineurs, cofacteurs	page 15
4.4.2	La formule de développement suivant une ligne ou une colonne	page 16
<b>6</b>	<b>Quelques applications des déterminants</b>	<b>page 19</b>
6.1	Inversibilité d'une matrice carrée, bijectivité d'un endomorphisme, indépendance d'une famille de $n$ vecteurs	page 19
6.2	Inverse d'une matrice carrée	page 20
6.3	Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel	page 22
6.4	Calculs d'aires et de volumes	page 23

# 1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

## 1.1 Formes p-linéaires

**DÉFINITION 1.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $p$  un entier naturel non nul. Une **forme p-linéaire sur  $E$**  est une application de  $E^p$  dans  $\mathbb{K}$  qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Plus explicitement, soit  $f : E^p \rightarrow \mathbb{K}$ .  $f$  est une forme p-linéaire sur  $E$  si et seulement si

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f((x_1, \dots, x_p))$$

$\forall (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application  $E \rightarrow \mathbb{K}$  est linéaire.

$$x_i \mapsto f((a_1, \dots, x_i, \dots, a_p))$$

Un exemple fondamental d'expression p-linéaire est un produit de p réels. Le produit de deux réels c'est-à-dire l'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}$ . Le produit de trois réels c'est-à-dire l'application  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme trilinéaire sur  $\mathbb{R} \dots$

$$(x, y) \mapsto x \times y \quad (x, y, z) \mapsto x \times y \times z$$

Analysons le cas  $p = 2$ . Soit  $f : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$  une forme bilinéaire sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . La bilinéarité de  $f$  se traduit explicitement par :

- $\forall (x, x', y) \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2, f((\lambda x + \lambda' x', y)) = \lambda f((x, y)) + \lambda' f((x', y))$
- et
- $\forall (x, y, y') \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2, f((x, \lambda y + \lambda' y')) = \lambda f((x, y)) + \lambda' f((x, y'))$ .

Par exemple, le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^2$   $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Si  $f : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme bilinéaire et que l'on fait agir les deux linéarités successivement, cela donne

$$(x, y) \mapsto f((x, y))$$

$$\begin{aligned} f((\lambda x + \lambda' x', \mu y + \mu' y')) &= \lambda f((x, \mu y + \mu' y')) + \lambda' f((x', \mu y + \mu' y')) \\ &= \lambda \mu f((x, y)) + \lambda \mu' f((x, y')) + \lambda' \mu f((x', y)) + \lambda' \mu' f((x', y')). \end{aligned}$$

En développant, on obtient quatre termes.

Analysons le cas  $p = 3$ . Soit  $f : E^3 \rightarrow \mathbb{K}$  une forme trilinéaire sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . La trilinearité de  $f$  se traduit explicitement par :

$$(x, y, z) \mapsto f((x, y, z))$$

- $\forall (x_1, x_2, y, z) \in E^4, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, f((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y, z)) = \lambda_1 f((x_1, y, z)) + \lambda_2 f((x_2, y, z))$
- et
- $\forall (x, y_1, y_2, z) \in E^4, \forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2, f((x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, z)) = \mu_1 f((x, y_1, z)) + \mu_2 f((x, y_2, z))$
- et
- $\forall (x, y, z_1, z_2) \in E^4, \forall (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{K}^2, f((x, y, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) = \nu_1 f((x, y, z_1)) + \nu_2 f((x, y, z_2))$ .

Si on fait agir les trois linéarités successivement, cela donne

$$\begin{aligned} f((\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) &= \lambda_1 f((x_1, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) + \lambda_2 f((x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) \\ &= \lambda_1 \mu_1 f((x_1, y_1, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) + \lambda_1 \mu_2 f((x_1, y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 f((x_2, y_1, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) + \lambda_2 \mu_2 f((x_2, y_2, \nu_1 z_1 + \nu_2 z_2)) \\ &= \lambda_1 \mu_1 \nu_1 f((x_1, y_1, z_1)) + \lambda_1 \mu_1 \nu_2 f((x_1, y_1, z_2)) \\ &\quad + \lambda_1 \mu_2 \nu_1 f((x_1, y_2, z_1)) + \lambda_1 \mu_2 \nu_2 f((x_1, y_2, z_2)) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_1 \nu_1 f((x_2, y_1, z_1)) + \lambda_2 \mu_1 \nu_2 f((x_2, y_1, z_2)) \\ &\quad + \lambda_2 \mu_2 \nu_1 f((x_2, y_2, z_1)) + \lambda_2 \mu_2 \nu_2 f((x_2, y_2, z_2)). \end{aligned}$$

On obtient une somme de  $2 \times 2 \times 2 = 8$  termes

## 1.2 Formes p-linéaires alternées, formes p-linéaires anti-symétriques

**DÉFINITION 2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $p \geq 2$  puis  $f$  une forme  $p$ -linéaire sur  $E$ .

$f$  est **anti-symétrique** si et seulement si pour tout  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  et pour toute transposition  $\tau = \tau_{i,j}$  où  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  et  $i \neq j$ ,

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \dots, x_p).$$

Cette dernière égalité s'écrit plus explicitement (mais moins précisément)

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p).$$

On analyse maintenant l'effet d'une permutation quelconque des indices. On sait que toute permutation est un produit de transpositions et donc ;

**Théorème 1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $p \geq 2$  puis  $f$  une forme  $p$ -linéaire sur  $E$ .  $f$  est anti-symétrique si et seulement si pour tout  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  et pour toute permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p).$$

**DÉMONSTRATION .** Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_p$ . On sait qu'il existe des transpositions  $\tau_1, \dots, \tau_k, k \geq 1$ , telles que  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ . Pour  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ , on a alors

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= f(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(p)}) \\ &= (-1)^k f(x_1, \dots, x_p) \text{ (par récurrence sur } k) \\ &= \varepsilon(\sigma)f(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

La réciproque est immédiate. □

**DÉFINITION 3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $p \geq 2$  puis  $f$  une forme  $p$ -linéaire sur  $E$ .

$f$  est **alternée** si et seulement si pour tout  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ , si il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$  et  $x_i = x_j$ , alors  $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ .

**Théorème 2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $p \geq 2$  puis  $f$  une forme  $p$ -linéaire sur  $E$ .

$f$  est anti-symétrique si et seulement si  $f$  est alternée.

**DÉMONSTRATION .**

- Supposons  $f$  alternée. Soient  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  puis  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i < j$ .

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p). \end{aligned}$$

et donc  $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p)$ . Ceci montre que  $f$  est anti-symétrique.

- Supposons  $f$  anti-symétrique. Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ . On suppose qu'il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i < j$  et  $x_i = x_j$ . Alors,

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p),$$

et donc  $2f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$  puis  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) = 0$ . Ceci montre que  $f$  est alternée. □

## 1.3 Formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

On analyse maintenant le cas particulier des formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace de dimension  $n$ . Si vous vous sentez dépassés par les pages de calculs qui suivent, vous pouvez aller directement à l'intitulé du théorème 3 et à la définition 4,

page 6. Le but de ce qui suit est de dégager petit à petit l'expression du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

On se donne  $E$  un espace de dimension  $n$  puis  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On se donne ensuite  $f$  une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on peut poser

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i,$$

(de sorte que la matrice de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Il s'agit alors de calculer

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i\right),$$

en tenant compte du fait que  $f$  est  $n$ -linéaire, alternée et donc aussi anti-symétrique.

Pour appréhender cette expression pénible, commençons par le cas  $n = 2$  (cas des formes bilinéaires alternées sur un espace de dimension 2).

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\ &= a_{1,1}a_{1,2}f(e_1, e_1) + a_{1,1}a_{2,2}f(e_1, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}f(e_2, e_1) + a_{2,1}a_{2,2}f(e_2, e_2) \quad (\text{bilinéarité}) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}f(e_1, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}f(e_2, e_1) \quad (f \text{ alternée}) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}f(e_1, e_2) - a_{2,1}a_{1,2}f(e_1, e_2) \quad (f \text{ anti-symétrique}) \\ &= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})f(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Analysons de même le cas  $n = 3$  (cas des formes trilinéaires alternées sur un espace de dimension 3). Le développement contient  $3 \times 3 \times 3 = 27$  termes puis 21 de ces termes disparaissent car  $f$  est alternée. A la dernière étape du calcul intervient l'anti-symétrie de  $f$ .

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + a_{3,1}e_3, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{3,2}e_3, a_{1,3}e_1 + a_{2,3}e_2 + a_{3,3}e_3) \\ &= a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}f(e_1, e_1, e_1) + a_{1,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_1, e_1, e_2) + a_{1,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_1, e_1, e_3) \\ &\quad + a_{1,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_1, e_2, e_1) + a_{1,1}a_{2,2}a_{2,3}f(e_1, e_2, e_2) + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_1, e_2, e_3) \\ &\quad + a_{1,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_1, e_3, e_1) + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_1, e_3, e_2) + a_{1,1}a_{3,2}a_{3,3}f(e_1, e_3, e_3) \\ &\quad + a_{2,1}a_{1,2}a_{1,3}f(e_2, e_1, e_1) + a_{2,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_2, e_1, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_2, e_1, e_3) \\ &\quad + a_{2,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_2, e_2, e_1) + a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}f(e_2, e_2, e_2) + a_{2,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_2, e_2, e_3) \\ &\quad + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_2, e_3, e_1) + a_{2,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_2, e_3, e_2) + a_{2,1}a_{3,2}a_{3,3}f(e_2, e_3, e_3) \\ &\quad + a_{3,1}a_{1,2}a_{1,3}f(e_3, e_1, e_1) + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_3, e_1, e_2) + a_{3,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_3, e_1, e_3) \\ &\quad + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_3, e_2, e_1) + a_{3,1}a_{2,2}a_{2,3}f(e_3, e_2, e_2) + a_{3,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_3, e_2, e_3) \\ &\quad + a_{3,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_3, e_3, e_1) + a_{3,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_3, e_3, e_2) + a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}f(e_3, e_3, e_3) \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}f(e_1, e_2, e_3) + a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}f(e_1, e_3, e_2) + a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}f(e_2, e_1, e_3) \\ &\quad + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}f(e_2, e_3, e_1) + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}f(e_3, e_1, e_2) + a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}f(e_3, e_2, e_1) \\ &= (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3})f(e_1, e_2, e_3). \end{aligned}$$

Passons au cas général où  $n$  est quelconque. Quand on développe l'expression  $f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i\right)$  par  $n$ -linéarité, on obtient une somme de  $\underbrace{n \times \dots \times n}_{n \text{ facteurs}} = n^n$  termes. Chaque terme est du type

$$a_{i_1,1}a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}),$$

ou encore du type

$$a_{\chi(1),1}a_{\chi(2),2} \dots a_{\chi(n),n} f(e_{\chi(1)}, \dots, e_{\chi(n)}),$$

où  $\chi$  est une application quelconque de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même. On peut donc écrire

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_i\right) = \sum_{\chi \in \llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}} a_{\chi(1),1}a_{\chi(2),2} \dots a_{\chi(n),n} f(e_{\chi(1)}, \dots, e_{\chi(n)}).$$

Dans cette somme, puisque  $f$  est alternée, les termes pour lesquels  $\chi$  n'est pas une application injective (auquel cas, il existe  $i \neq j$  tel que  $e_{\chi(i)} = e_{\chi(j)}$ ) disparaissent. Les termes qui n'ont pas disparu sont ceux pour lesquels  $\chi$  est une application injective de  $[[1, n]]$  dans lui-même. On admet (ceci sera démontré dans le chapitre « Dénombrements ») qu'une application injective de  $[[1, n]]$  dans lui-même est automatiquement bijective ou encore qu'une application injective de  $[[1, n]]$  dans lui-même est une permutation de  $[[1, n]]$ . Il reste

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}\right) f(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , posons  $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$ .

On vient de démontrer que si  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ ,

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} / f = \lambda \Delta.$$

Vérifions maintenant que  $\Delta$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ .

- $\Delta$  est une application de  $E^n$  dans  $\mathbb{K}$ .
- Avec des notations évidentes,

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \dots, \alpha x_j + \beta x'_j, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots \left(\alpha a_{\sigma(j),j} + \beta a'_{\sigma(j),j}\right) \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} + \beta \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a'_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \alpha \Delta(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \beta \Delta(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_n). \end{aligned}$$

$\Delta$  est donc effectivement linéaire par rapport à chacune de ses  $n$  variables ou encore  $\Delta$  est une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ .

- Vérifions que  $\Delta$  est alternée. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  tel qu'il existe  $(i, j) \in [[1, n]]^2$  tel que  $i < j$  et  $x_i = x_j$ . Soit  $\tau = \tau_{i,j}$  la transposition qui échange les numéros  $i$  et  $j$ . On a vu dans le chapitre précédent (« Le groupe symétrique ») que les permutations  $\sigma$  sont de deux types
  - les permutations paires de signature 1, l'ensemble des permutations paires étant noté  $\mathcal{A}_n$ ,
  - les permutations impaires de signature  $-1$ , l'ensemble des permutations impaires étant obtenu en composant à droite chaque permutation paire par la transposition fixée  $\tau$ .

Ceci fournit

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(\tau(1)),1} \dots a_{\sigma(\tau(i)),i} \dots a_{\sigma(\tau(j)),j} \dots a_{\sigma(\tau(n)),n} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \Delta(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\
 &\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(j),i} \dots a_{\sigma(i),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\
 &\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),j} \dots a_{\sigma(j),i} \dots a_{\sigma(n),n} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \\
 &\quad - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } x_i = x_j) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\Delta$  est une forme alternée. Il est alors immédiat que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda\Delta$  est encore une forme  $n$ -linéaire alternée.

En résumé, pour toute application  $f$  de  $E^n$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f = \lambda\Delta$ .

Montrons enfin que  $\Delta$  n'est pas nulle. Pour cela, calculons  $\Delta(e_1, \dots, e_n)$ . Dans ce cas, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a  $a_{i,j} = \delta_{i,j}$  (la  $i$ -ème coordonnée de  $e_j$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est  $\delta_{i,j}$ ) ou encore  $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(e_1, \dots, e_n) = I_n$ . Donc

$$\Delta(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \delta_{\sigma(2),2} \dots \delta_{\sigma(n),n}.$$

Dans cette somme de  $n!$  termes, si  $\sigma$  est une permutation telle qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma(i) \neq i$ , alors le produit  $\delta_{\sigma(1),1} \delta_{\sigma(2),2} \dots \delta_{\sigma(n),n}$  est nul. Il ne reste que le terme où  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sigma(i) = i$  ou encore il ne reste que le terme correspondant à  $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ . Donc,

$$\Delta(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) \delta_{1,1} \delta_{2,2} \dots \delta_{n,n} = 1.$$

Ceci montre que  $\Delta$  n'est pas nulle. Enfin, Si  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée non nulle, il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f = \lambda\Delta$  puis

$$f(e_1, \dots, e_n) = 1 \Leftrightarrow \lambda\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Leftrightarrow f = \Delta.$$

On peut énoncer le théorème fondamental puis définir la forme déterminant dans la base  $\mathcal{B}$  :

**Théorème 3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base fixée de  $E$ .

- Il existe une et une seule forme  $n$ -linéaire alternée  $\Delta$  sur  $E$  vérifiant  $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$ .  
De plus, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ , alors

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

- L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est  $\{\lambda\Delta, \lambda \in \mathbb{K}\}$  ou encore l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1, de base  $(\Delta)$ .
- Pour toute  $f$ , forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ , on a

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \Delta.$$

**DÉFINITION 4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base fixée de  $E$ .

L'unique forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  prenant la valeur 1 en la base  $\mathcal{B}$  s'appelle la **forme déterminant dans la base  $\mathcal{B}$**  et se note  $\det_{\mathcal{B}}$ .

De plus, pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , si on pose  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Quand  $n = 2$  ( $E$  est de dimension 2), si  $\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ , alors

$$\det_{(e_1, e_2)}(x_1, x_2) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

Quand  $n = 3$  ( $E$  est de dimension 3), si  $\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ , alors

$$\det_{(e_1, e_2, e_3)}(x_1, x_2, x_3) = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}.$$

## 1.4 Changement de base

**Théorème 4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

ou encore

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

**DÉMONSTRATION.**  $\det_{\mathcal{B}'}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . D'après le théorème 3, il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ . En évaluant les deux membres de cette égalité en  $\mathcal{B}$ , on obtient  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$  et donc  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ .  $\square$

$\Rightarrow$  **Commentaire.** *Il est important de noter que quand on change de base, le déterminant d'une famille de vecteurs peut changer.*

Une conséquence importante du théorème 4 est

**Théorème 5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$$

et en particulier,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0.$$

**DÉMONSTRATION.** D'après le théorème 4,  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ . En évaluant les deux membres de cette égalité en  $\mathcal{B}'$ , on obtient  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$ .  $\square$

## 1.5 Critère d'indépendance d'une famille de $n$ vecteurs en dimension $n$

La première utilisation des déterminants est fournie par le théorème suivant. Quand on saura calculer des déterminants dans quelques paragraphes, on aura un outil très performant pour établir qu'une famille de  $n$  vecteurs est ou n'est pas une base de  $E$  :

**Théorème 6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

**DÉMONSTRATION.** Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une certaine base  $\mathcal{B}'$  de  $E$ , le théorème 5 montre que  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  n'est pas une base de  $E$ , alors la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée (puisque  $E$  est de dimension  $n$ ). Donc, il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $x_j$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Posons  $x_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \lambda_i x_i$ . Alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left( x_1, \dots, \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \lambda_i x_i, \dots, x_n \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \lambda_i \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (\text{linéarité par rapport au } j\text{-ème vecteur}) \\ &= 0 \quad (\det_{\mathcal{B}} \text{ est alternée}). \end{aligned}$$

□

## 2 Déterminant d'une matrice carrée

### 2.1 Définitions et notations

**DÉFINITION 5.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Le **déterminant** de la matrice  $A$ , noté  $\det(A)$ , est le déterminant de la famille des colonnes de  $A$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Plus explicitement,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$  se note  $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ .

Quand  $n = 2$ ,  $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

De manière générale,  $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$  est une somme de  $n!$  termes (2 termes si  $n = 2$ , 6 termes si  $n = 3$ , 24 termes si  $n = 4$ , ...).  $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$  est obtenu de la façon suivante : on effectue le produit d'un coefficient de la première colonne, d'un coefficient de la deuxième colonne ... et d'un coefficient de la dernière colonne, ces coefficients appartenant à des lignes deux à deux distinctes ou encore  $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$  est un produit de  $n$  facteurs choisis de sorte que l'on ait exactement un coefficient par ligne et par colonne. On fait alors précéder ce terme d'un signe  $+$  ou  $-$  suivant la parité de la permutation  $\sigma$  utilisée.

Quand  $n = 3$ ,  $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$  est une somme de 6 termes. Trois de ces termes sont précédés d'un signe  $+$  et trois d'un signe  $-$ .

- Si  $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1,3 \rrbracket}$ , le terme correspondant est  $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3}$ .
- Si  $\sigma$  est le cycle  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , le terme correspondant est  $a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3}$ .
- Si  $\sigma$  est le cycle  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , le terme correspondant est  $a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3}$ .
- Si  $\sigma = \tau_{1,2}$ , le terme correspondant est  $-a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3}$ .
- Si  $\sigma = \tau_{1,3}$ , le terme correspondant est  $-a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3}$ .
- Si  $\sigma = \tau_{2,3}$ , le terme correspondant est  $-a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3}$ .

$$\text{Donc, } \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3} + a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3}.$$

On peut signaler une méthode, dite méthode de SARRUS, permettant de faire le tri entre ces différents termes. Nous signalons la méthode car elle fait partie de la culture générale des classes préparatoires en maths mais cette méthode s'avère être sans intérêt au bout du compte et nous ne l'utiliserons jamais.



La méthode de SARRUS peut être présentée de différentes manières. Les trois termes affectés d'un + peuvent être repérés de manière géométrique dans le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Ce sont les trois termes « parallèles à la diagonale principale » :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Les trois autres termes, précédés d'un signe -, sont les termes « parallèles à l'autre diagonale » :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Ce « parallélisme » peut être présenté d'une autre façon. On écrit les coefficients du déterminant précédent et on complète le tableau obtenu par deux lignes supplémentaires où on a recopié les deux premières lignes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ + & & & & & & - \\ & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & & & \\ + & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & & - \\ & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & & \\ & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & & & \\ & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

## 2.2 Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Le théorème suivant est immédiat :

**Théorème 7.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle  $n$  puis  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soient  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  puis  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ . Alors,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(A).$$

**Théorème 8.** Pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

**DÉMONSTRATION.** En notant  $C_1, \dots, C_n$ , les colonnes de  $A$  et  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det_{(E_1, \dots, E_n)}(C_1, \dots, C_n) \neq 0 \Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

□

## 2.3 Propriétés du déterminant d'une matrice carrée

On s'intéresse au comportement du déterminant avec différentes opérations :  $\times$ ,  $\cdot$ ,  $+$  et la transposition.

**Théorème 9.** Pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\det({}^t A) = \det(A).$$

**DÉMONSTRATION.** Posons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  puis  ${}^t A = (a'_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  où  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a'_{i,j} = a_{j,i}$ .

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Analysons un terme  $\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$  de cette somme. En posant  $\sigma(1) = j_1, \dots, \sigma(n) = j_n$  de sorte que  $\sigma^{-1}(j_1) = 1, \dots, \sigma^{-1}(j_n) = n$ , on peut écrire  $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(j_1),j_1} \dots a_{\sigma^{-1}(j_n),j_n}$ .

En réordonnant ce dernier produit par ordre croissant des numéros de colonnes (et en tenant compte du fait que  $\{j_1, \dots, j_n\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = \{1, \dots, n\}$ ), on obtient  $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n}$ . Enfin, on rappelle que  $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$  et on a donc

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n}.$$

Maintenant, l'application  $\begin{matrix} \mathcal{S}_n & \rightarrow & \mathcal{S}_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma^{-1} \end{matrix}$  est bijective car involutive et donc, en posant  $\sigma' = \sigma^{-1}$ ,

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} = \det(A).$$

□

Le déterminant se comporte très bien aussi avec la multiplication des matrices :

**Théorème 10.**

- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ .
- $\det(I_n) = 1$ .
- $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = (\det(A))^p$  et  $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \forall p \in \mathbb{Z}, \det(A^p) = (\det(A))^p$ .

**DÉMONSTRATION .**

• Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ . Si A ou B n'est pas inversible,  $\text{Min}\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\} < n$  puis  $\text{rg}(AB) \leq \text{Min}\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\} < n$  et donc AB n'est pas inversible. Dans ce cas,

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B).$$

Supposons maintenant A et B inversibles. Soient  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  puis  $\mathcal{B}'$  la base de  $\mathbb{K}^n$  telle que  $A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  puis  $\mathcal{B}''$  la base de  $\mathbb{K}^n$  telle que  $B = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$ . Alors  $AB = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$  puis, d'après le théorème 4,

$$\det(AB) = \det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = \det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) \det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}) = \det(A)\det(B).$$

• Si  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,  $I_n = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  puis

$$\det(I_n) = \det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1.$$

• Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors,

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

• Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Par récurrence,  $\forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) = (\det(A))^p$ . Si de plus A est inversible, pour p entier naturel strictement négatif,

$$\det(A^p) = \det((A^{-p})^{-1}) = (\det(A^{-p}))^{-1} = ((\det A)^{-p})^{-1} = (\det A)^p.$$

□

On en déduit en particulier :

**Théorème 11.** Deux matrices semblables ont même déterminant.

**DÉMONSTRATION .** Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ . On suppose qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ . Alors

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \frac{1}{\det(P)} \det(A) \det(P) = \det(A).$$

□

Pour les deux dernières opérations, + et ., les calculs se passent moins bien. Déjà, en général,  $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$  (alors que  $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$ ). Par exemple,  $\det(2I_2) = 4 \neq 2 = 2\det(I_2)$ . Mais :

**Théorème 12.**  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

**DÉMONSTRATION.** On note  $C_1, \dots, C_n$ , les colonnes de  $A$  et  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Par  $n$ -linéarité,

$$\det(\lambda A) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda C_1, \dots, \lambda C_n) = \lambda \times \dots \times \lambda \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n) = \lambda^n \det(A).$$

□

Il reste à préciser le comportement du déterminant avec l'addition des matrices. Dans la plupart des cas,  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ . Par exemple, au format 2,  $\det(E_{1,1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$  et  $\det(E_{2,2}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$  mais

$$\det(E_{1,1} + E_{2,2}) = \det(I_2) = 1 \neq \det(E_{1,1}) + \det(E_{2,2}).$$

En fait, aucun résultat agréable ne peut être énoncé concernant le déterminant d'une somme de matrices. On peut démontrer que, si  $n \geq 2$ , il existe une et une seule matrice carrée  $A$  telle que pour toute matrice carrée  $B$ ,  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$  à savoir  $A = 0$ .

## 3 Déterminant d'un endomorphisme

### 3.1 Définition

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle puis  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Soient  $A$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  et  $B$  la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ . On sait que les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables ( $B = P^{-1}AP$  où  $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ) et donc  $A$  et  $B$  ont le même déterminant d'après le théorème 11. Ceci motive la définition suivante :

**DÉFINITION 6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

Le **déterminant** de  $f$  est le déterminant de sa matrice dans une base donnée  $\mathcal{B}$  de  $E$  ou encore le nombre  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  où  $\mathcal{B}$  est une base donnée de  $E$ . Ce nombre ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ .

### 3.2 Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Les propriétés usuelles du déterminant d'un endomorphisme se déduisent alors immédiatement des propriétés du déterminant d'une matrice carrée (théorème 10, 11 et 12) :

**Théorème 13.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), (f \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0).$$

**Théorème 14.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

- $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2, \det(g \circ f) = \det(f) \times \det(g)$ .
- $\det(\text{Id}_E) = 1$ .
- $\forall f \in \text{GL}(E), \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ .

**Théorème 15.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f).$$

## 4 Calculs de déterminants

Dans ce paragraphe, on apprend les différentes techniques de calcul d'un déterminant (qui se rajoutent à la possibilité d'utiliser l'expression développée de  $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ ). On commence par un type de déterminants de référence, les déterminants triangulaires.

## 4.1 Déterminant d'une matrice triangulaire

**Théorème 16.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux. En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Supposons  $A$  triangulaire supérieure. Alors, pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , si  $i > j$ , on a  $a_{i,j} = 0$ .

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \quad (*)$$

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . S'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma(i) > i$ , alors  $a_{\sigma(i),i} = 0$  puis  $\varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = 0$ . Dans la somme ci-dessus, ne persistent donc que les termes pour les quels  $\sigma$  vérifie :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) \leq i$ .

Soit donc  $\sigma$  un élément de  $\mathcal{S}_n$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \leq k$ . Montrons alors par récurrence finie que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) = k$ .

- $\sigma(1) \leq 1$  et  $\sigma(1) \geq 1$ . Donc,  $\sigma(1) = 1$ .
- Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  (si  $n = 1$ , il n'y a plus rien à faire). Supposons que  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \sigma(i) = i$ . Alors,  $\sigma(k+1) \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$  mais,  $\sigma$  devant être injective,  $\sigma(k+1) \notin \llbracket 1, k \rrbracket$ . Donc,  $\sigma(k+1) = k+1$ .

Le résultat est démontré par récurrence.

Ainsi, dans la somme (\*), seul un terme persiste, le terme correspondant à  $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$  et donc

$$\det(A) = \varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) a_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}(1),1} \dots a_{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}(n),n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

Si  $A$  est triangulaire inférieure, on applique l'égalité  $\det(A) = \det({}^t A)$  où  ${}^t A$  est triangulaire supérieure. □

En particulier,

**Théorème 17.** Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

## 4.2 Transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes

On étudie l'effet de différentes transformations des lignes ou des colonnes d'un déterminant sur la valeur de ce déterminant.

- Permutation des colonnes (ou des lignes) d'un déterminant. Puisque  $\det$  est une forme  $n$ -linéaire anti-symétrique des colonnes de la matrice, on a

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \det \begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & \dots & C_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

et

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \det \begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma) \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Par exemple,  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times 2 \times 1 = -6$ .

- Si  $i \neq j$ ,  $\det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_i & \dots & C_j & \dots & C_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_i & \dots & C_j + C_i & \dots & C_n \end{pmatrix}$

et de même,  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ .

En effet, par linéarité par rapport à la  $j$ -ème colonne,

$$\begin{aligned} \det ( C_1 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_j + C_i \quad \dots \quad C_n ) &= \det ( C_1 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_n ) \\ &+ \det ( C_1 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_n ) \\ &= \det ( C_1 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_n ) \end{aligned}$$

(puisque  $\det$  est alternée, le déterminant  $\det ( C_1 \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_i \quad \dots \quad C_n )$  est nul car deux de ses colonnes sont égales).

Par exemple, en appliquant les transformations  $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ ,  $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$  et  $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$ , on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

• La linéarité par rapport à une colonne fournit aussi  $\det ( C_1 \quad \dots \quad \lambda C_j \quad \dots \quad C_n ) = \lambda \det ( C_1 \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_n )$

et de même pour une ligne  $\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ .

Ces transformations fournissent de nouvelles idées pour calculer des déterminants. On utilise ces transformations pour essayer le ramener le calcul d'un déterminant à celui d'un déterminant triangulaire. Par exemple :

**Exercice 1.** Calculer le déterminant de format  $n \geq 2$  :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Solution 1.** On applique les transformations :  $\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $C_j \leftarrow C_j - C_1$ . Ces transformations ne modifient pas la valeur de  $\Delta_n$  et on obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

$\Rightarrow$  **Commentaire.** Dans l'exercice, on a effectué **en même temps** plusieurs transformations élémentaires sur les colonnes. On a doit avoir conscience qu'après chaque transformation effectuée une ancienne colonne a disparu et une nouvelle colonne est apparue. L'**ordre** dans lequel on effectue ces transformations peut donc avoir de l'importance. Ce n'était pas le cas dans l'exercice 1 car la colonne  $C_1$  n'était jamais modifiée. Effectuer la transformation  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$  puis  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$  aboutit au même résultat que si on effectue la transformation  $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$  puis  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ . Le problème se posera par contre dans l'exercice suivant.

**Exercice 2.** Calculer le déterminant de format  $n \geq 2$  :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Solution 2.** On effectue successivement les transformations  $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ , puis  $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$  puis  $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ , ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

⇒ **Commentaire.** Dans l'exercice 2, l'ordre dans lequel on effectue les transformations est essentiel. Si on effectue les transformations  $C_1 \leftarrow C_2 - C_1$  puis  $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ , on aboutit au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & n-2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Mais si on effectue les transformations  $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$  puis  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ , la colonne  $C_2$  dont il est question dans la deuxième transformation n'est plus la colonne 2 initiale. On aboutit au déterminant

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & 1 & n-2 & & 2 & 1 \\ & n-3 & 1 & n-2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et ce n'est pas ce que l'on voulait.

### 4.3 Déterminants par blocs

**Théorème 18.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls tels que  $p < n$ . Soit  $A$  l'élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  défini par blocs par

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

où  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ .

Alors,  $\det(A) = \det(B) \times \det(D)$ .

**DÉMONSTRATION.** Fixons les matrices  $C$  et  $D$ . On note  $X_1, \dots, X_p$  les colonnes de la matrice  $B$  ou encore on pose

$$B = (X_1 \ \dots \ X_p). \text{ On considère l'application } \varphi : (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p \rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_p) \mapsto \det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}.$$

• Soient  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  puis  $(X_1, \dots, X_j, X'_j, \dots, X_p) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^{p+1}$  et soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Soit  $B$  (resp.  $B'$ ,  $B''$ ) l'élément de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont  $X_1, \dots, X_j, \dots, X_p$  (resp.  $X_1, \dots, X'_j, \dots, X_p$  et  $X_1, \dots, \lambda X_j + \mu X'_j, \dots, X_p$ ). La  $j$ -ème colonne de la matrice  $\begin{pmatrix} B'' & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$  est

$$\begin{pmatrix} \lambda X_j + \mu \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_j \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} X'_j \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix}.$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la  $j$ -ème colonne, on a donc

$$\varphi(X_1, \dots, \lambda X_j + \mu X'_j, \dots, X_p) = \lambda \varphi(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p) + \mu \varphi(X_1, \dots, X'_j, \dots, X_p).$$

Ceci montre que  $\varphi$  est une forme  $p$ -linéaire sur  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ .

• Soit  $(X_1, \dots, X_p) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$  tel qu'il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$  et  $X_i = X_j$ . La  $i$ -ème colonne de la matrice  $\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$  est  $\begin{pmatrix} X_i \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix}$  et la  $j$ -ème est  $\begin{pmatrix} X_j \\ 0_{n-p,1} \end{pmatrix}$ . Ces deux colonnes sont égales et donc le déterminant est nul. Ceci montre que  $\varphi$  est alternée.

En résumé,  $\varphi$  est une forme  $p$ -linéaire alternée sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  qui est de dimension  $p$ . On sait alors qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$  où  $\mathcal{B}$  désigne la base canonique de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ . En évaluant en  $\mathcal{B}$  les deux membres de cette égalité, on obtient

$$\lambda = \varphi(\mathcal{B}) = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que pour tout  $(X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})^p$ ,  $\varphi(X_1, \dots, X_p) = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_p)$  ou encore, pour toute matrice  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \det(B) \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$ .

De même, l'application  $D \mapsto \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$  « est » une forme  $n - p$ -linéaire alternée des lignes de  $D$ . Donc, il existe  $\mu \in \mathbb{K}$  tel que pour tout  $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ ,  $\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \mu \det(D)$ . En évaluant en  $I_{n-p}$ , on obtient  $\mu = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$ .

Ceci montre que pour toutes matrices  $B$ ,  $C$  et  $D$ ,

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \det(B) \det(D) \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Enfin, la matrice  $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

Donc,  $\det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0_{n-p,p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = 1$  et finalement

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix} = \det(B) \det(D).$$

□

⇒ **Commentaire**. Le résultat précédent se généralise à toute matrice triangulaire par blocs : le déterminant d'une telle matrice est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

## 4.4 Développement suivant une ligne ou une colonne

### 4.4.1 Mineurs, cofacteurs

**DÉFINITION 7.** Soit  $A = (a_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

Le **mineur**  $m_{i,j}$  associé au coefficient  $a_{i,j}$  est le déterminant de format  $n - 1$  obtenu en supprimant dans la matrice  $A$  sa  $i$ -ème ligne et sa  $j$ -ème colonne :

$$m_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Le **cofacteur**  $A_{i,j}$  du coefficient  $a_{i,j}$  est :

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

**Exemple.** Le cofacteur du coefficient ligne 1, colonne 2, du déterminant  $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  est

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

□

Analysons la répartition des signes attribués aux cofacteurs.  $(-1)^{i+j}$  vaut 1 (ou encore « + ») quand  $i+j$  est pair et vaut  $-1$  (ou encore « - ») quand  $i+j$  est impair. Une situation où  $i+j$  est pair est quand  $i=j$  (cofacteur d'un coefficient de la diagonale principale). Les cofacteurs des coefficients diagonaux sont les mineurs de ces coefficients affectés d'un +. A partir de cette diagonale, quand on avance ou recule de 1 dans une ligne ou que l'on monte ou descend de 1 dans une colonne,  $i+j$  change de parité et donc  $(-1)^{i+j}$  change de signe. On obtient donc la répartition de signes suivantes :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & + & & (-1)^n \\ + & - & + & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & + \\ (-1)^n & & \ddots & \ddots & + & - \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & \dots & + & - & + \end{vmatrix}.$$

#### 4.4.2 La formule de développement suivant une ligne ou une colonne

**Théorème 19.** Soit  $A = (a_{k,l})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$  (formule de développement suivant la  $i$ -ème ligne).
- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$  (formule de développement suivant la  $j$ -ème colonne).

**DÉMONSTRATION.** Commençons par développer suivant la première colonne  $C_1$ . Cette première colonne s'écrit

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{i,1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{n,1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{1,1} E_1 + \dots + a_{i,1} E_i + \dots + a_{n,1} E_n$$

où  $(E_1, \dots, E_n)$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Par linéarité par rapport à la première colonne, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,1} \Delta_i$$

$$\text{où } \Delta_i = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ 1 & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On applique aux lignes du déterminant  $\Delta_i$  le cycle  $(2 \ 3 \ \dots \ i \ 1 \ i+1 \ \dots \ n)$  de longueur  $i$  et donc de signature  $(-1)^{i-1}$ . On obtient



$$\begin{aligned}
\Delta_i &= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (\text{d\u00e9terminant par blocs}) \\
&= (-1)^{i-1} m_{i,1} = \Lambda_{i,1} \quad (\text{car } (-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}).
\end{aligned}$$

Finalement,  $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,1}(-1)^{i+1} m_{i,1} = \sum_{i=1}^n a_{i,1} \Lambda_{i,1}$  ce qui montre la formule de d\u00e9veloppement suivant la premi\u00e8re colonne.

Passons au cas g\u00e9n\u00e9ral. Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On applique aux colonnes de  $\det(A)$  le cycle  $(2 \ 3 \ \dots \ j \ 1 \ j+1 \ \dots \ n)$  de longueur  $j$  et donc de signature  $(-1)^{j-1}$  et on obtient

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \det(C_j, C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

En appliquant la formule de d\u00e9veloppement suivant la premi\u00e8re colonne \u00e0 ce dernier d\u00e9terminant (dont la premi\u00e8re colonne est  $C_j$ ), on obtient

$$\det(A) = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+1} m_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \Lambda_{i,j},$$

ce qui montre la formule de d\u00e9veloppement suivant la  $j$ -i\u00e8me colonne.

Enfin, si on applique la formule de d\u00e9veloppement suivant la  $i$ -i\u00e8me colonne \u00e0  $\det({}^t A)$  (qui est \u00e9gal \u00e0  $\det(A)$ ), on obtient (en notant  $a'_{i,j}$  les coefficients de  ${}^t A$  et  $\Lambda'_{i,j}$  les cofacteurs correspondants)

$$\det(A) = \det({}^t A) = \sum_{j=1}^n a'_{j,i} \Lambda'_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \Lambda_{i,j}$$

ce qui montre la formule de d\u00e9veloppement suivant la  $i$ -i\u00e8me ligne. \(\square\)

**Exemple.** Soit  $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ .

Si on d\u00e9veloppe  $\Delta$  suivant sa premi\u00e8re colonne, cela donne

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times 6 + (-8) + 0 = 10$$

et si on d\u00e9veloppe  $\Delta$  suivant sa deuxi\u00e8me colonne, cela donne

$$\Delta = -0 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(-5) = 10.$$

On aboutit bien s\u00fbr au m\u00eame r\u00e9sultat. Ici, il fallait choisir de d\u00e9velopper  $\Delta$  suivant sa deuxi\u00e8me colonne, ce qui rendait imm\u00e9diat le calcul. \(\square\)

**Exercice 3.** Soient  $n \geq 1$  puis  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose

$$D_n(z) = \begin{vmatrix} z & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & z & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & z & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & z + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Calculer  $D_n(z)$  en fonction de  $z$ .

**Solution 3.**  $\Delta_n(z)$  est un déterminant de format  $n$ .

On développe  $\Delta_n(z)$  suivant sa dernière colonne en commençant par la fin. Puisque pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,  $a_k$  est situé à la ligne  $k+1$ , colonne  $n$ , on obtient

$$D_n(z) = (z + a_{n-1}) \begin{vmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & z & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \bullet & & \bullet & z \end{vmatrix} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (-1)^{k+1+n} \Delta_k = (z + a_{n-1}) z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (-1)^{k+1+n} \Delta_k,$$

où  $\Delta_k$  est défini par blocs par :

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & z & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \bullet & & \bullet & z \end{vmatrix}}_k & \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \bullet & & \bullet \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{n-1-k} \\ \hline & \end{vmatrix} = (-1)^{n-1-k} z^k.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} D_n(z) &= z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (-1)^{n+k+1} (-1)^{n-1-k} z^k = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k z^k \\ &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** (déterminant de VANDERMONDE)

Soient  $n \geq 2$  puis  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ . On pose

$$\text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \det \left( x_{j-1}^{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Calculer  $\text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1})$  (on exprimera d'abord  $V_{n+1} = \text{Van}(x_0, \dots, x_n)$  en fonction de  $V_n = \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1})$

à l'aide d'une transformation du type  $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_{i-1} L_i$  où les  $\lambda_i$  seront intelligemment choisis).

**Solution 4.** Soit  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$   $n$  nombres complexes. On effectue dans  $\text{Van}(x_0, \dots, x_n)$  la transformation  $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_{i-1} L_i$ , ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient

$$\text{Van}(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ P(x_0) & P(x_1) & P(x_2) & \dots & P(x_{n-1}) & P(x_n) \end{vmatrix},$$

où  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  quelconque. On prend alors  $P = P_0 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$  (qui est effectivement unitaire de degré  $n$ ). On obtient un déterminant par blocs :

$$\text{Van}(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_0(x_n) \end{vmatrix} = P_0(x_n) \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout  $n \geq 2$ , pour tout  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,

$$\text{Van}(x_0, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Montrons alors par récurrence que :  $\forall n \geq 2, \forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$ .

• Soit  $(x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2$ .  $\text{Van}(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$ . L'égalité est donc vraie quand  $n = 2$ .

• Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $\forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$ . Soit  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Van}(x_0, \dots, x_n) &= \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) \left( \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

On a montré alors par récurrence que :  $\forall n \geq 2, \forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

Ainsi, par exemple, si  $j = e^{2i\pi/3}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = (j-1)(j^2-1)(j^2-j)$ .

⇒ **Commentaire**. Il est important de noter que  $\text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) \neq 0$  si et seulement si les nombres  $x_i$  sont deux à deux distincts.

## 5 Quelques applications des déterminants

### 5.1 Inversibilité d'une matrice carrée, bijectivité d'un endomorphisme, indépendance d'une famille de $n$ vecteurs

Dans ce paragraphe, on rappelle des résultats antérieurs et on en profite pour réunir certains résultats disséminés dans les chapitres précédents.

• Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $A$  est dans  $GL_n(\mathbb{K})$  si et seulement si l'une propositions suivantes est vraie :

- 1-  $\det(A) \neq 0$
- 2-a.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \times B = I_n$  et  $B \times A = I_n$  (définition de l'inversibilité)
  - b.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \times B = I_n$  (inversible  $\Leftrightarrow$  inversible à droite)
  - c.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / B \times A = I_n$  (inversible  $\Leftrightarrow$  inversible à gauche)
- 3-a. Les colonnes de  $A$  constituent une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
  - b. Les lignes de  $A$  constituent une base de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ .
- 4-  $\text{Ker}(A) = \{0\}$  (où  $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}$ ).
- 5-a.  $\text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  (où  $\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ ).
  - b.  $\text{rg}(A) = n$ .

• Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie non nulle  $n$  puis  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $f$  est dans  $GL(E)$  si et seulement si l'une propositions suivantes est vraie :

- 1-  $\det(f) \neq 0$
- 2-a.  $\exists g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = \text{Id}_E$  et  $g \times f = \text{Id}_E$  (définition de l'inversibilité)
  - b.  $\exists g \in \mathcal{L}(E) / f \times g = \text{Id}_E$  (inversible  $\Leftrightarrow$  inversible à droite)
  - c.  $\exists f \in \mathcal{L}(E) / g \times f = \text{Id}_E$  (inversible  $\Leftrightarrow$  inversible à gauche)
- 3- L'image par  $f$  d'une base de  $E$  est une base de  $E$ .
  - a.  $f$  injectif.
  - b.  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .
- 5-a.  $f$  surjectif.
  - b.  $\text{Im}(f) = E$ .
  - c.  $\text{rg}(f) = n$ .

• Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie non nulle  $n$  puis  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ .  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si l'une propositions suivantes est vraie :

- 1-  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$
- 2-  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \in GL_n(\mathbb{K})$
- 3-  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre
- 4-a.  $(u_1, \dots, u_n)$  est génératrice de  $E$ 
  - b.  $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$ .

## 5.2 Inverse d'une matrice carrée

Dans ce paragraphe, on établit une formule qui fournit une bonne fois pour toutes l'inverse d'une matrice carrée inversible.

**DÉFINITION 8.** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

La **comatrice** de  $A$ , notée  $\text{com}(A)$ , est la matrice carrée de format  $n$  dont le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , est le cofacteur  $A_{i,j}$  de  $a_{i,j}$ .

$$\text{com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

**Théorème 20.**  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times {}^t(\text{com}(A)) = {}^t(\text{com}(A)) \times A = (\det(A))I_n$ .

**DÉMONSTRATION .**

• Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $i$ , de  $A \times {}^t(\text{com}(A))$  est  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k}$  ( $A_{i,k}$  étant le coefficient ligne  $k$ , colonne  $i$ , de  ${}^t(\text{com}(A))$ ). On reconnaît le développement de  $\det(A)$  suivant sa  $i$ -ème ligne et donc le coefficient ligne  $i$ , colonne  $i$ , de  $A \times {}^t(\text{com}(A))$  est  $\det(A)$ .

• Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de  $A \times {}^t(\text{com}(A))$  est  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k}$ . On reconnaît le développement suivant la  $j$ -ème ligne du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & \dots & a_{i,n} \leftarrow i \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & \dots & a_{i,n} \leftarrow j \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Les  $i$ -ème et  $j$ -ème lignes (avec  $i \neq j$ ) de ce déterminant sont égales et donc ce déterminant est nul. Ainsi,

$$A \times {}^t(\text{com}(A)) = (\delta_{i,j} \det(A))_{1 \leq i,j \leq n} = (\det(A))I_n.$$

On montre de même que  ${}^t(\text{com}(A)) \times A = (\det(A))I_n$  (en raisonnant sur les colonnes).  $\square$

En particulier,

**Théorème 21.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ . De plus, en cas d'inversibilité

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A)).$$

**DÉMONSTRATION.** On sait déjà que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .

Si  $\det(A) \neq 0$ , alors  $A \times \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A)) = I_n$ . Par suite,  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A))$ .  $\square$

**Exemple.** Considérons par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . En développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$\det(A) = -2(3 \times 2 - 1 \times 2) = -8 \neq 0.$$

Donc,  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, la formule du théorème 21 n'est pas la « formule ultime » pour obtenir l'inverse d'une matrice inversible. On l'utilise très peu et pour les matrices de format  $(3,3)$  par exemple, on préfère très souvent inverser une telle matrice en l'interprétant comme une matrice de passage ( $(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ ).  $\square$

Du théorème 21, on déduit immédiatement le cas particulier de l'inverse d'une matrice carrée de format 2 inversible.

**Théorème 22.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{K}) \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ . De plus, en cas d'inversibilité

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

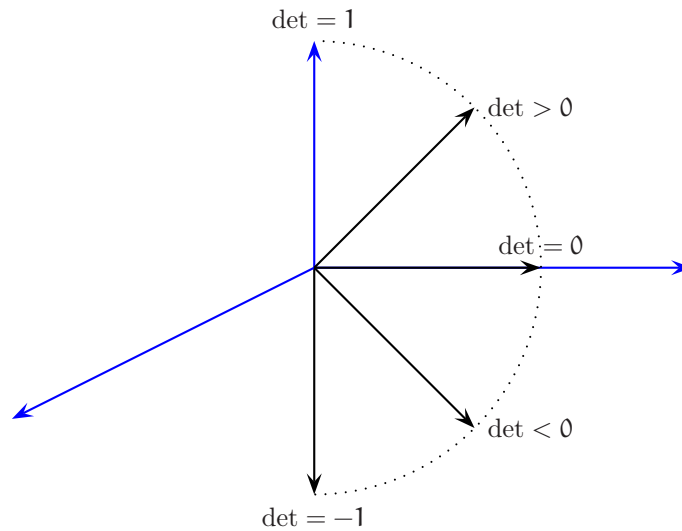
### 5.3 Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Imaginons que  $(i, j, k)$  soit une base de l'espace  $\mathbb{R}^3$  de dimension 3. La base  $(j, -k, i)$  a-t-elle la même orientation que la base  $(i, j, k)$  ou bien la base  $(i + j + k, -i + j + k, -i - j + k)$  a-t-elle la même orientation que la base  $(i, j, k)$ ? Pas facile de visualiser cela.

On va maintenant voir que les déterminants sont un outil puissant pour simplifier ce problème.

On se donne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle puis  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Si  $\mathcal{B}'$  est une autre base de  $E$ , on sait que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ . On a donc exactement deux possibilités : ou bien  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ , ou bien  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$ .

Au départ,  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$ . Si on modifie à peine un ou plusieurs des vecteurs de  $\mathcal{B}$  pour obtenir une base  $\mathcal{B}'$  « proche de  $\mathcal{B}$  », il est clair que le déterminant se modifie à peine (en deuxième année, on démontre que « le déterminant est continu ») car ce déterminant est polynomial en les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ . Donc, si  $\mathcal{B}'$  « proche de  $\mathcal{B}$  »,  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  reste strictement positif. Pour que ce déterminant change de signe, il faut d'abord qu'il s'annule, ce qui traduit le fait que l'un des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  devient une combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{B}'$  (et n'est plus une base). C'est le moment où  $\mathcal{B}'$  change d'orientation (dans le graphique qui suit, on fixe deux des vecteurs de  $\mathcal{B}$  et on fait varier lentement le troisième) :



Ce qui précède devrait suffire à modifier ce qui suit :

**Théorème 23.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie sur l'ensemble des bases de  $E$  par : pour toutes bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$ ,

$$\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. De plus, il existe exactement deux classes d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$ .

**DÉMONSTRATION .**

- Pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$ . Donc,  $\mathcal{R}$  est réflexive.
- Pour toutes bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $E$ , si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ , alors  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')} > 0$ . Donc,  $\mathcal{R}$  est symétrique.
- Pour toutes bases  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  de  $E$ , si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$  et  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$ , alors  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$ . Donc,  $\mathcal{R}$  est transitive.

Ceci montre que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $E$ .

Soient alors  $\mathcal{B}_1$  une base donnée de  $E$  puis  $\mathcal{B}_2$  la base de  $E$  obtenue en remplaçant le premier vecteur de  $\mathcal{B}_1$  par son opposé. Alors,  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = -1 < 0$ . Par suite,  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  ne sont pas en relation.

Si maintenant  $\mathcal{B}$  est une base quelconque de  $E$ , ou bien  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) > 0$  et dans ce cas,  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}_1$ , ou bien  $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) < 0$  et dans ce cas,  $\det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_1) \det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}) > 0$  puis  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}_2$ .

Il existe donc exactement deux classes d'équivalence, celle de  $\mathcal{B}_1$  et celle de  $\mathcal{B}_2$ . □

DÉFINITION 9. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Pour  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  bases données de  $E$ , on dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont la **même orientation** si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ .

**Orienter**  $E$ , c'est choisir arbitrairement une base de référence  $\mathcal{B}$  puis appeler **bases directes** toute base  $\mathcal{B}'$  ayant la même orientation que  $\mathcal{B}$  et **bases indirectes** toute base  $\mathcal{B}'$  n'ayant pas la même orientation que  $\mathcal{B}$ .

**Exemple.** On suppose que  $\mathbb{R}^3$  est orienté et que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base directe de  $\mathbb{R}^3$ . On veut savoir si  $(-e_2, -e_3, -e_1)$  est une base directe ou indirecte de  $\mathbb{R}^3$ . Par linéarité par rapport à chaque vecteur,

$$\det_{(e_1, e_2, e_3)}(-e_2, -e_3, -e_1) = (-1)^3 \det_{(e_1, e_2, e_3)}(e_2, e_3, e_1).$$

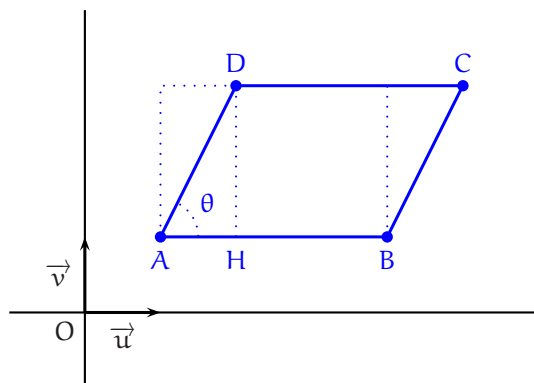
Ensuite,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  est un cycle de longueur 3 et donc de signature  $(-1)^2$ . Donc,

$$\det_{(e_1, e_2, e_3)}(-e_2, -e_3, -e_1) = (-1)^3(-1)^2 \det_{(e_1, e_2, e_3)}(e_1, e_2, e_3) = -1 < 0.$$

$(-e_2, -e_3, -e_1)$  est une base indirecte de  $\mathbb{R}^3$ . □

## 5.4 Calculs d'aires et de volumes

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On se donne quatre points  $A, B, C$  et  $D$  deux à deux distincts tels que  $ABCD$  soit un parallélogramme.



L'aire du parallélogramme  $ABCD$  est  $AB \times HD = AB \times AD \times \sin \theta = AB \times AD \times \sin(\widehat{BAD})$ .

L'**aire algébrique** du parallélogramme  $ABCD$  (aire affectée d'un signe tenant compte du fait que l'on aille de  $\vec{AB}$  à  $\vec{AD}$  dans le sens direct ou indirect) est

$$AB \times AD \times \sin(\vec{AB}, \vec{AD}).$$

Soient alors  $M$  et  $M'$  deux points du plan, tous deux distincts de  $O$ , d'affixes respectives  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ .

$$\bar{z} \times z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - yx') = \vec{OM} \cdot \vec{OM}' + i \det_{(\vec{u}, \vec{v})}(\vec{OM}, \vec{OM}').$$

Mais d'autre part, en posant  $\theta = (\vec{u}, \vec{OM})$  et  $\theta' = (\vec{u}, \vec{OM}')$ ,

$$\bar{z} \times z' = |z|e^{-i\theta}|z'|e^{i\theta'} = OM OM' e^{i(\theta' - \theta)} = OM OM' \cos(\vec{OM}, \vec{OM}') + i OM OM' \sin(\vec{OM}, \vec{OM}').$$

Donc,

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = OM OM' \cos(\vec{OM}, \vec{OM}') \text{ et } \det_{(\vec{u}, \vec{v})}(\vec{OM}, \vec{OM}') = OM OM' \sin(\vec{OM}, \vec{OM}').$$

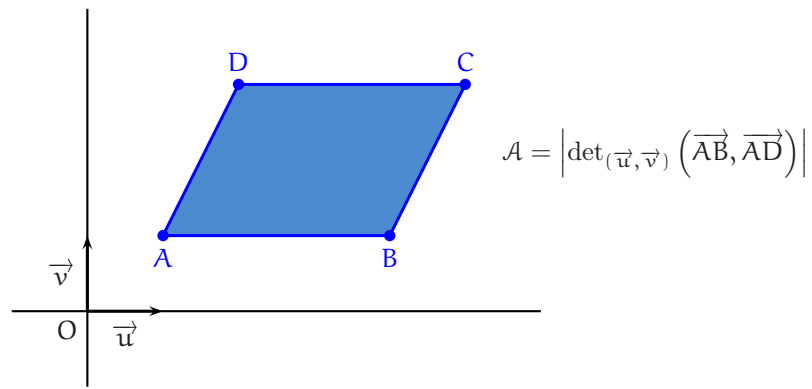
L'aire algébrique du parallélogramme  $ABCD$  est donc

$$AB \times AD \times \sin(\vec{AB}, \vec{AD}) = \det_{(\vec{u}, \vec{v})}(\vec{AB}, \vec{AD}),$$

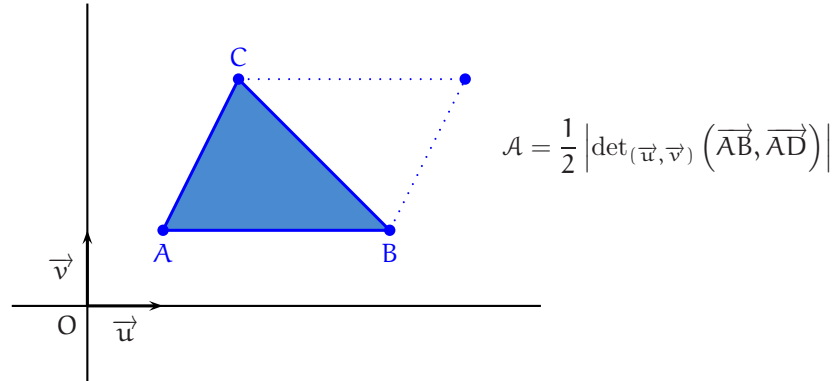
et son aire géométrique est

$$A = \left| \det_{(\vec{u}, \vec{v})}(\vec{AB}, \vec{AD}) \right|.$$

En résumé,



Puisque l'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme, on a aussi



On montre de même que le volume algébrique d'un parallélépipède ABCDEFGH, dans l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est

$$\mathcal{V} = \det_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}),$$

le volume géométrique étant la valeur absolue de ce déterminant.