

Matrices

Plan du chapitre

1 Opérations sur les matrices	page 2
1.1 Définition d'une matrice	page 2
1.2 L'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$	page 2
1.2.1 Définition l'addition et de la loi externe.	page 2
1.2.2 Etude de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrices élémentaires.....	page 3
1.3 Produit de deux matrices	page 3
1.3.1 Définition du produit matriciel	page 3
1.3.2 Produit de deux matrices élémentaires	page 6
1.3.3 L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$	page 7
1.3.4 Matrices carrées inversibles. Le groupe $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$	page 8
1.3.5 Les pièges de la multiplication des matrices	page 10
1.4 Transposée d'une matrice	page 11
1.5 Quelques grands types de matrices	page 12
1.5.1 Matrices scalaires	page 12
1.5.2 Matrices diagonales	page 12
1.5.3 Matrices triangulaires	page 13
1.5.4 Matrices symétriques, matrices antisymétriques	page 14
2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases	page 15
2.1 Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base (rappel)	page 15
2.2 Définition de la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases	page 16
2.3 Ecriture matricielle d'une application linéaire	page 17
2.4 Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E, F)$	page 18
2.5 Matrice d'une composée	page 19
3 Formules de changement de base	page 21
3.1 Matrices de passage	page 21
3.2 La formule de changement de base	page 22
3.3 Applications linéaires et changement de bases	page 24
3.4 Matrices équivalentes. Matrices semblables	page 27
4 Calculs par blocs	page 28
5 Rang d'une matrice	page 30
5.1 Définition du rang d'une matrice	page 30
5.2 Lien avec le rang d'une famille de vecteurs	page 30
5.3 Lien avec le rang d'une application linéaire	page 31
5.4 Une caractérisation du rang d'une matrice	page 31
5.5 Transformations élémentaires ne modifiant pas le rang.....	page 32
5.5.1 Rappel. Codage des transformations élémentaires	page 32
5.5.2 Interprétation en terme de calcul matriciel des opérations élémentaires	page 35
5.5.3 Matrices de permutations	page 37
5.5 Matrices extraites. Une autre caractérisation du rang	page 39
5.6.1 Définition d'une matrice extraite	page 39
5.6.2 Caractérisation du rang comme le format maximal d'une matrice extraite inversible	page 39
6 Trace	page 40
6.1 Trace d'une matrice carrée	page 40
6.2 Trace d'un endomorphisme	page 41

1 Opérations sur les matrices

1.1 Définition d'une matrice

On se donne deux entiers naturels non nuls n et p . La définition la plus propre d'une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est : « une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est une application de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ dans \mathbb{K} ou encore une famille d'éléments de \mathbb{K} indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ ». Dans la pratique, une matrice est écrite sous une des formes suivantes (la notation avec des parenthèses étant de loin la plus utilisée) :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

Nous adopterons donc la définition suivante :

DÉFINITION 1. Pour n et p entiers naturels non nuls donnés, une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est un tableau à n lignes et p colonnes et donc à np cases, chaque case contenant un élément de \mathbb{K} . Dans ce cas, la matrice est de **format** (n, p) . L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si de plus $n = p$, la matrice est dite **carrée**. Dans ce cas, n est le **format** ou la taille de la matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbb{K} se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice à n lignes et 1 colonne s'appelle une **matrice colonne**. L'ensemble des matrices colonnes à n lignes se note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Une matrice à 1 ligne et p colonnes s'appelle une **matrice ligne**. L'ensemble des matrices lignes à p colonnes se note $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice à deux lignes et trois colonnes, $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format 2, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne et $(x_1 \ x_2)$ est une matrice ligne.

Un élément de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ est une matrice n'ayant qu'un seul coefficient ; $A = (a_{1,1})$. On a souvent l'habitude d'identifier une telle matrice et son unique coefficient : $(a_{1,1}) = a_{1,1}$ ou encore $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ de même que dans les chapitres précédents, on a identifié \mathbb{K}^1 et \mathbb{K} .

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $a_{i,j}$ est le coefficient ligne i , colonne j de A , $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est la j -ème colonne de A souvent notée C_j et $(a_{i,1} \ \dots \ a_{i,j} \ \dots \ a_{i,p})$ est la i -ème ligne de A souvent notée L_i .

Quand A est une matrice carrée, la **diagonale principale** de la matrice A est la diagonale formée par les coefficients $a_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$. Elle démarre en haut à gauche et finit en bas à droite. Les coefficients de cette diagonale principale sont souvent appelés **coefficients diagonaux**.

1.2 L'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$

1.2.1 Définition l'addition et de la loi externe

On définit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une addition et une loi externe de domaine \mathbb{K} .

- Pour tout $(A, B) = ((a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}, (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, on pose

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

- Pour tout $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

On vérifie facilement que :

Théorème 1. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

L'élément neutre pour l'addition est la **matrice nulle** notée 0 ou $0_{n,p}$. C'est la matrice rectangulaire de format (n, p) dont tous les coefficients sont nuls.

L'**opposé** d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est la matrice $-A = (-a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

1.2.2 Etude de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Matrices élémentaires

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice rectangulaire de format (n, p) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i , colonne j , qui est égal à 1 . Les matrices $E_{i,j}$ sont les **matrices élémentaires**.

Pour $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, le coefficient ligne k , colonne l de la matrice $E_{i,j}$, est donc égal à 1 si et seulement si $k = i$ et $l = j$ et est égal à 0 sinon. Le coefficient ligne k colonne l , est donc $\delta_{k,i} \times \delta_{l,j}$. Ainsi,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \uparrow j \end{matrix}$$

ou aussi

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, E_{i,j} = (\delta_{k,i} \times \delta_{l,j})_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$$

Si $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une matrice donnée, alors

$$A = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_{i,j} E_{i,j}$$

Ceci montre que la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. D'autre part, si $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{K}^{np}$

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_{i,j} E_{i,j} = 0 \Rightarrow (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} = (0)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \Rightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} = 0.$$

Donc, la famille de matrices $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est libre. Finalement, la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: c'est la **base canonique** de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

On en déduit que

Théorème 2. $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.
La famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

L'égalité $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_{i,j} E_{i,j}$ est fréquemment utilisée. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{1,3} - E_{2,1} + E_{2,2}.$$

1.3 Produit de deux matrices

1.3.1 Définition du produit matriciel

On définit maintenant le produit de deux matrices. Pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, on ne multipliera pas tout type de matrice par tout type de matrice. On effectuera un produit $A \times B$ uniquement dans le cas où le nombre de colonnes de A est le nombre de lignes de B . Plus précisément, si n, p et q sont trois entiers naturels non nuls et si $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la matrice $A \times B$ est la matrice de format

(p, q) dont le coefficient ligne i , colonne j , où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, est $\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$. Ainsi,

$$\forall \left((a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}, (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A \times B = \left(\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}.$$

On note que dans le cas général, \times n'est pas une loi interne car les matrices que l'on multiplie n'appartiennent pas au même ensemble.

Ainsi, par exemple, le coefficient ligne 1 colonne 2, de la matrice AB est $a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + \dots + a_{1,p}b_{p,2}$. On dit que l'on a effectué le **produit scalaire usuel** du p -uplet $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,p})$ (constitué des coefficients de la ligne 1) par le p -uplet $(b_{1,2}, b_{2,2}, b_{3,2}, \dots, b_{p,2})$ (constitué des coefficients de la colonne 2). Plus généralement, pour obtenir le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $A \times B$, on effectue le produit de la ligne i par la colonne j : $\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, la matrice A est de format $(2,3)$ et la matrice B est de format $(3,3)$. Donc, la matrice $A \times B$ est définie et de format $(2,3)$. De plus, son coefficient ligne 2, colonne 1, est obtenu de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 \times 3 + 3 \times (-5) + 2 \times 2 & \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ -8 & \bullet & \bullet \end{pmatrix},$$

et plus généralement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -17 & 2 \\ -8 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

On donne maintenant les premières règles de calcul avec des produits de matrices.

Théorème 3. Soient n, p, q, r quatre entiers naturels non nuls.

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC).$$

DÉMONSTRATION. On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,q \rrbracket \times \llbracket 1,r \rrbracket}$.

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Donc le produit $A \times B$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Ensuite, $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Donc, le produit $(AB) \times C$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. De même, le produit $A \times (BC)$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Pour $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, le coefficient ligne i , colonne k , de la matrice $A \times B$ est $\sum_{l=1}^p a_{i,l} b_{l,k}$ et donc, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $(A \times B) \times C$ est

$$\sum_{k=1}^q \left(\sum_{l=1}^p a_{i,l} b_{l,k} \right) c_{k,j} = \sum_{\substack{1 \leq l \leq p \\ 1 \leq k \leq q}} a_{i,l} b_{l,k} c_{k,j} = \sum_{\substack{1 \leq k' \leq p \\ 1 \leq l' \leq q}} a_{i,k'} b_{k',l'} c_{l',j}.$$

De même, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $A \times (B \times C)$ est

$$\sum_{k=1}^p a_{i,k} \left(\sum_{l=1}^q b_{k,l} c_{l,j} \right) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq q}} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j}.$$

Les matrices $(A \times B) \times C$ et $A \times (B \times C)$ ont les mêmes coefficients. Ces matrices sont donc égales.

□

On note I_n la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i , colonne j , $1 \leq i, j \leq n$, vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Donc,

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n \times A = A \text{ et } A \times I_p = A.$$

DÉMONSTRATION. On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$.

$I_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Donc, le produit $I_n \times A$ est défini et est élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $I_n \times A$ est

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i,k} a_{k,j} = a_{i,j} \text{ (obtenu pour } k = i).$$

Donc, $I_n \times A = A$. De même, $A \times I_p = A$. □

Théorème 5. $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A \times (B + C) = AB + AC$ et $\forall (B, C, A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (B + C) \times A = BA + CA$.

DÉMONSTRATION. On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$.

A est dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B, C et $B + C$ sont dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Donc, les produits $A \times B, A \times C$ et $A \times (B + C)$ sont définis et sont éléments de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de $A \times B$ est $\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ et le coefficient ligne i , colonne j , de $A \times C$ est

$\sum_{k=1}^p a_{i,k} c_{k,j}$ puis le coefficient ligne i , colonne j , de $A \times B + A \times C$ est

$$\sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=1}^p a_{i,k} c_{k,j} = \sum_{k=1}^p (a_{i,k} b_{k,j} + a_{i,k} c_{k,j}) = \sum_{k=1}^p a_{i,k} (b_{k,j} + c_{k,j}),$$

qui est le coefficient ligne i , colonne j , de $A \times (B + C)$. Donc, $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

L'autre égalité se démontre de la même manière. □

Théorème 6. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda AB$.

DÉMONSTRATION. Soit $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $(\lambda A) \times B$ est $\sum_{k=1}^p (\lambda a_{i,k}) b_{k,j} =$

$\lambda \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ et celui de la matrice $A \times (\lambda B)$ est $\sum_{k=1}^p a_{i,k} (\lambda b_{k,j}) = \lambda \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$. Dans les deux cas, on a trouvé le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice λAB . □

Exercice 1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M(\theta) \times M(\theta')$ pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

2) Calculer $(M(\theta))^n$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (où $(M(\theta))^n = \overbrace{M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}^{n \text{ facteurs}}$).

Solution 1.

1) Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(\theta) \times M(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') & -\sin(\theta) \cos(\theta') - \cos(\theta) \sin(\theta') \\ \sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta') & \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= M(\theta + \theta'). \end{aligned}$$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(M(\theta))^n = M(n\theta)$.

- L'égalité est vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $(M(\theta))^n = M(n\theta)$. Alors,

$$\begin{aligned} (M(\theta))^{n+1} &= (M(\theta))^n \times M(\theta) \\ &= M(n\theta) \times M(\theta) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= M(n\theta + \theta) \text{ (d'après 1)} \\ &= M((n+1)\theta). \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

1.3.2 Produit de deux matrices élémentaires

Théorème 7. $\forall (i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

DÉMONSTRATION. Soit $(u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$. Le coefficient ligne u , colonne v , de $E_{i,j} \times E_{k,l}$ est

$$\begin{aligned} \sum_{w=1}^p \underbrace{(\delta_{u,i} \quad \delta_{w,j})}_{\substack{\text{coef. ligne } u, \\ \text{colonne } w, \\ \text{de } E_{i,j}}} \underbrace{(\delta_{w,k} \quad \delta_{v,l})}_{\substack{\text{coef. ligne } w, \\ \text{colonne } v, \\ \text{de } E_{k,l}}} &= \delta_{u,i} \delta_{v,l} \sum_{w=1}^n \delta_{w,j} \delta_{w,k} \\ &= \delta_{j,k} \delta_{u,i} \delta_{v,l} \text{ (obtenu pour } w = j). \end{aligned}$$

Ce coefficient est aussi celui de $\delta_{j,k} E_{i,l}$ ce qui démontre le résultat. □

Ainsi, dans le cas de matrices carrées de format $n \geq 2$, $E_{1,2} \times E_{2,1} = E_{1,1}$ et $E_{2,1} \times E_{1,2} = E_{2,2}$. En particulier, $E_{1,2} \times E_{2,1} \neq E_{2,1} \times E_{1,2}$. On note aussi que $E_{1,2} \times E_{1,1} = 0$ et pourtant $E_{2,1} \neq 0$ et $E_{1,1} \neq 0$.

Exercice 2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 et N^3 .

Solution 2. $N = E_{1,2} + E_{2,3}$. Ensuite,

$$\begin{aligned} N^2 &= (E_{1,2} + E_{2,3})(E_{1,2} + E_{2,3}) = E_{1,2}E_{1,2} + E_{1,2}E_{2,3} + E_{2,3}E_{1,2} + E_{2,3}E_{2,3} = E_{1,3} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} N^3 &= N \times N^2 = (E_{1,2} + E_{2,3}) E_{1,3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

⇒ **Commentaire.**

◇ Quand des matrices contiennent beaucoup de 0, on utilise fréquemment l'écriture de cette matrice à l'aide des matrices élémentaires pour effectuer des produits.

◇ La matrice N de l'exercice 2 vérifie $N \neq 0$, $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$. Une telle matrice est dite **nilpotente d'indice 3**. De manière générale, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est **nilpotente** si et seulement si il existe un entier naturel non nul k tel que $A^k = 0$. L'**indice de nilpotence** de A est alors $p = \text{Min}\{k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0\}$. Il existe une et une seule matrice nilpotente d'indice 1 à savoir la matrice nulle 0.

1.3.3 L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Le produit de deux matrices carrées de format n est défini et est une matrice carrée de format n . Donc, \times est une loi interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les théorèmes 1, 3, 4 et 5, ainsi que les calculs précédant l'exercice 2, fournissent immédiatement

Théorème 8. Pour tout $n \geq 1$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. Cet anneau est non commutatif pour $n \geq 2$.

On note que l'élément neutre de \times est I_n . D'autre part, comme dans tout anneau, l'élément neutre pour $+$, à savoir la matrice nulle 0_n , est absorbant pour la multiplication : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$.

Comme dans tout anneau, on peut définir les exposants : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^p = \underbrace{A \times \dots \times A}_{p \text{ facteurs}}$ et on

adopte la convention $A^0 = I_n$ (convention douteuse faisant parfois commettre quelques erreurs, la notation A^0 n'étant réellement cohérente que quand A est inversible pour \times).

On a alors les règles de calculs usuelles sur les exposants :

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, A^p \times A^q = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = A^{pq}$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \forall p \in \mathbb{N}$, si **A et B commutent**, alors $(AB)^p = A^p B^p$.

Comme dans tout anneau, on a aussi la formule du binôme de NEWTON et l'identité $A^p - B^p = \dots$:

Théorème 10. Soit $n \geq 1$.

- (formule du binôme de NEWTON) $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, si **A et B commutent**

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, si **A et B commutent**

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}.$$

Si A et B ne commutent pas, on a par exemple $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ et pas mieux.

Il est donc temps de s'intéresser aux matrices carrées qui commutent avec toutes les matrices carrées :

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA$.

Solution 3. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Si A est solution du problème, alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Or,

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j} \\ &= a_{1,i} E_{1,j} + a_{2,i} E_{2,j} + \dots + a_{i,i} E_{i,j} + \dots + a_{n,i} E_{n,j}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_{i,j}A &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l} \\ &= a_{j,1} E_{i,1} + a_{j,2} E_{i,2} + \dots + a_{j,j} E_{i,j} + \dots + a_{j,n} E_{i,n}. \end{aligned}$$

Puisque la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient : pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq k$, $a_{i,k} = 0$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Ainsi, si A commute avec toutes les matrices, alors A est nécessairement de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$

où $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \times (\lambda I_n) = \lambda B = (\lambda I_n) \times B$.

Les matrices qui commutent avec toutes les matrices carrées sont les matrices de la forme λI_n , $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 4.

1) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 4.

1) $N^0 = I_3$ et $N^1 = N$. On a vu dans l'exercice n° 2 que $N^2 = E_{1,3}$ puis $N^3 = 0$. On en déduit que pour $k \geq 3$ (de sorte que $k-3 \geq 0$), $N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0 = 0$.

2) $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$. Soit $n \geq 2$. $A = 2I_3 - N$ et puisque les matrices A et $-2I_n$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n &= (2I_3 - N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} (-N)^k \\ &= \binom{n}{0} (2I_3)^n (-N)^0 + \binom{n}{1} (2I_3)^{n-1} (-N)^1 + \binom{n}{2} (2I_3)^{n-2} (-N)^2 \quad (\text{car pour } k \geq 3, N^k = 0) \\ &= 2^n I_3 - n 2^{n-1} N + n(n-1) 2^{n-3} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & -n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$ ou $n = 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & -n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

\Rightarrow **Commentaire.** Quand on écrit $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} (-N)^k$, on remplace le problème du calcul des puissances successives de A par le calcul des puissances successives de la matrice $2I_3$ et de la matrice $-N$. Si l'on n'était pas capable de calculer ces puissances, utiliser le binôme ne présente plus aucun intérêt. Cette mentalité est la même dans l'exercice suivant.

Exercice 5.

1) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 . En déduire J^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution 5.

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$. Montrons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

- $3^{1-1}J = J = J^1$ et donc, la formule est vraie quand $k = 1$.
- Soit $k \geq 1$. Si $J^k = 3^{k-1}J$, alors

$$J^{k+1} = J^k \times J = 3^{k-1}J \times J = 3^{k-1} \times 3J = 3^{(k+1)-1}J.$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$. D'autre part, $J^0 = I_3$ (et en particulier $J^0 \neq 3^{0-1}J$).

2) $A^0 = I_3$. Soit $n \geq 1$. Puisque $A = I_3 + J$ et que les matrices I_3 et J commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) J \\ &= I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k \right) J = I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} - 1 \right) J \\ &= I_3 + \frac{1}{3} ((3+1)^n - 1) J = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{4^n - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Matrices carrées inversibles. Le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$

On rappelle qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible pour \times si et seulement si il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$. Dans ce cas, la matrice B est unique et se note A^{-1} . On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles pour \times . $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et à ce titre :

Théorème 11. Soit $n \geq 1$. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

En particulier, $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$, si $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ (et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$) et si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ (et $(A^{-1})^{-1} = A$).

Théorème 12. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \forall (B, C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, AB = AC \Rightarrow B = C$.

$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \forall (B, C) \in (\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}))^2, BA = CA \Rightarrow B = C$.

DÉMONSTRATION. Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow I_n B = I_n C \Rightarrow B = C.$$

Et de même pour l'autre implication. □

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on peut définir A^p pour $p \in \mathbb{Z} : \forall p \in \mathbb{Z}, A^p = \begin{cases} \overbrace{A \times \dots \times A}^{p \text{ facteurs}} & \text{si } p \geq 1 \\ I_n & \text{si } p = 0 \\ \underbrace{A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{-p \text{ facteurs}} & \text{si } p \leq -1 \end{cases}$. Avec cette définition, on

a les règles de calcul usuelles sur les exposants :

- $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, A^p \times A^q = A^{p+q}$ et $(A^p)^q = A^{pq}$.
- $\forall (A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2, \forall p \in \mathbb{Z}$, si A et B commutent, $(AB)^p = A^p B^p$.

Au fur et à mesure du cours, nous rencontrerons de nombreuses méthodes, à utiliser en fonction des circonstances, pour montrer qu'une certaine matrice carrée est inversible et déterminer son inverse. La première méthode est fournie par la définition de l'inversibilité et de l'inverse. Cette méthode est mise en œuvre dans les deux exercices qui suivent.

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Exprimer A en fonction de I_3 et N .
- 2) Calculer N^3 .
- 3) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et préciser A^{-1} .

Solution 6.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 - N.$$

2) On a vu dans l'exercice 2 que $N^3 = 0$.

3) Puisque les matrices I_3 et N commutent, $(I_3 - N)(I_3 + N + N^2) = I_3 - N^3 = I_3$ et de même, $(I_3 + N + N^2)(I_3 - N) = I_3 - N^3 = I_3$. Donc, A est inversible et $A^{-1} = I_3 + N + N^2$. Plus précisément,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Exprimer A en fonction de I_3 et J .
- 2) Calculer J^2 . En déduire une égalité du type $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_2$ où α , β et γ sont trois réels, α étant non nul.
- 3) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et préciser A^{-1} .

Solution 7.

1) $A = I_3 + J$.

$$2) J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J, \text{ puis}$$

$$J^2 = 3J \Rightarrow (A - I_3)^2 = 3(A - I_3) \Rightarrow A^2 - 5A + 4I_3 = 0.$$

3) $A^2 - 5A + 4I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{4}(-A^2 + 5A)$. Donc,

$$A \times \frac{1}{4}(-A + 5I_3) = I_3 = \frac{1}{4}(-A + 5I_3) \times A.$$

Par suite, $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(-A + 5I_3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.3.5 Les pièges de la multiplication des matrices

Les pièges du produit des matrices sont les mêmes que les mêmes que les pièges de la composition des applications linéaires.

- Il est possible que $A \times B \neq B \times A$. Par exemple, $E_{1,1} \times E_{1,2} = E_{1,2} \neq 0$ et $E_{1,2} \times E_{1,1} = 0$.
- Il est possible que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A \times B = 0$ ou encore un produit de facteurs peut être nul sans qu'aucun de ses facteurs ne soit nul. Par exemple, $E_{1,1} \neq 0$, $E_{1,2} \neq 0$ et $E_{1,2} \times E_{1,1} = 0$.
- Il est possible que $A \times B = 0$ et $B \times A \neq 0$. Par exemple, $E_{1,1} \times E_{1,2} \neq 0$ et $E_{1,2} \times E_{1,1} = 0$.
- Il est possible que $A \times B = A \times C$ et $B \neq C$. Par exemple, $E_{1,2} \times E_{1,1} = 0 \times E_{1,1}$ mais $E_{1,2} \neq 0$.

- Il est possible que $(A \times B)^2 \neq A^2 \times B^2$. Par exemple, $(E_{1,2}E_{2,1})^2 = (E_{1,1})^2 = E_{1,1}$ mais $E_{1,2}^2 E_{2,1}^2 = 0$.
- Il est possible que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
Par exemple, $(E_{1,2} + E_{2,1})^2 = (E_{1,2} + E_{2,1})(E_{1,2} + E_{2,1}) = E_{1,2}^2 + E_{1,2}E_{2,1} + E_{2,1}E_{1,2} + E_{2,1}^2 = E_{1,1} + E_{2,2}$ mais $E_{1,2}^2 + 2E_{1,2}E_{2,1} + E_{2,1}^2 = 2E_{1,1}$.

1.4 Transposée d'une matrice

DÉFINITION 2. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La **transposée** de la matrice A , notée tA , est la matrice élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient ligne i , colonne j , $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, est le coefficient de la matrice A situé ligne j , colonne i ou encore

$${}^tA = (a'_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} \text{ où } \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Les propriétés usuelles de calcul de la transposition sont :

Théorème 13.

- 1) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.
- 2) $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.
- 3) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
- 4) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^tA \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. De plus, en cas d'inversibilité, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

DÉMONSTRATION.

1) On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$. tA est la matrice de format (p, n) dont le coefficient ligne i , colonne j , $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, est $a'_{i,j} = a_{j,i}$. ${}^t({}^tA)$ est la matrice de format (n, p) dont coefficient ligne i , colonne j , $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, est $a''_{i,j} = a'_{j,i} = a_{i,j}$. Donc, ${}^t({}^tA) = A$.

2) On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice ${}^t(\lambda A + \mu B)$ est $\lambda a_{j,i} + \mu b_{j,i}$ et est aussi le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $\lambda {}^tA + \mu {}^tB$. Donc, ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

3) On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket}$ puis ${}^tA = (a'_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$ et ${}^tB = (b'_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

• AB est un élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et donc ${}^t(AB)$ est un élément de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice ${}^t(AB)$ est encore le coefficient ligne j , colonne i , de la matrice AB c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^p a_{j,k} b_{k,i}.$$

• tA est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et tB est un élément de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Donc, ${}^tB {}^tA$ est défini et est un élément de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice ${}^tB {}^tA$ est le « produit » de la ligne i de tB par la colonne j de tA c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^p b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^p a_{j,k} b_{k,i}.$$

Donc, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

4) Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ et ${}^t(A^{-1}) \times A = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$. Donc, ${}^tA \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

En appliquant ce résultat à la matrice tA , on obtient : si ${}^tA \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A = {}^t({}^tA) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. □

Exercice 6. Soient $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer tUV et $U{}^tV$.

Solution 6.

- tU est une matrice de format $(1, n)$ et V est une matrice de format $(n, 1)$. Donc, tUV est définie et de format $(1, 1)$. tUV est le nombre :

$${}^tUV = (u_1 \quad \dots \quad u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n.$$

- U est une matrice de format $(n, 1)$ et V est une matrice de format $(1, n)$. Donc, U^tV est définie et de format (n, n) . Si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient ligne i , colonne j , est u_iv_j et donc

$$U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \quad \dots \quad v_n) = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \dots & u_1v_j & \dots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_iv_1 & \dots & u_iv_j & \dots & u_iv_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \dots & u_nv_j & \dots & u_nv_n \end{pmatrix} = (u_iv_j)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1.5 Quelques grands types de matrices

1.5.1 Matrices scalaires

DÉFINITION 3. Une **matrice scalaire** de format $n \in \mathbb{N}^*$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$.

⇒ **Commentaire**.

◇ On a vu dans l'exercice 3, page 7, que les matrices carrées qui commutent avec toutes les matrices carrées sont exactement les matrices scalaires.

◇ L'ensemble des matrices scalaires de format n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1. Une base de ce sous-espace est (I_n) . L'espace des matrices scalaires étant de dimension 1, il est isomorphe à $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ l'espace des scalaires, un isomorphisme étant $\lambda \mapsto \lambda I_n$. Ceci motive la dénomination « matrices scalaires ».

1.5.2 Matrices diagonales

DÉFINITION 4. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est une **matrice diagonale** si et seulement si $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$.

Une matrice diagonale est donc une matrice de la forme : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Une telle matrice se note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

L'ensemble des matrices diagonales se note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 14. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n . Une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{i,i}$. Par suite, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ et en particulier, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus, la famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et libre en tant que sous-famille d'une famille libre. Finalement, la famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et en particulier, $\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})) = \text{card}((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}) = n$. □

On donne maintenant les règles de calcul sur les matrices diagonales. Elles sont remarquablement simples :

DÉFINITION 5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est une matrice **triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire inférieure**) si et seulement si $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ (resp. $(i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$).

Une matrice triangulaire supérieure est donc une matrice de la forme : $T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et une matrice triangulaire inférieure est une matrice de la forme : $T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) se note $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$).

On note que $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. On note aussi que la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure et que la transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.

Théorème 16. $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Une base de $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ (resp. $(E_{i,j})_{1 \leq j < i \leq n}$).

DÉMONSTRATION. Par la même démarche que pour $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, il est clair que $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ (et donc $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) puis que $(E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})$. Par suite,

$$\dim(\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{K})) = \text{card}\left((E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}\right) = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice 7. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Solution 7. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices triangulaires supérieures. Donc, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 0$.

Soit $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i > j$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice AB est

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Dans cette somme, si $k > j$, alors $b_{k,j} = 0$ puis $a_{i,k} b_{k,j}$ et si $k \leq j$, alors $i > j \geq k$ et en particulier $i > k$ de sorte que $a_{i,k} = 0$ puis $a_{i,k} b_{k,j}$. Finalement, tous les termes de la somme sont nuls puis la somme est nulle.

En résumé, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i > j$, on a $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = 0$. Ceci montre que la matrice AB est triangulaire supérieure.

1.5.4 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

DÉFINITION 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est une matrice **symétrique** $\Leftrightarrow {}^t A = A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{j,i} = a_{i,j}$.

A est une matrice **anti-symétrique** $\Leftrightarrow {}^t A = -A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$.

L'ensemble des matrices symétriques se note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices anti-symétriques se note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 17.

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. De plus, la décomposition d'un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ relativement à cette décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

$$A = \frac{1}{2} (A + {}^tA) + \frac{1}{2} (A - {}^tA).$$

- $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $A \mapsto {}^tA$.

- $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $\varphi^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ d'après le théorème 13, page 11.

- φ est donc une symétrie et on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Maintenant, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \Leftrightarrow \varphi(A) - A = 0 \Leftrightarrow {}^tA = A \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}),$$

et de même

$$A \in \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \Leftrightarrow \varphi(A) + A = 0 \Leftrightarrow {}^tA = -A \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Finalement, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(\varphi + \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$. Enfin, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puis $B = \frac{1}{2} (A + {}^tA)$ et $C = \frac{1}{2} (A - {}^tA)$.

- $B + C = A$.
- ${}^tB = \frac{1}{2} ({}^tA + A) = B$ et donc $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- ${}^tC = \frac{1}{2} ({}^tA - A) = -C$ et donc $C \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

- Déterminons maintenant la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

$$A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) \quad (*).$$

Ceci montre que toute matrice symétrique est combinaison linéaire de la famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$. (*) montre aussi qu'une combinaison linéaire de la famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une matrice symétrique et finalement $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) =$

$\text{Vect}((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n})$. D'autre part, cette famille est libre car si $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}) = 0$, alors

$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} E_{i,j}$ où on a posé $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$ pour $i > j$, et donc tous les coefficients sont nuls.

Finalement, $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Parmi ces n^2 couples (i,j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, il y en a n tels que $i = j$ et il y a autant de couples (i,j) tels que $i < j$ que de couples (i,j) tels que $i > j$. Le nombre de couples (i,j) tels que $i < j$ est $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ puis

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \text{card}((E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

2.1 Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base (rappel)

On rappelle la définition de la matrice d'une famille finie (u_1, \dots, u_p) de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ donnée de cette espace : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ est l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient ligne i , colonne j , $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, est la i -ème coordonnée de u_j dans la base \mathcal{B} .

La j -ème colonne, $1 \leq j \leq p$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est constituée des coordonnées du vecteur u_j dans la base \mathcal{B} et la i -ème ligne, $1 \leq i \leq n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est constituée des i -èmes coordonnées des vecteurs u_1, \dots, u_p dans la base \mathcal{B} .

On peut condenser les notations. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, e_i^*(x) = x_i.$$

Pour chaque i , e_i^* est une forme linéaire sur E : les n formes linéaires e_1^*, \dots, e_n^* sont les **formes coordonnées** dans la base (e_1, \dots, e_n) . Avec ces notations, on a alors

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p) = (e_i^*(\mathbf{u}_j)).$$

Par exemple, si $((e_1, e_2, e_3))$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 et si $\mathbf{u}_1 = e_1 - 2e_3$ et $\mathbf{u}_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, alors

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X - 1)^2$, alors la matrice de la famille (P_0, P_1, P_2) dans la base $(X^2, X, 1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\text{Mat}_{(X^2, X, 1)}(P_0, P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soient n un entier naturel puis a_0, \dots, a_n , $n + 1$ nombres complexes deux à deux distincts. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

1) Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer les coordonnées d'un élément $P \in \mathbb{C}_n[X]$ dans cette base.

2) Déterminer la matrice de la base $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base (L_0, \dots, L_n) .

Solution 8.

1) Chaque L_i , $0 \leq i \leq n$, est un polynôme de degré n et en particulier un élément de $\mathbb{C}_n[X]$. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{i,j} = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

Ainsi, la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de l'espace $\mathbb{C}_n[X]$. De plus,

$$\text{card}(L_i)_{0 \leq i \leq n} = n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty.$$

On en déduit que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de l'espace $\mathbb{C}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Il existe $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(a_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$. On a montré que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

2) En particulier, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$X^j = \sum_{i=0}^n a_i^j L_i.$$

La matrice de $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base (L_0, \dots, L_n) est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

2.2 Définition de la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 7. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

La matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f$, est la matrice de la famille $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B})).$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f$ est un élément de $\mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$.

Avec les formes coordonnées dans la base \mathcal{B}' , on peut écrire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f = (e_i'^* (f(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemple. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 . Soit f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ défini par $f(e_1) = 2e'_1 - e'_2$, $f(e_2) = e'_2$ et $f(e_3) = -e'_1 + e'_2$. La matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est un élément de $\mathcal{M}_{2, 3}(\mathbb{R})$. □

2.3 Ecriture matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $A = (a_{i, j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Par définition de A , on a

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i, j} e'_i.$$

Soit alors $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ un élément de E .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^p a_{i, j} e'_i \right) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{i, j} x_j e'_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{i, j} x_j \right) e'_i. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $f(x) = \sum_{i=1}^p y_i e'_i$, alors, $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i, j} x_j$. Ces égalités peuvent encore s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

et on peut donc énoncer

Théorème 18. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F .

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ puis $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

Soient $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$ puis $y = f(x) = \sum_{i=1}^p y_i e'_i$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne dont les composantes sont

les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base \mathcal{B}' . Alors

$$Y = AX.$$

⇒ **Commentaire.** *Le plus long est effectivement de définir toutes les données.*

Exemple. On reprend l'exemple du paragraphe 2.2. Soit f l'élément de \mathcal{R}^3 dans \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 . L'image par f du triplet $u = (x, y, z)$ est obtenu par le calcul matriciel suivant : en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x + y + z \end{pmatrix},$$

ou encore $f((x, y, z)) = (2x - z, -x + y + z)$. □

Une conséquence immédiate du théorème 18 est

Théorème 19. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$.

$$(\forall X \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^2 \quad AX = BX) \Rightarrow A = B.$$

DÉMONSTRATION. Soit f (resp. g) l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A (resp. B) relativement aux bases canoniques de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n .

$$(\forall X \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^2 \quad AX = BX) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{K}^p, f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g \Rightarrow A = B.$$

□

2.4 Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E, F)$

Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F est de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension np de même que $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (ou aussi $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$). On sait alors que ces deux espaces sont isomorphes. On va expliciter un isomorphisme.

Théorème 20. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces de dimensions finies non nulles. Soient \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F .

1) a) $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$.

b) $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

2) $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$.

DÉMONSTRATION. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et (e'_1, \dots, e'_p) une base de F . Le coefficient ligne i , colonne j , $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g)$ est la i -ème coordonnée du vecteur $\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)$ de même que le coefficient ligne i , colonne j de la matrice $\lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$. Les deux matrices sont donc égales. □

Théorème 21. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces de dimensions finies non nulles notées respectivement n et p . Soient \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F .

L'application $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

DÉMONSTRATION . L'application φ est linéaire d'après le théorème précédent. Ensuite, si f est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = 0$, alors l'application linéaire f s'annule sur la base \mathcal{B} et donc $f = 0$. Puisque $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})) < +\infty$, on en déduit que φ est un isomorphisme. □

⇒ **Commentaire .**

◇ Une conséquence parmi d'autres du théorème 21 est le fait qu'une application linéaire est uniquement déterminée par la donnée de sa matrice relativement à deux bases.

◇ L'isomorphisme du théorème 21 n'est pas un isomorphisme canonique ou encore n'est pas un isomorphisme privilégié parmi tous les isomorphismes car il dépend du choix de deux bases. Si on prend deux autres bases, on obtient un nouvel isomorphisme qui a le même statut que ce premier.

2.5 Matrice d'une composée. Interprétation du produit de deux matrices

Théorème 22. Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces de dimensions finies non nulles notées respectivement n, p et q . Soient \mathcal{B} une base de E , \mathcal{B}' une base de F et \mathcal{B}'' une base de G . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

DÉMONSTRATION . Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)$ et $C = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Soit $x \in E$. Soient X, Y et Z les vecteurs colonnes, éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ respectivement, dont les composantes sont les coordonnées de x , $f(x)$ et $g(f(x))$ dans les bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' respectivement.

On a d'une part $Z = CX$ et d'autre part $Z = BY = BAX$. Par suite, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $CX = BAX$. D'après le théorème 19, on en déduit que $C = BA$. □

Théorème 23. Soit E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle notée n . Soit \mathcal{B} une base de E .

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$.

DÉMONSTRATION . Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Id}_E(e_j) = e_j = \sum_{i=1}^n \delta_{i,j} e_i$. Donc, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = I_n$. □

Théorème 24. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces de même dimension finie non nulle notée n . Soient \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors, f est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. Dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}.$$

DÉMONSTRATION .

• Supposons $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$ inversible. Notons g l'élément de $\mathcal{L}(F, E)$ de matrice A^{-1} relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A \times A^{-1} = I_n,$$

et donc $g \circ f = \text{Id}_E$. De même,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = A \times A^{-1} = I_n,$$

et donc $f \circ g = \text{Id}_{E'}$. On en déduit que l'application linéaire f est bijective et donc, est un isomorphisme de E sur F .

• Supposons que f soit un isomorphisme de E sur F . Posons $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1})$ (et toujours $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$).

$$B \times A = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{E}}) = I_n,$$

et de même,

$$A \times B = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{Id}_{\mathbb{F}}) = I_n.$$

On en déduit que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1})$. □

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$

Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et déterminer A^{-1} .

Solution 9. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$. f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$f(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i.$$

Par suite, A est la matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $g : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$. On a $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc, $f \in \text{GL}(\mathbb{R}_n[X])$ (car $\dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$) et $g = f^{-1}$.

Mais alors, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$. Plus précisément,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n-1}{0} & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} & (-1)^{n-2} \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Théorème 25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- 1) A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche.
- 2) A est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0\}$ où $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}$.

DÉMONSTRATION. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice A dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

1) Si A est inversible à gauche, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B \times A = I_n$. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice B dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = B \times A = I_n$$

et donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi, f est inversible à gauche et donc inversible car $\dim(\mathbb{K}^n) < +\infty$. Mais alors $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

2) Puisque $\dim(\mathbb{K}^n) < +\infty$,

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow f \in \text{GL}(\mathbb{K}^n) \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\}.$$

□

Exercice 10. (Théorème de HADAMARD). Soient $n \geq 2$ puis $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

(A est dite « à diagonale strictement dominante »). Montrer que $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Solution 10. Montrons que $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Soit $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A) &\Rightarrow AX = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| |x_i| = \left| -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j \right| \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| |x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| |x_i| \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right) \times \text{Max}\{|x_j|, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}. \end{aligned}$$

Supposons de plus $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$. Soit X un vecteur non nul de $\text{Ker}(A)$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_j|, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Puisque $X \neq 0$, $|x_{i_0}| > 0$.

$$\text{D'après ce qui précède, } |a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| \leq \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \right) |x_{i_0}| \text{ puis } |a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|.$$

En résumé, $\text{Ker}(A) \neq \{0\} \Rightarrow \exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket / |a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$. Par contraposition,

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right) \Rightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Rightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Théorème 26. Soient E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle n puis \mathcal{B} une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\forall p \in \mathbb{N}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}f)^p$.

2) Si de plus $f \in \text{GL}(E)$, alors $\forall p \in \mathbb{Z}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}f)^p$.

DÉMONSTRATION. 1) se démontre par récurrence grâce aux théorèmes 22 et 23. Si $p < 0$, le théorème 24 fournit $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})^{-p} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{(-1)(-p)} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^p$.

□

3 Changement de bases

3.1 Matrices de passage

Théorème 27. Soient E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle n puis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de n vecteurs de E .

(u_1, \dots, u_n) est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est inversible.

DÉMONSTRATION. Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base \mathcal{B} . Par définition

de A , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = u_i$ et donc

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \Leftrightarrow f \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

□

DÉFINITION 8. Soient E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle n puis \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

La **matrice de passage** de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est la matrice de la base \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

Un cas particulier du théorème 27 est

Théorème 28. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si la famille (C_1, \dots, C_n) des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si la famille (L_1, \dots, L_n) des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

DÉMONSTRATION. Si on note C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice, A est aussi la matrice de la famille (C_1, \dots, C_n) dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc, A est inversible si et seulement si (C_1, \dots, C_n) est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On sait que A est inversible si et seulement si ${}^t(A)$ est inversible ou encore A est inversible si et seulement si la famille des colonnes de tA est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou enfin A est inversible si et seulement si la famille des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

□

3.2 La formule de changement de base

Soit E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle n . Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

Soit $x \in E$. Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ (resp. $X' = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} (resp. la base \mathcal{B}'). Soit enfin $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Par

définition de P , pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{i,j} x'_j e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j \right) e_i \end{aligned}$$

et donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j.$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donné, $\sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j$ est le produit de la i -ème ligne de la matrice P par le vecteur colonne X' et on a donc montré que $X = PX'$. On peut énoncer :

Théorème 29. (la formule de changement de base)

Soit E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle n . Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Soit P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

Soit $x \in E$. Soit X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base \mathcal{B} (resp. la base \mathcal{B}'). Alors,

$$X = PX'.$$

⇒ **Commentaire.** On doit noter que la formule $X = PX'$ expriment les **anciennes coordonnées** de x (c'est-à-dire les coordonnées de x dans la base initiale \mathcal{B}) **en fonction des nouvelles coordonnées** de x (c'est-à-dire les coordonnées de x dans la nouvelle base \mathcal{B}').

Exemple. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Posons $u_1 = (2, 0, 0) = 2e_1$, $u_2 = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2$ et $u_3 = (3, 1, -1) = 3e_1 + e_2 - e_3$. La matrice de la famille (u_1, u_2, u_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Au vu de cette matrice, la famille (u_1, u_2, u_3) est de rang 3 et donc est une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 . La matrice ci-dessus est alors $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}$.

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les composantes x, y et z de ce triplet sont aussi ses coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ($v = xe_1 + ye_2 + ze_3$). Si on note (x', y', z') les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3) , les formules de changement de bases fournissent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' - y' + 3z' \\ y' + z' \\ -z' \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 11. Dans \mathbb{R}^2 , on considère la courbe \mathcal{C} d'équation $x^2 - y^2 = 2$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2) = (O, \mathcal{B})$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

On pose $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ et $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

- 1) Montrer que (e'_1, e'_2) est une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^2 et préciser la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
- 2) Ecrire les formules de changement de base (et donc de changement de repère).
- 3) Déterminer une équation de la courbe \mathcal{C} dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e'_1, e'_2)$. Identifier la courbe \mathcal{C} et la construire.

Solution 11. 1) e'_1 et e'_2 sont deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^2 . Donc, $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 . La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

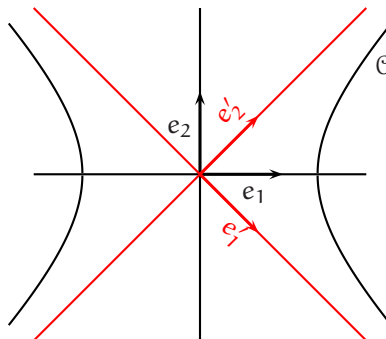
2) Les formules de changement de base s'écrivent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3) Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et (x', y') dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e'_1, e'_2)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) = 2 \\ &\Leftrightarrow x'y' = 1. \end{aligned}$$

On reconnaît l'hyperbole d'équation $y' = \frac{1}{x'}$ dans le repère \mathcal{R}' .



On déduit du théorème 29 un certain nombre de propriétés de calcul des matrices de passage :

Théorème 30.

Soit E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle.

- 1) Pour toutes bases \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' de E , $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
- 2) a) Pour toute base \mathcal{B} de E , $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.
- b) Pour toutes bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E , $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

DÉMONSTRATION .

1) Soit $x \in E$. Soit X (resp. X' , X'') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}' , \mathcal{B}'').

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' = X = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X''.$$

Ainsi, pour tout élément X'' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X'' = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X''$. On en déduit que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$.

2) a) Il est clair que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$.

b) On sait déjà que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ est inversible. Ensuite,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_n$$

et donc $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

□

3.3 Changements de bases et applications linéaires

Théorème 31.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles notées n et p respectivement.

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 deux bases de F . Soient $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1} \in GL_p(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors,

$$B = Q^{-1}AP.$$

DÉMONSTRATION . Soit $x \in E$. Soit X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}'). Soit Y (resp. Y') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $f(x)$ dans \mathcal{B}_1 (resp. \mathcal{B}'_1).

D'après les théorèmes 18 et 29,

$$QY' = Y = AX = APX'$$

et donc $Y' = Q^{-1}APX'$. D'autre part, $Y' = BX'$. Ainsi, $\forall X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $Q^{-1}APX' = BX'$. D'après le théorème 19, $B = Q^{-1}AP$.

□

Un cas particulier très important du théorème 31 est :

Théorème 32.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimensions finie non nulle notées n .

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$B = P^{-1}AP.$$

DÉMONSTRATION . C'est le cas particulier où $F = E$ puis $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$.

□

Le théorème précédent est très utilisé, entre autres pour calculer des puissances de matrices et ceci en liaison avec le théorème suivant :

Théorème 33. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Alors, $\forall p \in \mathbb{N}$, $B^p = P^{-1}A^pP$.

De plus $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow B \in GL_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $B^p = P^{-1}A^pP$.

DÉMONSTRATION. Soient \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^n puis \mathcal{B}' la base de \mathbb{K}^n telle que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP = B$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$B^p = (\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f))^p = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^p) = P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p)P = P^{-1}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^pP = P^{-1}A^pP.$$

Si de plus, A est inversible, alors $B = P^{-1}AP$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles et si B est inversible alors $A = PBP^{-1}$ est inversible et dans ce cas, le calcul ci-dessus est valable pour $p \in \mathbb{Z}$. □

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 5/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

- 1) Déterminer une base (u_1) de $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, une base (u_2) de $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base (u_3) de $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- 2) a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 . Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.
 b) Déterminer P^{-1} .
 c) Déterminer la matrice D de f dans la base (u_1, u_2, u_3) .
- 3) a) A l'aide des formules de changement de base, exprimer A en fonction de P et D .
 b) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$ (après en avoir justifié l'existence).

Solution 12.

1) • Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0 \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 3/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ 3x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2}z = 0 \\ 3x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = y \\ 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc, $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 = (1, 1, 1)$.

• Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$u \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow (f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0 \Leftrightarrow (A + 2I_3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 9/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ 3x + \frac{9}{2}y - \frac{9}{2}z = 0 \\ 3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x + y \\ 2x + 3y - 3(-2x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = z.$$

Donc, $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(\mathbf{u}_2)$ où $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$.

• Soient $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow (f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow (A - 4I_3)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & 3/2 \\ 3 & 9/2 & -9/2 \\ 3 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \\ 3x - \frac{3}{2}y - \frac{9}{2}z = 0 \\ 3x - \frac{3}{2}y - \frac{9}{2}z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x + y \\ 2x - y - 3(2x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \text{ et } z = x. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(f - 4\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(\mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 1)$.

2) a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ 2a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Donc, la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est libre. De plus, $\text{card}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$. Finalement, la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

La matrice de passage de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ à la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) P^{-1} est la matrice de passage de la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ à la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Or

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \text{(I)} \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \text{(II)} \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 & \text{(III)} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) & \text{(I) - (III)} \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) + \mathbf{e}_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) & \text{(I) - (III)} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) - \frac{1}{2}(-\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) & \text{(I) - (III)} \\ \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Par construction, $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$, $f(\mathbf{u}_2) = -2\mathbf{u}_2$ et $f(\mathbf{u}_3) = 4\mathbf{u}_3$. Donc,

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{diag}(1, -2, 4).$$

3) a) La formule de changement de base fournit :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = PDP^{-1}.$$

b) D est inversible car aucun des coefficients diagonaux de D n'est nul puis A est inversible en tant que produit de matrices inversibles (d'inverse $(PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$). Donc, A^n existe pour tout n de \mathbb{Z} et

$$\begin{aligned} A^n &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4^n \\ 1 & (-2)^n & -4^n \\ 1 & (-2)^n & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1-4^n & -1+4^n \\ 2-2(-2)^n & 1+4^n & -1+2(-2)^n-4^n \\ 2-(-2)^n & 1-4^n & -1+2(-2)^n+4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4 Matrices équivalentes. Matrices semblables

DÉFINITION 9.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. B est **équivalente** à A si et seulement si il existe $(P, Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = QAP$.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. B est **semblable** à A si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Un premier théorème immédiat est :

Théorème 34. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Si B est semblable à A, alors B est équivalente à A.

La réciproque de l'implication précédente est fautive, ne serait-ce que parce que la notion d'équivalence des matrices concerne les matrices rectangulaires, alors que la notion de matrices semblables ne concerne que les matrices carrées. Même dans le cas de matrices carrées, on verra au fur et à mesure des exemples de matrices équivalentes mais pas semblables.

Théorème 35.

La relation « B est équivalente à A » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La relation « B est semblable à A » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

DÉMONSTRATION. On démontre le théorème pour la relation « B est équivalente à A ». On note \mathcal{R} cette relation ou encore, on pose : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow B$ est équivalente à A $\Leftrightarrow \exists (P, Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) / B = QAP$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On prend $Q = I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = I_p \in GL_p(\mathbb{K})$. On a alors $QAP = I_nAI_p = A$. Par suite, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A\mathcal{R}A$. La relation \mathcal{R} est réflexive.

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. Supposons $A\mathcal{R}B$ ou encore supposons B équivalente à A. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$. Mais alors, $Q^{-1}BP^{-1} = Q^{-1}QAPP^{-1} = A$. Ainsi, si on prend $Q_1 = Q^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_1 = P^{-1} \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $A = Q_1BP_1$ et donc $B\mathcal{R}A$. La relation \mathcal{R} est symétrique.

• Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$. Supposons $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Il existe $(Q_1, Q_2) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ et $(P_1, P_2) \in (GL_p(\mathbb{K}))^2$ telles que $B = Q_1AP_1$ et $C = Q_2BP_2$. Mais alors, $C = Q_2Q_1AP_1P_2$. Ainsi, si on prend $Q = Q_2Q_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = P_1P_2 \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $C = QAP$ et donc $A\mathcal{R}C$. La relation \mathcal{R} est transitive.

On a montré que la relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

\Rightarrow **Commentaire.** Dorénavant, on peut dire que les matrices A et B sont équivalentes (ou pas) à la place de B est équivalente à A. De même pour A et B sont semblables (ou pas).

Théorème 36.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. A et B sont équivalentes si et seulement si il existe E et F espaces de dimensions respectives p et n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' bases de E , \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 base de F , $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1}(f)$.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. A et B sont semblables si et seulement si il existe E espace de dimension n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' bases de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe E et F espaces de dimensions respectives p et n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' bases de E , \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 base de F , $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1}(f)$. Si on pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1}$, les formules de changement de base fournissent $B = Q^{-1}AP$ où $Q^{-1} \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont donc équivalentes.

Réciproquement, supposons A et B équivalentes. Il existe $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \text{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $B = QAP$. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 les bases canoniques de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n respectivement. Soient \mathcal{B}' et \mathcal{B}'_1 les bases de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n respectivement définies par $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}'_1} = Q^{-1}$. Soit enfin f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(f)$. D'après les formules de changement de base, on a $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1}(f)$. □

Ainsi, deux matrices rectangulaires équivalentes peuvent être interprétées comme les matrices d'une même application linéaire relativement à deux couples de bases éventuellement différents. De même, deux matrices carrées semblables peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases éventuellement différents.

4 Calculs par blocs

Étudions d'abord un exemple. Soient E un \mathbb{K} -espace de dimension finie non nulle n puis F et G deux sous-espaces supplémentaires de E , de dimensions respectives p et $q = n - p$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Soit f la projection sur F parallèlement à G . Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(e_i) = e_i$ et pour $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $f(e_i) = 0$. Donc,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_q$

On dispose d'une manière beaucoup plus synthétique de décrire cette matrice, une description **par blocs** :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{q,p} \\ 0_{p,q} & 0_{q,q} \end{pmatrix},$$

où I_p est la matrice unité de format p et $0_{u,v}$ est la matrice nulle de format (u, v) . Les termes écrits dans la matrice ne sont plus des nombres mais des matrices rectangulaires.

De même, si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G et \mathcal{B} est la base définie plus haut,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{q,p} \\ 0_{p,q} & -I_q \end{pmatrix}.$$

De manière générale, une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pourra être décrite par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$ ou plus généralement

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} & \dots & A_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,j} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$$

les $A_{i,j}$ sont des matrices de format (n_i, p_j) où $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_l$ sont des entiers naturels non nuls tels que $n_1 + \dots + n_k = n$ et $p_1 + \dots + p_l = p$.

Il s'agit maintenant d'apprendre à calculer par blocs.

• Il est immédiat que si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} & \dots & A_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,j} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,j} & \dots & B_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i,1} & \dots & B_{i,j} & \dots & B_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{k,1} & \dots & B_{k,j} & \dots & B_{k,l} \end{pmatrix}$ où pour tout (i, j) , $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de format (n_i, p_j) , alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,j} + \mu B_{1,j} & \dots & \lambda A_{1,l} + \mu B_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{i,1} + \mu B_{i,1} & \dots & \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j} & \dots & \lambda A_{i,l} + \mu B_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{k,1} + \mu B_{k,1} & \dots & \lambda A_{k,j} + \mu B_{k,j} & \dots & \lambda A_{k,l} + \mu B_{k,l} \end{pmatrix}.$$

• Le produit de deux matrices définies par blocs n'est pas plus compliqué. Il y a juste quelques précautions à prendre. On se donne deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de sorte que le produit AB est défini. Commençons par découper A et B en quatre blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$. Si on a envie que les produits $A_{1,1}B_{1,1}$ ou $A_{1,1}B_{1,2}$ ou ... soient définis, il s'agit à chaque fois que le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ soit égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$. On impose donc au découpage de A en colonnes d'être identique au découpage de B en lignes :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{A_{1,1}} & \overbrace{A_{1,2}} \\ \overbrace{A_{2,1}} & \overbrace{A_{2,2}} \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ et } B = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \overbrace{B_{1,1}} & \overbrace{B_{1,2}} \\ \overbrace{B_{2,1}} & \overbrace{B_{2,2}} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions-le en analysant par exemple le bloc en haut à gauche. $A_{1,1}B_{1,1}$ est défini et de format (n_1, q_1) de même que $A_{1,2}B_{2,1}$. Donc, $A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}$ est défini et de format (n_1, q_1) . On pose alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

$A_{1,1} = (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq p_1}}$, $A_{1,2} = (\alpha'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq p_2}}$, $B_{1,1} = (\beta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ 1 \leq j \leq q_1}}$ et $B_{2,1} = (\beta'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_2 \\ 1 \leq j \leq q_1}}$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \llbracket 1, q_1 \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice AB est

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} &= \sum_{k=1}^{p_1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=p_1+1}^p a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{i,k} \beta_{k,j} + \sum_{k=p_1+1}^p \alpha'_{i,k-p_1} \beta'_{k-p_1,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{i,k} \beta_{k,j} + \sum_{l=1}^{p_2} \alpha'_{i,l} \beta'_{l,j} \end{aligned}$$

qui est bien le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}$.

Plus généralement, si on découpe la matrice A en blocs $A_{i,k}$ et la matrice B en blocs $B_{k,j}$, de sorte que le découpage en colonne de A soit le même que le découpage en ligne de B ($n = n_1 + \dots + n_s$, $p = p_1 + \dots + p_t$, $q = q_1 + \dots + q_u$), alors on peut effectuer le calcul de AB par blocs, le bloc $n^\circ(i, j)$ étant $\sum_{k=1}^t A_{i,k} B_{k,j}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

où $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 2)$. On a $S^2 = I_2$ (si s est l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice S dans la base canonique (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 , alors $s(e_1) = e_2$ et $s(e_2) = e_1$ puis $s^2(e_1) = e_1$ et $s^2(e_2) = e_2$ puis $s^2 = \text{Id}$). On peut alors calculer A^2 et plus généralement les puissances de A par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \\ = \text{diag}(1, 1, 1, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = \begin{pmatrix} S^{2p} & 0 \\ 0 & D^{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & D^{2p} \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 1, 2^{2p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{pmatrix}$ et

$$A^{2p+1} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D^{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{pmatrix}.$$

□

5 Rang d'une matrice

5.1 Définition du rang d'une matrice

DÉFINITION 10. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le **rang** de A , noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Par exemple, $\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

5.2 Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Théorème 37. Soient E un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis \mathcal{B} une base de E . Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de p vecteurs de E , $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

Alors, $\text{rg}(A) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

DÉMONSTRATION. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow E$. φ est linéaire et l'image par φ de la base

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la base (e_1, \dots, e_n) de E . Donc, φ est un isomorphisme.

Par suite, en notant C_1, \dots, C_p , les colonnes de A

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \dim(\varphi(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p))) = \dim(\text{Vect}(\varphi(C_1), \dots, \varphi(C_p))) \\ &= \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)) = \text{rg}(u_1, \dots, u_p). \end{aligned}$$

□

En reprenant les premières propriétés du rang d'une famille de vecteurs, on en déduit immédiatement

Théorème 38. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, $\text{rg}(A) \leq \text{Min}\{n, p\}$.

De plus,

$\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

et en particulier

Théorème 39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\text{rg}(A) \leq n$.

De plus, $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

5.3 Lien avec le rang d'une application linéaire

Théorème 40. Soient E et F deux espaces de dimensions respectives n et p puis \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ puis $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$.

Alors, $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$.

DÉMONSTRATION. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Alors,

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \text{rg}(A).$$

□

En appliquant les propriétés déjà connues du rang d'une application linéaire (voir la fin du chapitre « Dimensions »), on obtient :

Théorème 41.

- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K}))^2$, $\text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\text{rg}(\lambda A) = \begin{cases} \text{rg}(A) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \leq \text{rg}(A)$.
- $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K}))^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\text{rg}(\lambda A + \mu B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

De même,

Théorème 42.

- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p, q}(\mathbb{K})$, $\text{rg}(A \times B) \leq \text{Min}\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$ ou encore $\text{rg}(A \times B) \leq \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(A \times B) \leq \text{rg}(B)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$, $\forall (P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \text{GL}_p(\mathbb{K})$, $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$ et $\text{rg}(QA) = \text{rg}(A)$.

DÉMONSTRATION. L'inégalité $\text{rg}(A \times B) \leq \text{Min}\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$ est la traduction en termes de matrices de l'inégalité déjà connue $\text{rg}(f \times g) \leq \text{Min}\{\text{rg}(f), \text{rg}(g)\}$.

Étudions alors les deux cas d'égalité. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On a déjà $\text{rg}(AP) \leq \text{rg}(A)$. Mais d'autre part, $\text{rg}(A) = \text{rg}((AP)P^{-1}) \leq \text{rg}(AP)$. Finalement, $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$. De même, $\text{rg}(QA) = \text{rg}(A)$ si Q est inversible.

□

On en déduit encore :

Théorème 43. Deux matrices équivalentes ont même rang. Deux matrices semblables ont même rang.

5.4 Une caractérisation du rang d'une matrice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Pour $r \in \llbracket 0, \text{Min}\{n, p\} \rrbracket$, on définit la matrice J_r par : si $r = 0$, $J_r = 0_{n, p}$ et si $r \geq 1$, J_r est la matrice de format (n, p) telle que pour $1 \leq i \leq r$, le coefficient ligne i , colonne i , de J_r est égal à 1, tous les autres coefficients étant nuls. La matrice J_r peut se définir par blocs (en adaptant la lecture dans les cas particuliers $r = 0$, ou $r = p$ ou $r = n$) :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, p-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, p-r} \end{pmatrix},$$

I_r désignant la matrice unité de format r et $0_{u, v}$ désignant la matrice nulle de format (u, v) .

On peut alors caractériser le rang d'une matrice à partir de la matrice J_r .

Théorème 44. Soit $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$. Soit $r \in \llbracket 0, \text{Min}\{n, p\} \rrbracket$.

$\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow A$ est équivalente à J_r .

DÉMONSTRATION.

• Supposons A équivalente à J_r . Alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(J_r)$, puisque deux matrices équivalentes ont même rang, et donc $\text{rg}(A) = r$ (d'après le travail effectué sur le calcul du rang d'une famille de vecteurs dans le chapitre « Dimensions »).

• Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ de rang $r \in \llbracket 0, \text{Min}\{n, p\} \rrbracket$. Il s'agit de montrer que A est équivalente à J_r .

Soit f l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A relativement aux bases canoniques \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n respectivement. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{K}^p) - \text{rg}(f) = p - \text{rg}(A) = p - r.$$

Si $r = 0$, alors $f = 0$ puis $A = 0_{n,p}$ et d'autre part, $J_r = 0_{n,p}$. Dans ce cas, A et J_r sont équivalentes. Dorénavant, $1 \leq r \leq p$.
 Soit $\mathcal{F} = (e_{r+1}, \dots, e_p)$ si $r < p$ ou $\mathcal{F} = \emptyset$ si $r = p$, une base de $\text{Ker}(f)$. On complète (éventuellement) la famille libre \mathcal{F} en $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ base de \mathbb{K}^p . On sait que $S = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans \mathbb{K}^p .
 D'après le théorème du rang, on sait que la restriction de f à S est un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$. On en déduit que la famille $\mathcal{F}' = (e'_1, \dots, e'_r) = (f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$. On la complète (éventuellement) en $\mathcal{B}'_1 = (e'_1, \dots, e'_n)$ base de \mathbb{K}^n .

Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $f(e_i) = e'_i$ et pour $i > r$ (si $r < p$), on a $f(e_i) = 0$. Donc, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1}(f) = J_r$. Soient $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_1}^{\mathcal{B}'}$. Les formules de changement de base fournissent $J_r = Q^{-1}AP$. Ceci montre que A et J_r sont équivalentes. □

On déduit du théorème 44 :

Théorème 45. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. A et B sont équivalentes si et seulement si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

DÉMONSTRATION. On sait déjà que deux matrices équivalentes ont même rang.

Inversement, si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r$, alors A et B sont toutes deux équivalentes à J_r et donc, par transitivité, A et B sont équivalentes. □

Du théorème 44, on déduit aussi :

Théorème 46. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$.

DÉMONSTRATION. Soit r le rang de A . La matrice A est équivalente à la matrice J_r et donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QJ_rP$. Mais alors, ${}^tA = {}^tP {}^tJ_r {}^tQ$ avec ${}^tP \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et ${}^tQ \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$. Maintenant, la matrice tJ_r est la matrice J_r de format (p, n) : ${}^tJ_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{r, p-r} & 0_{p-r, n-r} \end{pmatrix}$. Ceci montre que tA est de rang r . □

⇒ **Commentaire.**

◇ Une conséquence de ce résultat est que tout résultat concernant le rang d'une matrice, énoncé en termes de colonnes de cette matrice, peut aussi être énoncé en termes de lignes. Par exemple, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$\text{rg}(A)$ est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A

$\text{rg}(A)$ est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes de A

$\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

\Leftrightarrow les lignes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

$\text{rg}(A) = p \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

\Leftrightarrow les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

et si de plus $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

\Leftrightarrow les lignes de A forment une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$

◇ Il faut concrétiser le fait que $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$. Construisons une matrice A carrée de format 3 et de rang 2 en plaçant d'abord 2 colonnes non colinéaires puis en mettant en troisième colonne la somme des deux autres :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

La famille des lignes de cette matrice doit aussi être de rang 2 et donc, puisque les deux premières lignes sont non colinéaires, et bien que nous n'ayons rien fait pour ça, la troisième ligne doit être une combinaison linéaire des deux premières. De fait, $L_3 = \frac{1}{2}L_1 + \frac{11}{4}L_2$ (nous n'avons vraiment pas fait exprès).

5.5 Transformations élémentaires ne modifiant pas le rang d'une matrice

5.5.1 Rappel. Codage des transformations élémentaires

On sait que le rang d'une matrice peut s'interpréter comme le rang d'une certaine famille de vecteurs et on a donné dans le chapitre « Dimensions » des transformations sur les vecteurs de cette famille ne modifiant pas le rang de cette famille. En s'adaptant aux notations matricielles, on obtient des transformations sur les colonnes d'une matrice ne modifiant pas

son rang : en appliquant l'une de ces transformations, on obtient une nouvelle matrice qui a même rang que la matrice de départ ou encore, on obtient une matrice équivalente à la matrice de départ.

On sait aussi que $\text{rg}(A) = \text{rg}(^tA)$. Les transformations sur les colonnes fournissent aussi des transformations sur les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice.

Les transformations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice sont :

- Echange de deux colonnes. L'échange de la colonne i et de la colonne j ($i \neq j$) se note $C_i \leftrightarrow C_j$.
Echange de deux lignes. L'échange de la ligne i et de la ligne j ($i \neq j$) se note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplier une colonne par un nombre $\lambda \neq 0$. Le remplacement de la colonne j par λ fois cette ligne se note $C_j \leftarrow \lambda C_j$.
Multiplier une ligne par un nombre $\lambda \neq 0$. Le remplacement de la ligne i par λ fois cette ligne se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajouter une colonne à une autre. Le remplacement de la colonne j par la colonne j + la colonne i se note $C_j \leftarrow C_j + C_i$.
Ajouter une ligne à une autre. Le remplacement de la ligne i par la ligne i plus la ligne j se note $L_i \leftarrow L_i + L_j$.


On en déduit d'autres transformations moins élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice, ne modifiant pas le rang de cette matrice :

- Permuter des colonnes : pour toute permutation σ de $[[1, n]]$, $\text{rg} \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_p \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & \dots & C_{\sigma(p)} \end{pmatrix}$.

Permuter des lignes : pour toute permutation σ de $[[1, n]]$, $\text{rg} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

- Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes : $C_j \leftarrow C_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i C_i$.

Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes : $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$.

 On peut appliquer la transformation $C_i \leftarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j$ sans changer le rang si on prend bien garde au fait que λ_i (le coefficient de C_i) soit **non nul**. De même pour les lignes.

Notons encore qu'on ne change pas le rang d'une matrice quand :

- on supprime une colonne de 0 ou une ligne de 0 (la nouvelle matrice a alors un format différent du format de départ),
- On supprime une colonne (ou une ligne) qui est égale ou plus généralement colinéaire à une autre colonne (ou une autre ligne).
- On supprime une colonne (ou une ligne) qui est combinaison linéaire d'autres colonnes (ou d'autres lignes).

Exercice 13. Soit $p \geq 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a & b & 0 \\ & & & 0 & b & a & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{C})$.

Déterminer $\text{rg}(A)$ en fonction de a et b .

Solution 13. On effectue les transformations : $\forall j \in [[1, p]]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j}$. On obtient

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} a+b & 0 & \dots & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a+b & b & 0 & & \\ & & & 0 & a+b & a & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ a+b & 0 & \dots & & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

• Si $a + b = 0$ ou encore si $b = -a$, en supprimant les colonnes de 0 puis en supprimant les p premières lignes, chacune étant colinéaire à l'une des p dernières, on a

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a & 0 & & \\ a & 0 & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = \text{rg}(aI_p).$$

Si $b = -a \neq 0$, $\text{rg}(A) = p$ et si $a = b = 0$, $\text{rg}(A) = 0$.

• Si $a + b \neq 0$ ou encore si $b \neq -a$,

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 1 & b & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & a & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

On effectue les transformations : $\forall i \in \llbracket p+1, 2p \rrbracket$, $L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}$. On obtient

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & b & 0 & & & \\ & & & & a-b & 0 & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Si $b \neq a$ (et $b \neq -a$), $\text{rg}(A) = 2p$ (matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls). Si $a = b \neq 0$, en supprimant les p dernières lignes qui sont nulles puis les p dernières colonnes, chacune colinéaire à l'une des p premières, on obtient $\text{rg}(A) = \text{rg}(I_p) = p$.

En résumé,

- Si $b \neq a$ et $b \neq -a$, $\text{rg}(A) = 2p$ et en particulier, A est inversible.
- Si $b = a \neq 0$ et $b = -a \neq 0$, $\text{rg}(A) = p$.
- Si $a = b = 0$, $\text{rg}(A) = 0$.

Exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B la matrice diagonales par blocs définie par

$$B = \begin{pmatrix} A & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \text{ (où } p \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0_n \text{ est la matrice nulle de format } n\text{)}.$$

Déterminer le rang de B en fonction du rang de A .

Solution 14. Soit $r = \text{rg}(A) \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si $r = 0$, alors $A = 0$ puis $B = 0$ et donc $\text{rg}(B) = 0$. On suppose maintenant $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Il existe $(P_1, Q_1) \in (\text{GL}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $A = Q_1 J_r P_1$.

On pose $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & P_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & P_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & Q_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & Q_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Un calcul par blocs montre

que P et Q sont inversibles, d'inverses respectifs $\begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & P_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & P_1^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & Q_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & Q_1^{-1} \end{pmatrix}$.

De nouveau, un calcul par blocs fournit $A = Q \begin{pmatrix} J_r & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & J_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & J_r \end{pmatrix} P$ puis $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} J_r & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & J_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & J_r \end{pmatrix}$. En

supprimant les colonnes nulles puis les lignes nulles, on obtient

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} I_r & 0_n & \dots & 0_n \\ 0_n & I_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ 0_n & \dots & 0_n & I_r \end{pmatrix} = \text{rg}(I_{pr}) = pr = p \text{rg}(A),$$

ce qui reste vrai quand $r = 0$.

On a montré que $\text{rg}(B) = p \text{rg}(A)$.

5.5.2 Interprétation en terme de calcul matriciel des transformations élémentaires

On va voir que chacune des transformations précédentes que s'interpréter en terme de calcul matriciel. Commençons par un résultat utile pour la suite et à connaître en tant que tel. On calcule une bonne fois pour toutes le produit d'une matrice A par une matrice élémentaire $E_{i,j}$.

Théorème 47. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note L_1, \dots, L_n les lignes de A et C_1, \dots, C_p les colonnes de A .

• Soient $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. \downarrow
 $A E_{i,j} = (0 \dots 0 \ C_i \ 0 \dots 0)$

• Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$E_{i,j} A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

DÉMONSTRATION .

- Soit $A = (a_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq p}} a_{k,l} E_{k,l} \right) E_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq p}} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq p}} a_{k,l} \delta_{l,i} E_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^p a_{k,i} E_{k,j}. \end{aligned}$$

Donc, $AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ou encore $AE_{i,j}$ est la matrice définie en colonnes par

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Soit $A = (a_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ puis $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \delta_{l,j})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} E_{i,j}A &= E_{i,j} \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq p}} a_{k,l} E_{k,l} \right) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq p}} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq l \leq p}} a_{k,l} \delta_{k,j} E_{i,l} \\ &= \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l}. \end{aligned}$$

Donc, $E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & \dots & a_{j,p} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ou encore $E_{i,j}A$ est la matrice définie en lignes par

$$E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

□

On sert maintenant du résultat précédent pour interpréter en terme de calcul matriciel les deux transformations $C_j \leftarrow C_j + C_i$ (ou $L_i \leftarrow L_i + L_j$) et $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (ou $L_i \leftarrow \lambda L_i$) dans une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour remplacer C_j par λC_j , il suffit d'ajouter $(\lambda - 1)C_j$ à C_j . D'après le théorème 47, ceci s'obtient en remplaçant la matrice A par la matrice $A + (\lambda - 1)AE_{j,j} = A(I_p + (\lambda - 1)E_{j,j})$. On pose $\Delta_j(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{j,j}$. On a explicitement

$$\Delta_j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \vdots \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1),$$

où λ a été placé en j -ème colonne. $\Delta_j(\lambda)$ s'appelle une **matrice de dilatation**. En résumant les calculs précédents, on a

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_j & \dots & C_p \end{pmatrix}, \text{ alors } A\Delta_j(\lambda) = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & \lambda C_j & \dots & C_p \end{pmatrix}.$$

De même,

En colonne $j = 1$, on a placé un 1 en ligne $i = \sigma(1) = 4$.

De manière générale, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, P_σ est une matrice carrée de format n ayant exactement un 1 par ligne et par colonne et des 0 partout ailleurs. Une telle matrice est appelée **matrice de permutation**. Les règles de calcul sur les matrices de permutation sont les suivantes :

Théorème 48.

- $\forall (\sigma, \sigma') \in (\mathcal{S}_n)^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.
- $P_{\text{Id}_{[1, n]}} = I_n$.
- $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, P_\sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

DÉMONSTRATION .

- Soit $(\sigma, \sigma') \in (\mathcal{S}_n)^2$. Soit $(i, j) \in [1, n]^2$. Le coefficient ligne i , colonne j , de $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ est

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{k, \sigma'(j)} = \delta_{i, \sigma(\sigma'(j))} \text{ (obtenu pour } k = \sigma'(j)\text{)}$$

qui est aussi le coefficient ligne i , colonne j , de $P_{\sigma \circ \sigma'}$. Ceci montre que $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

- $P_{\text{Id}_{[1, n]}} = (\delta_{i, \sigma(i)})_{1 \leq i, j \leq n} = I_n$
- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors, $\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n$

$$P_\sigma \times P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = P_{\text{Id}_{[1, n]}} = I_n$$

Ceci montre que $P_\sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$. □

Analysons maintenant le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ par une matrice de permutation P_σ , à droite ou à gauche.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ et $\sigma \in \mathcal{S}_p$. Soit $(i, j) \in [1, n] \times [1, p]$. Le coefficient ligne i , colonne j , de AP_σ est

$$\sum_{k=1}^p a_{i, k} \delta_{k, \sigma(j)} = a_{i, \sigma(j)} \text{ (obtenu quand } k = \sigma(j)\text{)}.$$

La matrice AP_σ est donc $\begin{pmatrix} a_{1, \sigma(1)} & \dots & a_{1, \sigma(j)} & \dots & a_{1, \sigma(p)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n, \sigma(1)} & \dots & a_{n, \sigma(j)} & \dots & a_{n, \sigma(p)} \end{pmatrix}$. Cette nouvelle matrice est plus agréablement décrite en colonnes :

$$\text{Si } A = (C_1 \quad \dots \quad C_j \quad \dots \quad C_n), \text{ alors } AP_\sigma = (C_{\sigma(1)} \quad \dots \quad C_{\sigma(j)} \quad \dots \quad C_{\sigma(n)}).$$

Ainsi, multiplier A par P_σ à droite consiste à appliquer aux colonnes de A la permutation σ . Par exemple, si

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Analysons de même le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ par une matrice de permutation P_σ , à gauche. Soient $A \in \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K})$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Soit $(i, j) \in [1, n] \times [1, p]$. Le coefficient ligne i , colonne j , de $P_\sigma A$ est

$$\sum_{k=1}^p \delta_{i, \sigma(k)} a_{k, j} = a_{\sigma^{-1}(i), j} \text{ (obtenu quand } k = \sigma^{-1}(i)\text{)}.$$

La matrice $P_\sigma A$ est donc $\begin{pmatrix} a_{\sigma^{-1}(1), 1} & \dots & a_{\sigma^{-1}(1), p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\sigma^{-1}(i), 1} & \dots & a_{\sigma^{-1}(i), p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\sigma^{-1}(n), 1} & \dots & a_{\sigma^{-1}(n), p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma^{-1}(i)} \\ \vdots \\ L_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$. Multiplier A par P_σ à gauche consiste à appliquer aux lignes de A la permutation σ^{-1} .

On note enfin que, puisque P_σ est inversible, on retrouve le fait que permuter les lignes ou les colonnes d'une matrice ne modifie pas son rang.

5.6 Matrices extraites. Une autre caractérisation du rang

5.6.1 Définition d'une matrice extraite

On se donne une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une **matrice extraite** de la matrice A est une matrice de la forme

$$A_{I,J} = (\alpha_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq q}} \text{ où}$$

- $(m, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,
- $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i_1 < \dots < i_m$,
- $J = \{j_1, \dots, j_q\} \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ avec $j_1 < \dots < j_q$,
- $\forall (k, l) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket, \alpha_{k,l} = a_{i_k, j_l}$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format 2, extraite de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Elle est obtenue en « barrant puis supprimant » dans la matrice A les colonnes 1 et 3 et la ligne 3. \square

5.6.2 Caractérisation du rang comme le format maximal d'une matrice extraite inversible

Théorème 49. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Le rang de A est le format maximum d'une matrice carrée extraite de A et inversible.

Plus explicitement, si $r \in \llbracket 1, \text{Min}\{n, p\} \rrbracket$,

$\text{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible et toute matrice carrée extraite de A de format strictement supérieur à r est non inversible.

DÉMONSTRATION. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. On note C_1, \dots, C_p les colonnes de A .

• Soit $r \in \llbracket 1, \text{Min}\{n, p\} \rrbracket$. On suppose qu'il existe une matrice carrée de format r , extraite de A et inversible. Quite à permuter les colonnes de A puis les lignes de A , ce qui ne modifie pas le rang de A , on peut supposer que la matrice extraite $A' = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq r}$ est inversible. Montrons que la famille (C_1, \dots, C_r) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient C'_1, \dots, C'_r les vecteurs C_1, \dots, C_r tronqués à la r -ème composante (si pour $j \in \llbracket 1, r \rrbracket, C_j = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$, alors $C'_j = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq r}$). La matrice $A' = \begin{pmatrix} C'_1 & \dots & C'_r \end{pmatrix}$ est une matrice carrée inversible. Donc, (C'_1, \dots, C'_r) est une base de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ et en particulier une famille libre de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Mais alors, pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$,

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j C_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j C'_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

La famille (C_1, \dots, C_r) est donc une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit que $\text{rg}(A) \geq r$.

• Réciproquement, supposons que $\text{rg}(A) \geq r$. Il existe r colonnes de A constituant une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Quite à permuter les colonnes de A , ce qui ne modifie pas le rang de A , on peut supposer que (C_1, \dots, C_r) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. $\text{rg}(A_1) = r$ et donc, on peut trouver r lignes de A_1 constituant une famille libre de $\mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{K})$. Soit A' la matrice carrée de format r constituée de ces r lignes. A' est une matrice carrée de format r , extraite de A et de plus A' est inversible car de rang r .

On a montré que $\text{rg}(A) \geq r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r , extraite de A et inversible.

Puisque, $\text{rg}(A) = r$ si et seulement si $\text{rg}(A) \geq r$ et $\text{rg}(A) \not\geq r+1$, on en déduit que $\text{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r , extraite de A et inversible et toute matrice carrée de format strictement supérieur à r , extraite de A , est non inversible. \square

On peut améliorer le théorème 49 en limitant le nombre de vérifications :

Théorème 50. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Soit $r \in \llbracket 1, \text{Mi}\{n, p\} - 1 \rrbracket$.

$\text{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible et toute matrice carrée extraite de A de format $r+1$ est non inversible.

DÉMONSTRATION. L'implication de gauche à droite est une conséquence du théorème 49.

Inversement, supposons qu'il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible et que toute matrice carrée extraite de A de format $r+1$ est non inversible. Puisqu'il existe une matrice carrée de format r extraite de A et inversible, on a $\text{rg}(A) \geq r$. Mais on ne peut avoir $\text{rg}(A) \geq r+1$, car sinon il existe une matrice carrée de format $r+1$ extraite de A et inversible. Ceci montre que $\text{rg}(A) = r$. \square

6 Trace

6.1 Trace d'une matrice carrée

DÉFINITION 11. Soient $n \geq 1$ puis $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La **trace** de la matrice A , notée $\text{Tr}(A)$, est la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Théorème 51. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$$

DÉMONSTRATION . Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$$

□

Théorème 52. $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

DÉMONSTRATION . Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Le coefficient ligne i , colonne i , de AB est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i}$ et le

coefficient ligne j , colonne j , de BA est $\sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j}$. Donc

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} \right) = \text{Tr}(BA).$$

□

Exercice 15. Existe-t-il $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $AB - BA = I_n$?

Solution 15. Non, car pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0 \neq n = \text{Tr}(I_n)$.

Théorème 53. Deux matrices semblables ont même trace.

DÉMONSTRATION . Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ puis $B = P^{-1}AP$.

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

□

Si A, B et C sont trois matrices carrées, on a $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$ car par exemple $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}((AB)C) = \text{Tr}(C(AB)) = \text{Tr}(CAB)$. Mais en général, $\text{Tr}(ABC) \neq \text{Tr}(ACB)$. Par exemple, prenons $A = E_{1,2}, B = E_{2,2}, C = E_{2,1}$. Alors, $ABC = E_{1,1}$ et donc $\text{Tr}(ABC) = 1$ et $ACB = 0$ et donc $\text{Tr}(ACB) = 0$.

Exercice 16.

1) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

2) Les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Solution 16.

1) $\text{Tr}(A) = 4 + 2 + 1 = 7$ et $\text{Tr}(B) = -2 + 1 + 2 = 1$. $\text{Tr}(A) \neq \text{Tr}(B)$ et donc A et B ne sont pas semblables.

2) Pour $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$, $P^{-1}I_3P = I_3$ ou encore une matrice semblable à I_3 est égale à I_3 . On en déduit que I_3 et A ne sont pas semblables. Pourtant, $\text{Tr}(A) = 1 + 4 - 2 = 3 = \text{Tr}(I_3)$.

Ainsi, deux matrices carrées peuvent avoir même trace sans être semblables. La réciproque du théorème 53 est fautive.

6.2 Trace d'un endomorphisme

Théorème 54. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Alors, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$.

DÉMONSTRATION. Soit P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Les formules de changement de base fournissent $A' = P^{-1}AP$. Les matrices A et A' sont semblables et on en déduit que ces matrices ont même trace. □

Ainsi, le nombre $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} (ce nombre ne dépend que de f). Ceci motive la définition suivante :

DÉFINITION 12. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

La **trace** de f , notée $\text{Tr}(f)$, est la trace de sa matrice dans une base donnée \mathcal{B} de E .

Le théorème qui suit montre que la trace peut avoir une signification très concrète.

Théorème 55. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n . Soit p une projection.

Alors, $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

DÉMONSTRATION. Si $\text{rg}(p) = 0$, alors $p = 0$ puis $\text{Tr}(p) = 0 = \text{rg}(p)$. Si $\text{rg}(p) = n$, alors $p = \text{Id}_E$ (car par exemple, $\text{rg}(p) = n \Rightarrow p \in \text{GL}(E)$ puis $p^2 = p \Rightarrow p = \text{Id}_E$). Dans ce cas, $\text{Tr}(p) = n = \text{rg}(p)$.

On suppose dorénavant que $\text{rg}(p) = r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Dans une base \mathcal{B} de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, la matrice A de p est $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$. Mais alors, $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(A) = r = \text{rg}(p)$. □

Exemple. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

$A^2 = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = A$. Donc, $f^2 = f$ et f est une projection.

$$\text{rg}(f) = \text{Tr}(f) = \frac{1}{9}(1 + 4 + 4) = 1,$$

(ce qui est encore plus immédiat ici à partir de la matrice mais dans le cas général, la trace est certainement plus facile à calculer que le rang). Ainsi, f est une projection sur une droite parallèlement à un plan.

Plus explicitement, f est la projection sur $\text{Vect}(u)$ où $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ (obtenu à partir des colonnes de la matrice et en particulier de la première) parallèlement au plan d'équation $x + 2y + 2z = 0$ (obtenu à partir des lignes de la matrice et en particulier de la première). □