Espaces vectoriels

Plan du chapitre

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps commutatif.

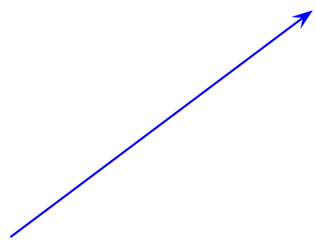
Le chapitre « Espaces vectoriels » est le premier chapitre d'**algèbre linéaire**. Les chapitres d'algèbre linéaire de maths sup sont :

- Espaces vectoriels
- Dimension d'un espace vectoriel
- Matrices
- Déterminants
- Systèmes d'équations linéaires

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

Dans le chapitre « Structures », on a déjà parlé de groupes, d'anneaux et de corps. On veut définir une nouvelle structure, la structure d'espace vectoriel. Au lycée, vous avez travaillé avec des vecteurs traditionnellement notés $\overrightarrow{u}$, dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions. Vous vous êtes représenté un vecteur par une flèche :



Toujours au lycée, un vecteur est utilisé pour faire de la géométrie. En physique, un vecteur sert dans un premier temps à représenter une force. On va voir qu'un vecteur est d'abord une notion algébrique (définie par le calcul et non pas par un dessin) et qu'un vecteur peut être bien autre chose que cette flèche : une fonction, une suite, un polynôme, et bien d'autres objets encore pourront avoir, le moment venu, un statut de vecteur. Pour cette raison, la flèche au-dessus des vecteurs va disparaître à terme (il serait absurde de noter $\overrightarrow{f}$ une fonction ou $\overrightarrow{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ une suite ou $\overrightarrow{P}$ un polynôme ...). Néanmoins, elle réapparaitra dans certains passages du cours pour faciliter la compréhension en permettant de faire plus facilement le tri dans la nature des différents objets.

Les calculs sur les vecteurs que vous avez effectués au lycée utilisaient deux opérations. La première est l'addition des vecteurs notée $+$ qui est une loi de composition interne sur E l'ensemble des vecteurs : $\begin{array}{ccc} E\times E & \rightarrow & E \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \mapsto & \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \end{array}$. La deuxième est la « multiplication » d'un vecteur par un nombre : $\lambda.\overrightarrow{u}$. Cette multiplication n'est pas une loi de composition interne puisque les deux objets λ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas de même nature (λ est un nombre et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur). On a besoin d'une nouvelle notion, la notion de loi de composition externe :

> Définition 1. Une loi de composition externe (l.d.c.e) sur E de domaine $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E :
>
> $$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, \overrightarrow{u}) & \mapsto & \lambda.\overrightarrow{u} \end{array}.$$

Le point entre λ et $\overrightarrow{u}$ « est » la loi externe. Ce point va rapidement disparaître et on écrira $2\overrightarrow{u}$ (ou même plutôt $2u$) à la place de $2.\overrightarrow{u}$.

On peut maintenant définir la notion d'espace vectoriel :

> Définition 2. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe de domaine $\mathbb{K}$ notée .
>
> $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si et seulement si :
>
> **1)** $(E, +)$ est un groupe commutatif.
>
> **2)** La loi . vérifie les quatre axiomes :
>
> i. $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
>
> ii. $\forall x \in E$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
>
> iii. $\forall x \in E$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\times\mu).x$
>
> iv. $\forall x \in E$, $1.x = x$
>
> Les éléments de E sont les **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont les **scalaires** ou plus simplement les nombres.

La notion d'espaces vectoriels va permettre d'unifier tous les problèmes d'**algèbre linéaire** comme par exemple la résolution des équations linéaires. Depuis le début de l'année, nous avons rencontré deux types d'équations linéaires en analyse : les équations différentielles linéaires du premier ordre ($y' + a(x)y = 0$) ou linéaires du second ordre à coefficients constants ($ay'' + by' + cy = 0$) et les récurrences linéaires d'ordre 2 ou d'ordre 1 ($\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$). On verra plus loin que les solutions constituent dans tous les cas un **sous-espace vectoriel** d'un certain espace vectoriel et que savoir cela apporte de nombreux renseignements supplémentaires.
Quand l'équation a un second membre non nul, on a été amené plusieurs fois à dire : « la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre ». Ce résultat est en fait un résultat général d'algèbre linéaire.

1.2 Exemples fondamentaux

Tous les exemples que nous donnons ci-dessous, sont les espaces vectoriels de référence dans lesquels nous travaillerons pendant les deux années de classe préparatoire. Vous devez considérer le fait que ce sont des espaces vectoriels comme un résultat acquis. Nous n'effectuerons aucune démonstration car le résultat est à chaque fois immédiat (et les vérifications à effectuer sont très fastidieuses).

• Commençons par les espaces vectoriels issus du lycée. On munit $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) des règles de calculs suivantes :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2,\ (x,y)+(x',y') = (x+x',y+y') \text{ et } \forall(\lambda,(x,y)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,\ \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

(resp. $\forall((x,y,z),(x',y',z')) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ (x,y,z)+(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z')$ et $\forall(\lambda,(x,y,z)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ \lambda.(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$).

Muni de ces deux lois

$$\boxed{\left(\mathbb{R}^2,+,.\right) \text{ (resp. } \left(\mathbb{R}^3,+,.\right)\text{) est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Un vecteur est ici un couple (resp. un triplet) de réels. L'élément neutre pour l'addition, le **vecteur nul**, est $\overrightarrow{0} = (0,0)$ (resp. $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$). L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y)$ (resp. $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$) est $-\overrightarrow{u} = (-x,-y)$ (resp. $-\overrightarrow{u} = (-x,-y,-z)$).

• Plus généralement, pour $n \geqslant 1$, on munit $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$ des **lois produit** $+$ et $.$ définies par

$$\forall\left((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\right) \in \left(\mathbb{K}^n\right)^2,\ (x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

et

$$\forall\left(\lambda,(x_1,\ldots,x_n)\right) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}^n,\ \lambda.(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

Muni de ces deux lois

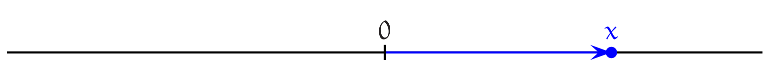
$$\boxed{(\mathbb{K}^n,+,.) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

Un vecteur est ici un n-uplet de nombres (réels ou complexes). L'élément neutre pour l'addition est $\overrightarrow{0} = (0,\ldots,0)$. L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x_1,\ldots,x_n)$ est $-\overrightarrow{u} = (-x_1,\ldots,-x_n)$.

• En particulier,

$$\boxed{(\mathbb{R},+,.) = (\mathbb{R}^1,+,.) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Un vecteur est alors directement un réel. La loi externe $(\lambda,x) \mapsto \lambda.x$ est en fait la multiplication des réels $(\lambda,x) \mapsto \lambda\times x$. Le fait qu'un réel soit à la fois un nombre et un vecteur, ne doit pas choquer car cela fait longtemps que l'on fait des dessins du genre



De même,

$$\boxed{(\mathbb{C},+,.) \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel.}}$$

• $(\mathbb{C},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les vecteurs sont alors les nombres complexes et les scalaires sont les réels. La loi externe $(\lambda,z)\mapsto\lambda.z$ est en fait la multiplication d'un réel par un complexe $(\lambda,z)\mapsto\lambda\times z$. Le vecteur nul est le nombre complexe 0 et l'opposé du vecteur z est $-z$.

• On rappelle que dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'addition de deux suites est définie par

$$\forall\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\in\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et la multiplication d'une suite par un nombre est définie par

$$\forall\left(\lambda,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Muni de ces deux lois

$$\boxed{\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,.\right)\text{ est un }\mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

Les vecteurs sont ici les suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le vecteur nul est la suite nulle $0=(0\quad 0\quad 0\quad 0\ldots)$ et l'opposé de la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $-u=(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• Soit X un ensemble non vide quelconque. Soit $\mathbb{K}^X=\mathcal{A}(X,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$. L'addition de deux applications de X dans $\mathbb{K}$ est définie par

$$\forall(f,g)\in\left(\mathbb{K}^X\right)^2,\ \forall x\in X,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

et la multiplication d'une fonction par un nombre est définie par

$$\forall(\lambda,f)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}^X,\ \forall x\in X,\ (\lambda.f)(x)=\lambda f(x).$$

Muni de ces deux lois

$$\boxed{\left(\mathbb{K}^X,+,.\right)\text{ est un }\mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}}$$

Les vecteurs sont ici les fonctions $f:\begin{array}{ccc}X&\to&\mathbb{K}\\ x&\mapsto&f(x)\end{array}$. Le vecteur nul est la fonction nulle $(\forall x\in X,\ f(x)=0$ et l'opposé de la fonction f est la fonction $-f\ :\ x\mapsto -f(x)$.

• Enfin, si on munit $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}(X)$ des opérations usuelles

$$\boxed{(\mathbb{K}[X],+,.)\text{ et }(\mathbb{K}(X),+,.)\text{ sont des }\mathbb{K}\text{-espaces vectoriels.}}$$

Les vecteurs sont alors les polynômes (resp. les fractions rationnelles). Le vecteur nul est le polynôme nul et l'opposé du polynôme P est le polynôme $-P$.

1.3 Quelques règles de calcul

Théorème 1. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) $\forall\overrightarrow{x}\in E,\ 0.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$.

2) $\forall(\lambda,\overrightarrow{x})\in\mathbb{K}\times E,\ \lambda.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ou $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$.

Démonstration .

1) Soit $\overrightarrow{x}\in E$. D'après l'axiome 2)ii., $0.\overrightarrow{x}=(0+0).\overrightarrow{x}=0.\overrightarrow{x}+0.\overrightarrow{x}$. Ensuite, $(E,+)$ est un groupe commutatif et en particulier, tout élément de E est simplifiable pour l'addition. Après simplification par $0.\overrightarrow{x}$, on obtient $0.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. D'après l'axiome 2)i., $\lambda.\overrightarrow{0}=\lambda.\left(\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}\right)=\lambda.\overrightarrow{0}+\lambda.\overrightarrow{0}$. Après simplification par $\lambda.\overrightarrow{0}$, on obtient $\lambda.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$.

2) Soit $(\lambda,\overrightarrow{x})\in\mathbb{K}\times E$. 1) montre que si $\lambda=0$ ou $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$, alors $\lambda.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$.

Réciproquement, supposons $\lambda.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$. Si $\lambda\neq 0$, on en déduit $\dfrac{1}{\lambda}.(\lambda.\overrightarrow{x})=\dfrac{1}{\lambda}.\overrightarrow{0}$ puis $\left(\dfrac{1}{\lambda}\times\lambda\right).\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ d'après l'axiome 2)iii. puis $1.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ puis $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ d'après l'axiome 2)iv.

❏

Théorème 2. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) $\forall(\lambda,\overrightarrow{x})\in\mathbb{K}\times E$, $(-\lambda).\overrightarrow{x}=\lambda.(-\overrightarrow{x})=-\lambda.\overrightarrow{x}$.

2) $\forall(\lambda,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in\mathbb{K}\times E\times E$, $\lambda.\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\right)=\lambda.\overrightarrow{x}-\lambda.\overrightarrow{y}$ et $\forall(\lambda,\mu,\overrightarrow{x})\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E$, $(\lambda-\mu).\overrightarrow{x}=\lambda.\overrightarrow{x}-\mu.\overrightarrow{x}$.

Démonstration .

1) Soit $(\lambda,\overrightarrow{x})\in\mathbb{K}\times E$. Montrer que $(-\lambda).\overrightarrow{x}=-\lambda.\overrightarrow{x}$, c'est montrer que $(-\lambda).\overrightarrow{x}$ est l'opposé du vecteur $\lambda.\overrightarrow{x}$. Or,

$$(-\lambda).\overrightarrow{x}+\lambda.\overrightarrow{x}=(-\lambda+\lambda).\overrightarrow{x}=0.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0},$$

et donc $(-\lambda).\overrightarrow{x}=-\lambda.\overrightarrow{x}$. De même,

$$\lambda.\left(-\overrightarrow{x}\right)+\lambda.\overrightarrow{x}=\lambda.\left(-\overrightarrow{x}+\overrightarrow{x}\right)=\lambda.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0},$$

et donc $\lambda.\left(-\overrightarrow{x}\right)=-\lambda.\overrightarrow{x}$.

2) Soit $(\lambda,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in\mathbb{K}\times E\times E$.
$\lambda.\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\right)=\lambda.\overrightarrow{x}+\lambda\left(-\overrightarrow{y}\right)=\lambda.\overrightarrow{x}-\lambda.\overrightarrow{y}$ et $(\lambda-\mu).\overrightarrow{x}=\lambda.\overrightarrow{x}+(-\mu).\overrightarrow{x}=\lambda.\overrightarrow{x}-\mu.\overrightarrow{x}$.

❏

Exercice 1. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que la commutativité de l'addition est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espaces vectoriels.

Solution 1. Soit $(x,y)\in E^2$.

$$\begin{aligned}x+(y+x)+y&=(x+y)+(x+y)=1.(x+y)+1.(x+y)=(1+1).(x+y)=2.(x+y)=2.x+2.y\\&=(1+1).x+(1+1).y=(1.x+1.x)+(1.y+1.y)\\&=x+(x+y)+y\end{aligned}$$

puis, en simplifiant par x à gauche (en ajoutant $-x$ à gauche dans chaque membre) et par y à droite, on obtient $y+x=x+y$.

1.4 Produit d'espaces vectoriels

Soient $(E_1,+_1,._1)$, $(E_2,+_2,._2)$, ..., $(E_n,+_n,._n)$, n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($n\geqslant 2$). On définit sur le produit cartésien $E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ les lois produits :

$$\forall\left(\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right),\left(\overrightarrow{y_1},\ldots,\overrightarrow{y_n}\right)\right)\in\left(E_1\times\ldots\times E_n\right)^2,\ \left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)+\left(\overrightarrow{y_1},\ldots,\overrightarrow{y_n}\right)=\left(\overrightarrow{x_1}+_1\overrightarrow{y_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}+_n\overrightarrow{y_n}\right),$$

et

$$\forall\left(\lambda,\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)\right)\in\mathbb{K}\times\left(E_1\times\ldots\times E_n\right),\ \lambda.\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)=\left(\lambda._1\overrightarrow{x_1},\ldots,\lambda._n\overrightarrow{x_n}\right).$$

(Par souci de précision, on a noté de manière différente l'addition dans E_1, E_2, ..., E_n, et de même pour la loi externe. Si on trouve les notations trop lourdes, il n'y a qu'à supprimer tous les indices des différentes opérations. C'est d'ailleurs ce que l'on fera dans la démonstration qui suit).

Théorème 3. $(E_1\times\ldots\times E_n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration .

• L'addition des n-uplets est effectivement une loi interne, clairement commutative et associative par commutativité et associativité de chaque $+_i$ dans E_i, $i\in[\![1,n]\!]$.
$+$ admet un élément neutre pour $+$ à savoir $\overrightarrow{0}=\left(\overrightarrow{0_{E_1}},\ldots,\overrightarrow{0_{E_n}}\right)$ où $\overrightarrow{0_{E_i}}$ est l'élément neutre pour $+$ dans E_i, $i\in[\![1,n]\!]$.
Chaque $\overrightarrow{x}=\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)$ admet un symétrique pour $+$ dans $E_1\times\ldots\times E_n$ à savoir $-\overrightarrow{x}=\left(-\overrightarrow{x_1},\ldots,-\overrightarrow{x_n}\right)$ où $-\overrightarrow{x_i}$ désigne le symétrique de $\overrightarrow{x_i}$ pour $+$ dans E_i, $i\in[\![1,n]\!]$.

En résumé, $(E_1\times\ldots\times E_n,+)$ est un groupe commutatif.

• Soient λ et μ deux nombres et $\overrightarrow{x}=\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)$ et $\overrightarrow{y}=\left(\overrightarrow{y_1},\ldots,\overrightarrow{y_n}\right)$ deux éléments de $E_1\times\ldots\times E_n$.

$$\begin{aligned}\lambda.\left(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\right)&=\lambda.\left(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{y_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}+\overrightarrow{y_n}\right)=\left(\lambda.\left(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{y_1}\right),\ldots,\lambda.\left(\overrightarrow{x_n}+\overrightarrow{y_n}\right)\right)=\left(\lambda.\overrightarrow{x_1}+\lambda.\overrightarrow{y_1},\ldots,\lambda.\overrightarrow{x_n}+\lambda.\overrightarrow{y_n}\right)\\&=\left(\lambda.\overrightarrow{x_1},\ldots,\lambda.\overrightarrow{x_n}\right)+\left(\lambda.\overrightarrow{y_1},\ldots,\lambda.\overrightarrow{y_n}\right)=\lambda.\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)+\lambda.\left(\overrightarrow{y_1},\ldots,\overrightarrow{y_n}\right)\\&=\lambda.\overrightarrow{x}+\lambda.\overrightarrow{y}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu).\overrightarrow{x}&=\left((\lambda+\mu).\overrightarrow{x_1},\ldots,(\lambda+\mu).\overrightarrow{x_n}\right)=\left(\lambda.\overrightarrow{x_1}+\mu.\overrightarrow{x_1},\ldots,\lambda.\overrightarrow{x_n}+\mu.\overrightarrow{x_n}\right)\\&=\left(\lambda.\overrightarrow{x_1},\ldots,\lambda.\overrightarrow{x_n}\right)+\left(\mu.\overrightarrow{x_1},\ldots,\mu.\overrightarrow{x_n}\right)=\lambda.\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)+\mu.\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)\\&=\lambda.\overrightarrow{x}+\mu.\overrightarrow{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda.\left(\mu.\overrightarrow{x}\right)&=\lambda.\left(\mu.\overrightarrow{x_1},\ldots,\mu.\overrightarrow{x_n}\right)=\left(\lambda.\left(\mu.\overrightarrow{x_1}\right),\ldots,\lambda.\left(\mu.\overrightarrow{x_n}\right)\right)\\&=\left((\lambda\times\mu).\overrightarrow{x_1},\ldots,(\lambda\times\mu).\overrightarrow{x_n}\right)=(\lambda\times\mu).\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)\\&=(\lambda\times\mu).\overrightarrow{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1.\overrightarrow{x}&=\left(1.\overrightarrow{x_1},\ldots,1.\overrightarrow{x_n}\right)=\left(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_n}\right)\\&=\overrightarrow{x}.\end{aligned}$$

On a montré que $(E_1\times\ldots\times E_n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

❑

⇨ **Commentaire**. *En appliquant au cas particulier où $E_1=E_2=\ldots=E_n=\mathbb{K}$, on retrouve le fait $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où + et . désignent les lois usuelles sur $\mathbb{K}^n$).*

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Partie stable pour les deux lois. Lois induites

On a déjà rencontré la notion de sous-structures avec les notions de groupes et sous-groupes. La notion fondamentale est la notion de stabilité :

Définition 3. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie non vide de E.

F est **stable pour l'addition** si et seulement si $\forall(x,y)\in F^2,\ x+y\in F$.
F est **stable pour la loi externe** si et seulement si $\forall x\in F,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda.x\in F$.
F est **stable par combinaisons linéaires** si et seulement si $\forall(x,y)\in F^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda.x+\mu.y\in F$.

⇨ **Commentaire**. *Les trois stabilités peuvent s'écrire de manière abrégée :*

F est stable pour + si et seulement si $F+F\subset F$.
F est stable pour . si et seulement si $\mathbb{K}F\subset F$.
F est stable par combinaisons linéaires si et seulement si $\mathbb{K}F+\mathbb{K}F\subset F$.

Définition 4. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie non vide de E, stable pour + et **.**

Les applications $\begin{array}{ccc}F\times F&\to&F\\(x,y)&\mapsto&x+y\end{array}$ et $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times F&\to&F\\(\lambda,x)&\mapsto&\lambda.x\end{array}$ s'appellent les **lois induites** sur F par les lois de E.

2.2 Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition 5. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie non vide de E.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E,+,.)$ si et seulement si F est stable pour + et **.** et de plus F muni des lois induites est un espace vectoriel.

⇨ **Commentaire**.

◇ *Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E,+,.)$, en particulier F est un sous-groupe du groupe $(E,+)$. En tant que sous-groupe, F doit contenir l'élément neutre du groupe $(E,+)$ ou encore F doit contenir le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.*

◇ *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet toujours deux sous-espaces dits triviaux, le sous-espace nul $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et l'espace E lui-même.*

2.3 Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Dans ce qui suit, on n'écrit plus les flèches de vecteurs.

Théorème 4 (caractérisation 1). Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$ si et seulement si F contient 0 et F est stable pour $+$ et $.$

Plus explicitement, F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \in F \\ \forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F \\ \forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.x \in F \end{cases}.$$

Démonstration . Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de l'espace $(E, +, .)$. Alors, F est stable pour $+$ et $.$ D'autre part, F contient 0 car F est un sous-groupe du groupe $(E, +)$.

Réciproquement, soit F une partie de E contenant 0 et stable pour $+$ et .. F est donc non vide et la loi induite sur F par l'addition dans E est une loi interne sur F.
Soit $(x, y) \in F^2$. $-y = (-1).y$ (d'après le théorème 2) est dans F. Mais alors $x - y = x + (-y)$ est dans F.
On en déduit que F est un sous-groupe du groupe $(E, +)$. En particulier, $(F, +)$ est un groupe commutatif. D'autre part, les quatre axiomes concernant la loi externe restent valables dans F par restriction. Finalement, F muni des lois induites est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou encore F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

❏

Théorème 5 (caractérisation 2). Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F une partie de E.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$ si et seulement si F contient 0 et F est stable par combinaisons linéaires.

Plus explicitement, F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 0 \in F \\ \forall (x, y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda.x + \mu.y \in F \end{cases}.$$

Démonstration .

• Supposons que F vérifie la caractérisation 1. Alors $0 \in F$.
Soient $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors, $\lambda.x \in F$ et $\mu.y \in F$ puis $\lambda.x + \mu.y \in F$. Donc, la caractérisation 1 entraîne la caractérisation 2.

• Supposons que F vérifie la caractérisation 2. Alors $0 \in F$.
Soient $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in K$. $x + y = 1.x + 1.y \in F$ et $\lambda.x = \lambda.x + 0.y \in F$. Donc, la caractérisation 2 entraîne la caractérisation 1.

❏

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.
1) Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - 2z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^3, +, .\right)$.
2) Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + y - 2z = 1\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^3, +, .\right)$.
3) Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ xy = 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^3, +, .\right)$.

Solution 2.

1) Puisque $0 + 0 - 2 \times 0 = 0$, le vecteur nul $(0, 0, 0)$ est dans F.
Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (\mu x', \mu y', \mu z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$. De plus,

$$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 2(\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - 2z) + \mu(x' + y' - 2z') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$$

En résumé, F contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires. Donc, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Puisque $0 + 0 - 2 \times 0 = 0 \neq 1$, le vecteur nul $(0, 0, 0)$ n'est pas dans F. Donc, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) Puisque, $1 \times 0 = 0$, le vecteur $u = (1, 0, 0)$ est dans F. De même, le vecteur $v = (0, 1, 0)$ est dans F. Mais le vecteur $u + v = (1, 1, 0)$ n'est pas dans F car $1 \times 1 = 1 \neq 0$. F n'est pas stable par combinaison linéaire et donc, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Intersections et sommes de sous-espaces

2.4.1 Intersections de sous-espaces

Théorème 6. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration . Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

0 est dans F et 0 est dans G. Donc, 0 est dans $F \cap G$.
Soient $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda.x + \mu.y$ est dans F et $\lambda.x + \mu.y$ est dans G. Donc, $\lambda.x + \mu.y$ est dans $F \cap G$.

On a montré que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$. ❏

Plus généralement,

Théorème 7. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E où I est un ensemble non vide d'indices.

Alors, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration . • $\forall i \in I$, $0 \in F_i$. Donc, $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

• Soient $(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. $\forall i \in I$, $\lambda.x + \mu.y \in F_i$. Donc, $\lambda.x + \mu.y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

On a montré que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$. ❏

Ainsi, une intersection quelconque de sous-espaces est un sous-espace. Par contre, une réunion de sous-espaces n'est pas un sous-espace vectoriel en général. L'exercice qui suit analyse ce problème.

Exercice 3. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.

Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $(E, +, .)$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution 3.

• Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ et si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$. Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous-espace de l'espace $(E, +, .)$.

• Réciproquement, supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace et que $F \not\subset G$. Montrons alors que $G \subset F$.
Puisque $F \not\subset G$, il existe un vecteur x_0 de E tel que $x_0 \in F$ et $x_0 \notin G$.

Soit $x \in G$. Puisque $x \in F \cup G$ et $x_0 \in F \cup G$ et que $F \cup G$ est un sous-espace de l'espace $(E, +, .)$, on en déduit que $x + x_0 \in F \cup G$ et donc que $x + x_0 \in F$ ou $x + x_0 \in G$.
Si $x + x_0 \in G$, alors $x_0 = (x + x_0) - x \in G$ (car G est un sous-espace) ce qui est faux. Donc, $x + x_0 \in F$ puis $x = (x + x_0) - x_0 \in F$.

On a montré que : $\forall x \in E$, $(x \in G \Rightarrow x \in F)$. Donc, $G \subset F$.

2.4.2 Sommes de sous-espaces

Définition 6. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces.

La **somme des sous-espaces F et G** est $F + G = \{x + y,\ (x, y) \in F \times G\}$.

Exemple. Posons $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$ puis $\mathbb{R}i = \{x(1, 0),\ x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{R}j = \{y(0, 1),\ y \in \mathbb{R}\} = \{(0, y),\ x \in \mathbb{R}\}$. Alors

$$\mathbb{R}i + \mathbb{R}j = \left\{(x, 0) + (0, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^2.$$

Théorème 8. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces.

$F + G$ est un sous-espace de l'espace $(E, +, .)$.

Démonstration .

- $0 \in F$ et $0 \in G$. Donc, $0 = 0 + 0 \in F + G$.
- Soient $(u, v) \in (F + G)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(x, y, x', y') \in F \times G \times F \times G$ tel que $u = x + y$ et $v = x' + y'$.

$$\lambda u + \mu v = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y').$$

Puisque F et G sont des sous-espaces, $\lambda x + \mu x' \in F$ et $\lambda y + \mu y' \in G$. On en déduit que $\lambda u + \mu v \in F + G$.

On a montré que $F + G$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $(E, +, .)$.

❏

⇨ **Commentaire** . *On a déjà vu que si F et G sont deux sous-espaces tels que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace. $F+G$ est le plus petit sous-espace de E contenant $F \cup G$. En effet, $F = \{x + 0,\ x \in F\} \subset F+G$ et de même $G \subset F+G$ puis $F \cup G \subset F+G$. D'autre part, un sous-espace contenant $F \cup G$ doit encore contenir les sommes d'un élément de F et d'un élément de G et donc doit contenir $F + G$.*

Définition 7. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces ($n \geqslant 2$).

La **somme des sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$** est $F_1 + \ldots + F_n = \{x_1 + \ldots + x_n,\ (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n\}$.

Notation. De même, que le produit cartésien des sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ peut se noter $\prod_{i=1}^{n} F_i$, la somme des sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ peut se noter $\sum_{i=1}^{n} F_i$

Théorème 9. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces.

$\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace de l'espace $(E, +, .)$.

Démonstration .

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $0 \in F_i$. Donc, $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \in \sum_{i=1}^{n} F_i$.
- Soient $(u, v) \in \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n \times F_1 \times \ldots \times F_n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

$$\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) \in \sum_{i=1}^{n} F_i.$$

On a montré que $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $(E, +, .)$.

❏

2.5 Quelques sous-espaces de référence

On a déjà donné une liste d'espaces de référence qui seront utilisés pas la suite en algèbre ou en analyse. On complète cette liste par certains sous-espaces de ces espaces.

Théorème 10. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et paires (resp. impaires).

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{R}}, +, .\right)$.

Démonstration .

- La fonction nulle est paire (resp. impaire) ou encore $0 \in \mathcal{P}$ (resp. $0 \in \mathcal{I}$).
- Soient f et g deux fonctions paires (resp. impaires) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout réel x,

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

et donc $\lambda f+\mu g$ est paire (resp. pour tout réel x, $(\lambda f+\mu g)(-x)=-\lambda f(x)-\mu g(x)=-(\lambda f+\mu g)(x)$ et donc $\lambda f+\mu g$ est impaire).

On a montré que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{R}},+,.\right)$.

❑

Théorème 11. Soit T un réel. Soit $\mathcal{P}_T$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et T-périodique.

$\mathcal{P}_T$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{R}},+,.\right)$.

Démonstration .

• La fonction nulle est T-périodique.

• Soient f et g deux fonctions T-périodiques. Pour tout réel x,

$$(\lambda f+\mu g)(x+T)=\lambda f(x+T)+\mu g(x+T)=\lambda f(x)+\mu g(x)=(\lambda f+\mu g)(x)$$

et donc $\lambda f+\mu g$ est T-périodique.

On a montré que $\mathcal{P}_T$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{R}},+,.\right)$.

❑

Théorème 12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $C^n(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{I},+,.\right)$.
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $D^n(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{I},+,.\right)$.

Démonstration . Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction nulle est de classe C^n sur I et une combinaison linéaire de deux fonctions de classe C^n sur I est une fonction de classe C^n sur I. Donc, $C^n(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{I},+,.\right)$.

La démarche est identique pour $D^n(I,\mathbb{K})$, $n\in\mathbb{N}^*$.

❑

Théorème 13.

1) Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, dérivables sur I, vérifiant

$$\forall x\in I,\ f'(x)=a(x)f(x).$$

$\mathcal{E}_1$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(D^1(I,\mathbb{K}),+,.\right)$.

2) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{K}^*\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, deux fois dérivables sur I, vérifiant

$$\forall x\in I,\ af''(x)+bf'(x)+cf(x)=0.$$

$\mathcal{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(D^2(I,\mathbb{K}),+,.\right)$.

Démonstration .

1) $\mathcal{E}_1\subset D^1(I,\mathbb{K})$. La fonction nulle est dans $\mathcal{E}_1$. Soient $(f,g)\in\mathcal{E}_1^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors

$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'=\lambda af+\mu ag=a\times(\lambda f+\mu g),$$

et donc $\lambda f+\mu g\in\mathcal{E}_1$. Ceci montre que $\mathcal{E}_1$ est un sous-espace de $D^1(I,\mathbb{K})$.

2) $\mathcal{E}_2\subset D^2(I,\mathbb{K})$. La fonction nulle est dans $\mathcal{E}_2$. Soient $(f,g)\in\mathcal{E}_2^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors

$$a(\lambda f+\mu g)''+b(\lambda f+\mu g)'+c(\lambda f+\mu g)=\lambda(af''+bf'cf)+\mu(ag''+bg'+cg)=0,$$

et donc $\lambda f+\mu g\in\mathcal{E}_2$. Ceci montre que $\mathcal{E}_2$ est un sous-espace de $D^2(I,\mathbb{K})$.

❑

Ainsi, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel.

Théorème 14. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites réelles (resp. complexes) bornées.

$\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.\right)$ (resp. $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,.\right)$).

Démonstration . La suite nulle est bornée.

Soient u et v deux suites bornées et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe deux réels M et M' tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ et $|v_n| \leqslant M'$. Pour tout entier naturel n, $|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n| \leqslant |\lambda| M + |\mu| M'$. Donc, la suite $\lambda u + \mu v$ est bornée.

On a montré que $\mathcal{B}$ est un sous-espace de l'espace $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$.

❏

Théorème 15. L'ensemble des suites réelles (resp. complexes) convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ (resp. $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$).

Démonstration . La suite nulle est convergente et une combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente. Donc, l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace de l'espace $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$.

❏

Théorème 16. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

$\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$.

Démonstration . La suite nulle est dans $\mathcal{E}$. Soient $(u, v) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a\left(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}\right) + b\left(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\right) + c\left(\lambda u_n + \mu v_n\right) = \lambda\left(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n\right) + \mu\left(av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n\right) = 0,$$

et donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{E}$. Ceci montre que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

❏

Ainsi, l'ensemble des solutions d'une récurrence linéaire homogène d'ordre 2 est un espace vectoriel.

Théorème 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

Démonstration . Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme nul est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et une combinaison linéaire de polynômes de degré inférieur ou égal à n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Donc, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace de l'espace $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

❏

3 Sommes directes. Sous-espaces supplémentaires

3.1 Sommes directes

3.1.1 Cas de deux sous-espaces

Définition 8. Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace $(E, +, .)$.

La somme $F+G$ est **directe** si et seulement si tout élément u de $F+G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = x+y$ où x est un élément de F et y est un élément de G. Dans ce cas, la somme $F+G$ s'écrit $F \oplus G$.

Dit autrement, la somme $F+G$ est **directe** si et seulement si l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x+y \end{array}$ est injective.

⇨ **Commentaire** . *Quand la somme $F+G$ est directe, si on est présence d'une égalité du type $x+y = x'+y'$ où x et x' sont dans F et y et y' sont dans G, on peut* ***identifier*** *les termes ou encore, on a $x = x'$ et $y = y'$.*

Théorème 18. Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace $(E, +, .)$.

La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration .

• Supposons la somme $F+G$ directe. Soit $x \in F \cap G$. On a

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}.$$

Par unicité d'une telle décomposition, on en déduit que $x = 0$. Ceci montre que $F \cap G \subset \{0\}$. D'autre part, puisque $F \cap G$ est un sous-espace de l'espace $(E, +, .)$ d'après le théorème 6, on a aussi $\{0\} \subset F \cap G$ et finalement $F \cap G = \{0\}$.

• Supposons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x, y, x', y') \in F \times G \times F \times G$ tel que $x + y = x' + y'$. Alors, $x - x' = y' - y$. Le vecteur $x - x'$ est dans F et le vecteur $y' - y$ est dans G. Puisque ces deux vecteurs sont égaux, ces deux vecteurs sont dans $F \cap G = \{0\}$. On en déduit que $x - x' = y' - y = 0$ puis que $x = x'$ et $y = y'$. Ceci montre que la somme $F + G$ est directe.

❑

3.1.2 Généralisation à plusieurs sous-espaces

Nous passons maintenant au cas de n sous-espaces, $n \geqslant 2$.

Définition 9. Soit $n \geqslant 2$. Soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace $(E, +, .)$.

La somme $F_1 + \ldots + F_n$ est **directe** si et seulement si tout élément u de $F_1 + \ldots + F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = x_1 + \ldots + x_n$ où x_1 est un élément de $F_1, \ldots, x_n$ est un élément de F_n. Dans ce cas, la somme $F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ s'écrit $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ ou aussi $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Dit autrement, la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est **directe** si et seulement si l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{n} F_i & \to & E \\ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array}$ est injective.

Comme dans le paragraphe précédent, on va donner une caractérisation (et même deux caractérisations) du fait que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe. Cette caractérisation n'est pas celle qu'on serait en droit d'imaginer : il est faux de croire que la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe si et seulement si $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j = \{0\}$. Par exemple, considérons dans $\mathbb{R}^2$, les trois vecteurs $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$ et $k = i + j = (1, 1)$. Considérons ensuite les trois sous-espaces $F = \mathbb{R}i = \{x(1, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$, $G = \mathbb{R}j$ et $H = \mathbb{R}k$. On a $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$. Pourtant la somme $F + G + H$ n'est pas directe car le vecteur k est un élément de $F + G + H$ qui s'écrit d'au moins deux manières différentes comme la somme d'un élément de F, de G et de H :

$$k = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G} + \underbrace{k}_{\in H} = \underbrace{i}_{\in F} + \underbrace{j}_{\in G} + \underbrace{0}_{\in H}.$$

Théorème 19. Soit $n \geqslant 2$. Soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace $(E, +, .)$.

La somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$.

Démonstration .

• Supposons la somme $F_1 + \ldots + F_n$ directe. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ puis $x \in F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j$. Il existe $(x_j)_{j \neq i} \in \prod_{j \neq i} F_j$ tel que $x = \sum_{j \neq i} x_j$. On a donc

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{0}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{0}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{0}_{\in F_{i+1}} + \ldots + \underbrace{0}_{\in F_n} \\ &= \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{x_{i-1}}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{0}_{\in F_i} + \underbrace{x_{i+1}}_{\in F_{i+1}} + \ldots + \underbrace{x_n}_{\in F_n}. \end{aligned}$$

Par unicité d'une telle décomposition, on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j \subset \{0\}$ puis $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$.

• Supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$. Soit $\left((x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}, (x'_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}\right) \in \left(\prod_{i=1}^{n} F_i\right)^2$ tel que $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. De l'égalité $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j$, on déduit $x_i - x'_i = \sum_{j \neq i} \left(x'_j - x_j\right)$. Le second membre de cette égalité est un élément de $\sum_{j \neq i} F_j$ et donc $x_i - x'_i$ est un élément de $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j$. On en déduit que $x_i - x'_i = 0$ puis que $x_i = x'_i$. On a montré que

$\forall\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n},(x'_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}F_i\right)^2,\ \sum_{j=1}^{n}x_j=\sum_{j=1}^{n}x'_j\Rightarrow\left(\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=x'_i\right)$ et donc la somme $\sum_{i=1}^{n}F_i$ est directe.

❑

Théorème 20. Soit $n\geqslant 2$. Soient F_1, ..., F_n n sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace $(E,+,.)$.

La somme $F_1+\ldots+F_n$ est directe si et seulement si $\forall i\in[\![2,n]\!],\ F_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}F_j=\{0\}$.

Démonstration .

• Supposons que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j=\{0\}$. Soit $i\in[\![2,n]\!]$. $\left(F_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}F_j\right)\subset\left(F_i\cap\sum_{j\neq i}F_j\right)=\{0\}$ et donc $F_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}F_j=\{0\}$ (toujours à cause du fait que $F_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}F_j$ est un sous-espace en tant qu'intersection de sous-espaces).

• Supposons que $\forall i\in[\![2,n]\!]$, $F_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}F_j=\{0\}$. Soit $\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n},(x'_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}F_i\right)^2$ tel que $\sum_{j=1}^{n}x_j=\sum_{j=1}^{n}x'_j$. Supposons par l'absurde qu'il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_i\neq x'_i$. Soit alors p le plus grand des indices i tel que $x_i\neq x'_i$. Par définition de p, pour $j>p$, $x_j=x'_j$. L'égalité $\sum_{j=1}^{n}x_j=\sum_{j=1}^{n}x'_j$ s'écrit après simplification $\sum_{j=1}^{p}x_j=\sum_{j=1}^{p}x'_j$.

Si $p=1$, on obtient $x_1=x'_1$ ce qui contredit la définition de p. Si $p\geqslant 2$, l'égalité $\sum_{j=1}^{p}x_j=\sum_{j=1}^{p}x'_j$ fournit $x_p-x'_p=\sum_{j=1}^{p-1}\left(x'_j-x_j\right)$. Le second membre est un élément de $\sum_{j=1}^{p-1}F_i$ et donc $x_p-x'_p\in\left(F_p\cap\sum_{j=1}^{p-1}F_j\right)=\{0\}$. De nouveau, on obtient $x_p=x'_p$ ce qui contredit la définition de p. Finalement, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=x'_i$.

On a montré que $\forall\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n},(x'_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}F_i\right)^2,\ \sum_{j=1}^{n}x_j=\sum_{j=1}^{n}x'_j\Rightarrow\left(\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=x'_i\right)$ et donc la somme $\sum_{i=1}^{n}F_i$ est directe.

❑

3.2 Sous-espaces supplémentaires

On commence par le cas de deux sous-espaces :

Définition 10. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$.

F et G sont **supplémentaires** si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Dit autrement, F et G sont **supplémentaires** si et seulement si l'application $\begin{array}{rccc}\varphi: & F\times G & \to & E\\ & (x,y) & \mapsto & x+y\end{array}$ est bijective.

⇨ **Commentaire** . *La phrase « F et G sont supplémentaires » s'écrit de manière plus condensée :* $E=F\oplus G$.

A partir du théorème 18, on a immédiatement :

Théorème 21. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$.

F et G sont supplémentaires si et seulement si $E=F+G$ et $F\cap G=\{0\}$.

Exercice 4. On munit $E=\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles. On considère $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x+y+z=0\right\}$ et $G=\{(\lambda,\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$. On admet que F et G sont des sous-espaces de l'espace $(E,+,.)$.

Montrer que F et G sont supplémentaires.

Solution 4.

1ère solution (trop longue et maladroite).

• Vérifions que $F\cap G=\{0\}$. Soit $u=(x,y,z)\in F\cap G$. u est dans F et donc $x+y+z=0$. u est dans G et donc

$\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. On en déduit que $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$ puis $\lambda + \lambda + \lambda = 0$ puis $3\lambda = 0$ et donc $\lambda = 0$. Par suite, $u = (0, 0, 0) = 0$. Ceci montre que $F \cap G \subset \{0\}$ puis que $F \cap G = \{0\}$ car F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$.

• Vérifions que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $w = (x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3$ tels que $v \in F$, $w \in G$ et $u = v + w$. w est dans G si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x'' = y'' = z'' = \lambda$. L'égalité $u = v + w$ est alors équivalente à $x = x' + \lambda$, $y = y' + \lambda$ et $z = z' + \lambda$. Enfin,

$$v \in F \Leftrightarrow x' + y' + z' = 0 \Leftrightarrow (x - \lambda) + (y - \lambda) + (z - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x + y + z).$$

Ainsi, si on pose $\lambda = \dfrac{1}{3}(x + y + z)$ puis $w = (\lambda, \lambda, \lambda) = \left(\dfrac{x + y + z}{3}, \dfrac{x + y + z}{3}, \dfrac{x + y + z}{3}\right)$ puis $v = u - w = \left(\dfrac{2x - y - z}{3}, \dfrac{-x + 2y - z}{3}, \dfrac{-x - y + 2z}{3}\right)$, alors $v \in F$, $w \in G$ et $u = v + w$.

En résumé, $\forall u \in E,\ \exists (v, w) \in F \times G/\ u = v + w$. Ceci montre que $\mathbb{R}^3 = F + G$ et finalement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2ème solution (encore perfectible).

• Vérifions que $F \cap G = \{0\}$. Soit $u = (\lambda, \lambda, \lambda) \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u \in F \Leftrightarrow \lambda + \lambda + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Donc, $F \cap G = \{0\}$.

• Vérifions que $\mathbb{R}^3 = F + G$. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u - (\lambda, \lambda, \lambda) \in F &\Leftarrow (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \in F \\ &\Leftarrow (x - \lambda) + (y - \lambda) + (z - \lambda) = 0 \Leftarrow \lambda = \frac{1}{3}(x + y + z). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda = \dfrac{1}{3}(x + y + z)$, alors $u - (\lambda, \lambda, \lambda) \in F$. Pour tout u de $\mathbb{R}^3$, il existe $w \in G$ tel que $u - w \in F$. Ceci montre que $\mathbb{R}^3 = F + G$ et finalement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

3ème solution (la meilleure). Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u - (\lambda, \lambda, \lambda) \in F &\Leftrightarrow (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \in F \\ &\Leftrightarrow (x - \lambda) + (y - \lambda) + (z - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(x + y + z). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\exists! \lambda \in \mathbb{R}/\ u - (\lambda, \lambda, \lambda) \in F$. Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, de manière unique. Donc, $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans la première et la deuxième solution, nous avons séparé le travail à effectuer en deux parties. Pour un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ donné, nous avons géré séparément l'existence d'une décomposition de u en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ($E = F + G$) et l'unicité d'une telle décomposition ($F \cap G = \{0\}$ assure l'unicité d'après le théorème 21). Dans la troisième solution, nous avons démontré en une seule étape l'existence et l'unicité d'une décomposition. En ce sens, la troisème solution est bien meilleure que les deux premières.*

◇ *La différence essentielle entre les deux premières solutions consiste dans le nombre d'inconnues que l'on se donne. Pour $u = (x, y, z)$ donné, dans la première solution, on en a sept : x', y', z', x'', y'', z'' et λ. Dans la deuxième solution, il n'y a plus qu'une inconnue λ. On doit toujours chercher à réduire au strict minimum le nombre d'inconnues.*

◇ *Le problème général « montrer que pour tout u de E, il existe $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$ » est un problème à deux inconnues : les vecteurs v et w. Dans la pratique, on transforme presque systématiquement ce problème en un problème à une seule inconnue de la façon suivante :*

$$E = F + G \Leftrightarrow \forall u \in E,\ \exists v \in F/\ u - v \in G.$$

En pratiquant ainsi, on ne cherche plus qu'un seul vecteur inconnu, le vecteur v. De même,

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall u \in E,\ \exists! v \in F/\ u - v \in G.$$

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des opérations usuelles. Soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires).

Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Solution 5.

• Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ puis $2f(x) = 0$ puis $f(x) = 0$. Ainsi, si $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, alors $f = 0$. Donc, $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \subset \{0\}$ puis $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ car $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de E.

• Soit $f \in E$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Ainsi, $\forall f \in E$, $\exists (g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I} /\ f = g + h$. Donc, $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

Finalement, $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Plus généralement, on a la notion de n sous-espaces supplémentaires :

Définition 11. Soit $n \geqslant 2$. Soient $F_1, \ldots, F_n$ n sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace $(E, +, .)$.

Les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont **supplémentaires** si et seulement si tout élément u de E s'écrit de manière unique sous la forme $u = x_1 + \ldots + x_n$ où x_1 est un élément de $F_1, \ldots, x_n$ est un élément de F_n.

Dit autrement, $F_1, \ldots, F_n$ sont **supplémentaires** si et seulement si l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{n} F_i & \rightarrow & E \\ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array}$ est bijective.

⇨ **Commentaire** . *La phrase « $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires » s'écrit de manière plus condensée :* $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

4 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Familles génératrices

4.1 Combinaisons linéaires

On commence par le cas d'une famille finie :

Définition 12. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \geqslant 1$ puis $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$ une famille de n vecteurs de E.

Une **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un vecteur de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

où $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$.

Ainsi, une combinaison linéaire de deux vecteurs u et v est un vecteur de la forme $\lambda u + \mu v$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, et une combinaison linéaire d'un seul vecteur u est un vecteur de la forme λu, $\lambda \in \mathbb{K}$.

On passe maintenant au cas d'une famille quelconque. Il n'est pas question d'envisager des sommes contenant une infinité de termes :

Définition 13. Soient I un ensemble non vide quelconque d'indices puis $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I.

Une **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une combinaison linéaire d'une sous-famille **finie** de cette famille c'est-à-dire un vecteur de la forme $\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ où J est un sous-ensemble non vide de I ayant un nombre fini d'éléments et $(\lambda_j)_{j \in J}$ est une famille de scalaires indexée par J.

Par exemple, tout élément de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de monômes X^n où $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Sous-espace engendré par une famille de vecteurs (ou une partie)

Soit u un vecteur non nul. $\{u\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$. Un sous-espace vectoriel contenant u doit aussi contenir $2u$ (et $2u \neq u$ car $u \neq 0$) ou $-u$ et plus généralement tous les vecteurs de la forme λu, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dit autrement, un sous-espace F contenant u doit obligatoirement contenir $F_0 = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. De plus, il est clair que F_0 est un sous-espace de E (car $0 \in F_0$ et une combinaison linéaire de vecteurs de la forme λu, $\lambda \in \mathbb{K}$, est encore de cette forme). On dit alors que le vecteur u **engendre** le sous-espace F_0. C'est cette notion de sous-espace engendré à laquelle on s'intéresse maintenant dans le cas général.

Théorème 22. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis A une partie de E.

Il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A.

Démonstration . Il existe au moins un sous-espace de E contenant A à savoir E lui-même. On peut alors considérer F_0 l'intersection de tous les sous-espaces F de E contenant A. F_0 est un sous-espace de E en tant qu'intersection de sous-espaces de E et F_0 contient A en tant qu'intersection de partie de E contenant A. En résumé, F_0 est un sous-espace de E contenant A.

Si maintenant F est un sous-espace de E contenant A, par définition de F_0, on a $F_0 \subset F$. Finalement, F_0 est le plus petit sous-espace de E contenant A.

❏

Définition 14. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis A une partie de E.

Le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A s'appelle le **sous-espace engendré** par A et se note $\text{Vect}(A)$.

Remarque. $\text{Vect}(\varnothing) = \{0\}$.

Définition 15. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I.

Le **sous-espace engendré** par la famille $(x_i)_{i \in I}$ est le sous-espace engendré par la partie $\{x_i,\ i \in I\}$. Il se note $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$.

On dit alors que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une **famille génératrice** de $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$.
Dans le cas particulier où **Vect** $(x_i)_{i \in I} = E$, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une **famille génératrice** de E.

Théorème 23. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I.

$\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Démonstration . Notons F_0 l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

• Le vecteur nul est dans F_0. De plus, une combinaison linéaire de deux combinaisons linéaires de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est encore une combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$. Donc, F_0 est un sous-espace de E. De plus, chaque x_j, $j \in I$, est une combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$ (car $x_j = 1.x_j$) et donc F_0 contient $\{x_j,\ j \in I\}$. Puisque $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ est le plus petit sous-espace contenant $\{x_j,\ j \in I\}$, on en déduit que $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I} \subset F_0$.

• Inversement, puisque $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ est un sous-espace de E contenant chaque x_i, F_0 contient les combinaisons linéaires de deux de ces vecteurs puis, par récurrence, d'un nombre fini de ces vecteurs et donc, $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ contient toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. Ainsi, $F_0 \subset \text{Vect}\,(x_i)_{i \in I}$ et finalement $\text{Vect}\,(x_i)_{i \in I} = F_0$.

❏

Exemples.

• $\text{Vect}(0) = \{0\}$.
• Si u est un vecteur de E, $\text{Vect}(u) = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Si $u = 0$, on retrouve $\text{Vect}(0) = \{0\}$. Si $u \neq 0$, $\text{Vect}(u)$ est la **droite vectorielle** engendrée par u.
• Si u et v sont deux vecteurs de E, $\text{Vect}(u, v) = \left\{\lambda u + \mu v,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si $u \neq 0$, $v \neq 0$ et il n'existe pas $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v = \alpha u$, $\text{Vect}(u, v)$ est le **plan vectoriel** engendré par u et v.
• Puisque tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}\,(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
De même, $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\,\left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.
• L'ensemble $\mathcal{E}$ des suites réelles solutions de la récurrence $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, sont les suites de la forme $\lambda\,(2^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu\,(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Donc, $\mathcal{E} = \text{Vect}\left((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$.

❏

Le sous-espace engendré par une famille est en particulier un sous-espace. Ceci fournit une nouvelle méthode pour démontrer qu'un sous-ensemble F de l'espace $(E,+,.)$ est un sous-espace de l'espace $(E,+,.)$: on montre que F est un sous-espace engendré. C'est ce que l'on met en œuvre dans l'exercice suivant.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.

Soient $F_1 = \{(\lambda,\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, $F_2 = \left\{(\lambda-3\mu, 2\mu, \lambda+\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$, $F_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x-y+z=0\right\}$ et $F_4 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x+2y+3z=0 \text{ et } 2x+5y+z=0\right\}$.

Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Solution 6.

• $F_1 = \{(\lambda,\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\} = \{\lambda(1,1,1),\ \lambda\in\mathbb{R}\} = \text{Vect}(u)$ où $u=(1,1,1)$. F_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_1 est (u).

• $F_2 = \left\{(\lambda-3\mu, 2\mu, \lambda+\mu),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\} = \left\{\lambda(1,0,1)+\mu(-3,2,1),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}(u,v)$ où $u=(1,0,1)$ et $v=(-3,2,1)$. F_2 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_2 est (u,v).

• Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $x-y+z=0 \Leftrightarrow z=-x+y$.
Donc, $F_3 = \left\{(x,y,-x+y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1,0,-1)+y(0,1,1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}(u,v)$ où $u=(1,0,-1)$ et $v=(0,1,1)$. F_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_3 est (u,v).

• Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=0\\ 2x+5y+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2y-3z\\ 2(-2y-3z)+5y+z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=5z\\ x=-13z\end{array}\right.$.

Donc, $F_4 = \{(-13z,5z,z),\ z\in\mathbb{R}\} = \{z(-13,5,1),\ z\in\mathbb{R}\} = \text{Vect}(u)$ où $u=(-13,5,1)$. F_4 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_4 est (u).

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.

Soient $u=(1,1,3)$, $v=(1,0,1)$ et $w=(2,1,1)$.

Montrer que (u,v,w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que (u,v,w) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de u, v et w ou encore

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u,v,w) \Leftrightarrow \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/\ (x,y,z)=au+bv+cw.$$

C'est ce que l'on met en œuvre dans la solution qui suit.

Solution 7. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z)=au+bv+cw &\Leftrightarrow (x,y,z)=a(1,1,3)+b(1,0,1)+c(2,1,1)\\
&\Leftrightarrow (x,y,z)=(a+b+2c, a+c, 3a+b+c)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+2c=x\\ a+c=y\\ 3a+b+c=z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-a+y\\ a+b+2(-a+y)=x\\ 3a+b+(-a+y)=z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-a+y\\ -a+b=x-2y\\ 2a+b=-y+z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-a+y\\ b=a+x-2y\\ 2a+(a+x-2y)=-y+z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{3}(-x+y+z)\\ b=\dfrac{1}{3}(-x+y+z)+x-2y\\ c=-\dfrac{1}{3}(-x+y+z)+y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{3}(-x+y+z)\\ b=\dfrac{1}{3}(2x-5y+z)\\ c=\dfrac{1}{3}(x+2y-z)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y,z)=au+bv+cw$ à savoir $a=\dfrac{1}{3}(-x+y+z)$, $b=\dfrac{1}{3}(2x-5y+z)$ et $c=\dfrac{1}{3}(x+2y-z)$. Ceci montre que la famille (u,v,w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

4.3 Propriétés des sous-espaces engendrés

Théorème 24. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) a) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset \text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace de E.
b) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A = \text{Vect}(A) \Leftrightarrow A$ est un sous-espace de E.

2) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

3) Soit F un sous-espace de E. $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset F \Leftrightarrow \text{Vect}(A) \subset F$.

4) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A \subset B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

5) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Démonstration .

1) a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. $A \subset \text{Vect}(A)$ et $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace de E par définition de $\text{Vect}(A)$.

b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si A est un sous-espace de E, A est le plus petit sous espace de E contenant A et donc $\text{Vect}(A) = A$. Si $A = \text{Vect}(A)$, A est un sous-espace de E car $\text{Vect}(A)$ l'est.

2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace de E et donc $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

3) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si F contient $\text{Vect}(A)$, F contient A. Si F contient A, F est un sous-espace de E contenant A et puisque $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace de E contenant A, F contient $\text{Vect}(A)$.

4) Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \subset B$. $\text{Vect}(B)$ est un sous-espace de E contenant B et donc contenant A. $\text{Vect}(A)$ est un le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace de E contenant A. Donc, $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

5) Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$.

$A \subset A \cup B$ et donc $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(A \cup B)$. De même, $\text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$. Mais alors, puisque $\text{Vect}(A \cup B)$ est un sous-espace de E, $\text{Vect}(A \cup B)$ contient les sommes d'un élément de $\text{Vect}(A)$ et d'un élément de $\text{Vect}(B)$. Donc, $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A \cup B)$.

Inversement, $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ est un sous-espace de E en tant que somme de deux sous-espaces de E. De plus, $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ contient $\text{Vect}(A)$ et donc A. De même, $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ contient B et finalement $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ contient $A \cup B$. Ainsi, $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ est un sous-espace de E contenant $A \cup B$. Donc $\text{Vect}(A \cup B) \subset \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$ et finalement $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

❏

5 Familles libres. Bases

5.1 Vecteurs colinéaires

Définition 16. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient u et v deux vecteurs de E.

v est colinéaire à u si et seulement si $u = 0$ ou ($u \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ v = \lambda u$).

Théorème 25. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient u et v deux vecteurs de E.

v est colinéaire à u si et seulement si u est colinéaire à v.

Démonstration . Soient u et v deux vecteurs de E. Supposons que v soit colinéaire à u.

- Si $u = 0$, alors $u = 0.v$ et donc u est colinéaire à v.
- Si $v = 0$, alors u est colinéaire à v.
- Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, puisque v est colinéaire à u, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$. Puisque $u \neq 0$ et $v \neq 0$, λ est nécessairement non nul et on peut donc écrire $u = \frac{1}{\lambda} v$. Encore une fois, u est colinéaire à v.

On a montré dans tous les cas que u est colinéaire à v.

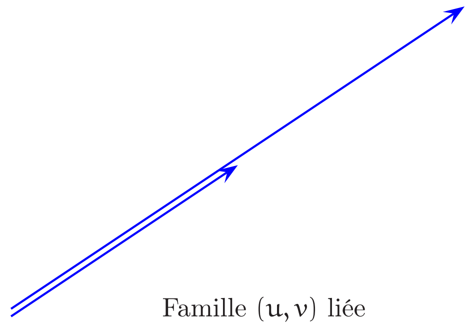
❏

⇨ **Commentaire** . *On peut donc dire dorénavant « u et v sont colinéaires » à la place de « v est colinéaire à u ».*

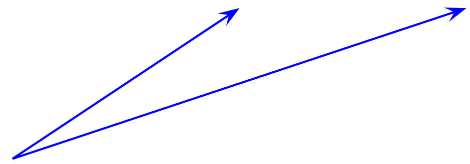
5.2 Familles libres, familles liées

Soient u et v deux vecteurs de E. Quand u et v sont colinéaires, on dit que les vecteurs u et v sont **linéairement dépendants** ou aussi que la famille (u, v) est **liée**. Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs u et v sont **linéairement**

indépendants ou encore que la famille (u, v) est **libre**.

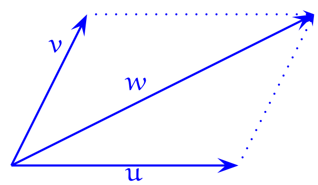


Famille (u, v) liée

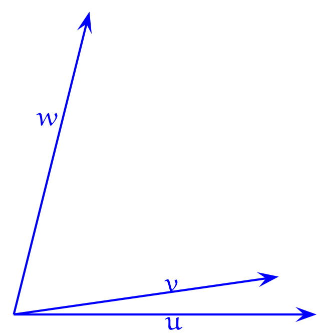


Famille (u, v) libre

Passons au cas de trois vecteurs. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, considérons les trois vecteurs $u = (1, 0, 1)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (4, 1, 3)$. On a $w = u + v$. Cette égalité crée une **relation de dépendance linéaire** entre ces trois vecteurs : w est une combinaison linéaire de u et v. Cette relation peut aussi s'écrire $v = -u + w$ ce qui montre que v est une combinaison linéaire de u et w ou aussi $u = -v + w$ ce qui montre que u est une combinaison linéaire de v et w. Pour ne pas faire jouer un rôle particulier à l'un des vecteurs, on peut écrire directement cette relation de dépendance linéaire sous la forme $u + v - w = 0$. Avec une telle relation, comme dans le cas d'une famille de deux vecteurs, on dit que la famille (u, v, w) est liée. Dans le cas contraire où il n'existe aucune relation de dépendance, on dit que la famille (u, v, w) est libre.



Famille (u, v, w) liée



Famille (u, v, w) libre

Analysons un autre exemple. Considérons les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (5, -12, 4)$ et $w = (2, 2, 2)$. On a $(-2).u + 0.v + 1.w = 0$. La famille (u, v, w) est liée car le vecteur w est combinaison linéaire de u et v : $w = 2.u + 0.v$. Pourtant, en aucun cas le vecteur v n'est combinaison linéaire de u et w car le vecteur v n'a pas trois composantes égales. Le fait que la famille (u, v, w) soit liée ne vient pas du fait que chacun des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres mais que **l'un au moins des trois vecteurs** est combinaison linéaire des deux autres. Ceci est encore lisible dans l'égalité $(-2).u + 0.v + 1.w = 0$ car on a ainsi une combinaison linéaire nulle des trois vecteurs u, v et w, **l'un au moins des trois coefficients n'étant pas nul**.

Ces quelques exemples conduisent aux définitions précises suivantes :

Définition 17. (définition d'une famille finie liée et d'une famille finie libre)

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient n un entier naturel non nul puis $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$.

La famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est **liée** (ou encore les vecteurs x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont **linéairement dépendants**) si et seulement si

$$\exists\, (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n / \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0) \right).$$

Une relation du type $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ s'appelle une **relation de dépendance linéaire** entre les vecteurs x_i.

La famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est **libre** (ou encore les vecteurs x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont **linéairement indépendants**) si et seulement si

$$\forall\, (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n / \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0 \right).$$

⇨ **Commentaire** . *La définition d'une famille liée peut s'écrire plus simplement :*

$$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est liée} \Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq(0,\ldots,0)/\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0,$$

et d'ailleurs ce que l'on fera systématiquement dans la pratique. Néanmoins, la phrase « la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée » est le contraire (la négation) de la phrase « la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre ». La définition précédente prend ceci en compte. On rappelle que si P et Q sont deux propositions la négation de $P\Rightarrow Q$ est $P\wedge\overline{Q}$. La négation de $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0\Rightarrow(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(0,\ldots,0)$ est donc $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=0$ et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\neq(0,\ldots,0)$.

DÉFINITION 18. (cas d'une famille quelconque)

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(x_i)_{i\in I}\in E^I$.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ qui est liée ou encore il existe une partie finie non vide J de I telle que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit liée.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre ou encore pour tout partie finie non vide J de I, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est libre.

Convention. Dans le cas où $I=\varnothing$, on dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est vide. Par convention, la famille vide, notée $\varnothing$, est libre.

Exercice 8. On munit $E=\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.

1) Soient $u=(1,0,1)$, $v=(0,1,1)$ et $w=(3,5,5)$. Montrer que la famille (u,v,w) est libre.

2) Soient $u=(1,-1,1)$, $v=(14,-2,5)$ et $w=(4,0,1)$. Montrer que la famille (u,v,w) est liée.

Solution 8.

1) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$au+bv+cw=0\Rightarrow\begin{cases}a+3c=0\\ b+5c=0\\ a+b+5c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3c\\ b=-5c\\ -3c-5c+5c=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ a=0\\ b=0\end{cases}.$$

Ainsi, $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $(au+bv+cw=0\Rightarrow a=b=c=0)$. Donc, la famille (u,v,w) est libre.

2) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$au+bv+cw=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+14b+4c=0\\ -a-2b=0\\ a+5b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2b\\ -2b+14b+4c=0\\ -2b+5b+c=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2b\\ c=-3b\end{cases}.$$

Soient $b=1$, $a=-2$ et $c=-3$. Pour ce choix de a, b et c, on a $au+bv+cw=0$ et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Donc, la famille (u,v,w) est liée. On note que l'on obtient explicitement $v=2u+3w$ qui est une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs u, v et w.

⇨ **Commentaire** .

◇ *En 1), nous aurions très bien pu résoudre le problème en écrivant $au+bv+cw=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow a=b=c=0$ en remplaçant les implications par des équivalences. Mais, on doit noter que si $a=b=c=0$, alors $au+bv+cw=0$, que la famille (u,v,w) soit libre ou liée. Ce qui fait de la famille (u,v,w) une famille libre est l'implication $au+bv+cw=0\Rightarrow a=b=c=0$ et nous n'avons donc écrit que cette implication.*

◇ *On a le même problème en 2). Ce qui fait que la famille* (u, v, w) *est liée est une implication du genre* $(a, b, c) = (-2, 1, -3) \Rightarrow au+bv+cw = 0$. *On aurait donc dû résoudre le problème en écrivant* $au+bv+cw = 0 \Leftarrow \ldots \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2b \\ c = -3b \end{array}\right. \Leftarrow (a, b, c) = (-2, 1, -3)$. *Nous ne l'avons pas fait pour ne pas nuire à la compréhension.*

Exercice 9. On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des opérations usuelles.

1) Soient $f_1 : x \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_3 : x \mapsto \cos(2x)$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est libre.

2) Soient $f_1 : x \mapsto \cos^2(x)$, $f_2 : x \mapsto \sin^2(x)$ et $f_3 : x \mapsto 1$. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est liée.

Solution 9.

1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} af_1 + bf_2 + cf_3 = 0 &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) + c\cos(2x) = 0 \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + c = 0 \text{ (obtenu pour } x = 0) \\ -a + c = 0 \text{ (obtenu pour } x = \pi) \\ b - c = 0 \text{ (obtenu pour } x = \pi/2) \end{array}\right. \\ &\Rightarrow a = 0 = c = b. \end{aligned}$$

On a montré que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (af_1 + bf_2 + cf_3 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0)$ et donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

2) $f_1 + f_2 - f_3 = 0$. Ainsi, il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de f_1, f_2 et f_3. On en déduit que la famille (f_1, f_2, f_3) est liée.

⇨ **Commentaire** . *Dans la solution précédente, « l'égalité* $a\cos(x) + b\sin(x) + c\cos(2x) = 0$ *» ne doit pas être comprise comme une équation d'inconnue* x. *L'égalité* $a\cos(x) + b\sin(x) + c\cos(2x) = 0$ *est précédée de l'information quantifiée :* $\forall x \in \mathbb{R}$. *Cela signifie l'information «* $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) + c\sin(2x) = 0$ *» doit être comprise comme un système d'une infinité d'équations d'inconnues* a, b *et* c. *Chaque fois que l'on donne une valeur à* x, *on obtient une équation précise que doivent vérifier* a, b *et* c. *Nous avons donc donné à* x *trois valeurs précises bien choisies et cela a suffi pour que* a, b *et* c *soient nuls.*

Exercice 10. On se place dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations usuelles.

Soient q_1 et q_2 deux complexes distincts puis $u = (q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u, v) est libre.

Solution 10. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} au + bv = 0 &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ aq_1^n + bq_2^n = 0 \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = 0 \text{ (obtenu pour } n = 0) \\ aq_1 + bq_2 = 0 \text{ (obtenu pour } n = 1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (q_2 - q_1)\,a = 0\ (q_2(\mathrm{I}) - (\mathrm{II})) \\ (q_1 - q_2)\,b = 0\ (q_1(\mathrm{I}) - (\mathrm{II})) \end{array}\right. \\ &\Rightarrow a = b = 0 \text{ (car } q_1 \neq q_2). \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille (u, v) est libre.

⇨ **Commentaire** . *Dans le cas où* $q = 0$, *la suite* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est conventionnellement la suite* $(1\ 0\ 0\ \ldots)$

Théorème 26. Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On munit E des opérations usuelles.

1) La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. En particulier, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

DÉMONSTRATION .

1) On doit montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ puis $(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.

Pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $\lambda_1 X^{i_1} + \ldots + \lambda_p X^{i_p} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ car un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Ceci montre que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2) • On doit montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ puis $(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que les i_j soient deux distincts. On réordonne les polynômes $P_{i_1}, \ldots, P_{i_p}$ en des polynômes $Q_1, \ldots, Q_p$ de sorte que $\deg(Q_1) < \ldots < \deg(Q_p)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_p Q_p = 0$. Soit $k = \text{Max}\{i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i \neq 0\}$. Par définition de k, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i = 0$ et $\lambda_k \neq 0$. Mais ceci est impossible car le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i$ est de degré k. Donc, il n'existe pas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_p Q_p = 0$.

La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

• Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, en particulier les polynômes P_n, $n \in \mathbb{N}$, sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. On en déduit que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

❏

Par exemple, si $a \in \mathbb{K}$, la famille $((X - a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, .)$.

5.3 Propriétés des familles libres (ou liées)

On commence par le cas où la famille contient un ou deux vecteurs.

Théorème 28. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Soit $u \in E$. (u) est libre si et seulement si $u \neq 0$.

2) Soit $(u, v) \in E^2$. (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Démonstration .

1) Si $u = 0$, $1.u = 0$. On obtient donc une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls du vecteur de la famille (u). Donc, le famille (u) est liée.
Si $u \neq 0$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ (car $u \neq 0$). Donc la famille (u) est libre.

2) Supposons u et v colinéaires. Si $u = 0$, $1.u + 0.v = 0$. On obtient donc une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des vecteurs de la famille (u, v). Donc, le famille (u, v) est liée. De même, si $v = 0$ la famille est liée.
Sinon, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda.u$. On a alors $1.v - \lambda.u = 0$ et on obtient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des vecteurs de la famille (u, v). La famille (u, v) est liée.
On a montré que si les vecteurs u et v sont colinéaires, la famille (u, v) est liée.

Réciproquement, si la famille (u, v) est liée, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda.u + \mu.v = 0$. Si par exemple $\mu \neq 0$, on a $v = -\dfrac{\lambda}{\mu}.u$ et donc les vecteurs u et v sont colinéaires.

❏

Théorème 29. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs de E.

Si l'un des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est nul, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée.
Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors tous les vecteurs de cette famille sont non nuls.

Démonstration . Puisque une famille quelconque non vide est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie non vide qui est liée, il suffit de démontrer le résultat quand la famille de vecteurs est finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in E^n$.

Supposons que l'un des x_j, noté x_i, soit nul. Alors si $n \geqslant 2$, $1.x_i + \displaystyle\sum_{j\neq i} 0.x_j = 0$ et si $n = 1$, $1.x_i = 0$. On a ainsi fourni une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des x_j. La famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est donc liée.

Par contraposition, si la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est libre, tous les vecteurs de cette famille sont nécessairement non nuls. ❏

⇨ **Commentaire** . *Dans la démonstration précédente, si on adopte la convention (usuelle) qui dit qu'une somme vide est nulle, alors il n'y a pas de discuter suivant que* $n = 1$ *ou* $n \geqslant 2$. *Dans tous les cas, on peut écrire* $1.x_i + \displaystyle\sum_{j\neq i} 0.x_j = 0$. *On adoptera cette convention dans les démonstrations ultérieures.*

Théorème 30. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_k)_{k \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E.

Si il existe deux indices i et j tels que $i \neq j$ et x_i et x_j soient colinéaires, alors la famille $(x_k)_{k \in I}$ est liée.
Si la famille $(x_k)_{k \in I}$ est libre, alors les vecteurs de cette famille sont deux à deux non colinéaires.

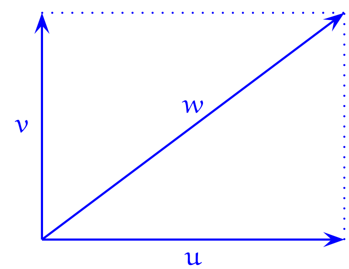
Démonstration . Il suffit de démontrer le résultat quand la famille de vecteurs est finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in E^n$.

Supposons qu'il existe i et j tels que $i \neq j$ et x_i et x_j colinéaires. Si $x_i = 0$ ou $x_j = 0$, le théorème précédent montre que la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée. On suppose maintenant que x_i et x_j sont non nuls. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x_j = \lambda x_i$. Alors $1.x_j + (-\lambda).x_i + \sum_{k \neq i,\ k \neq j} 0.x_k = 0$. On a ainsi fourni une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des x_k. La famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc liée.

Par contraposition, si la famille $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est libre, les vecteurs de cette famille sont nécessairement deux à deux non colinéaires.

❏

On a vu que pour une famille de deux vecteurs u et v, la famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires. A partir de trois vecteurs, le théorème précédent affirme que si la famille de vecteurs est libre, il est nécessaire que les vecteurs de la famille soient deux à deux non colinéaires mais ce n'est plus suffisant. Il existe des familles liées (u, v, w) de trois vecteurs telles que les vecteurs u, v et w sont deux à deux non colinéaires. Prenons par exemple u et v non colinéaires puis $w = u + v$. u et v ne sont pas colinéaires de même que u et w et aussi v et w. Pourtant, la famille (u, v, w) est liée.



Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit libre.

Théorème 31. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E constituée d'au moins deux vecteurs.

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si il existe un vecteur de cette famille qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

Démonstration . Il suffit de démontrer le résultat quand la famille de vecteurs est finie. Soient $n \geqslant 2$ puis $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in E^n$.

Supposons la famille $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ liée. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$. Soit i un indice tel que $\lambda_i \neq 0$. On peut écrire $x_i = \sum_{j \neq i} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) x_j$. Le vecteur x_i est alors combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Réciproquement, supposons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que x_i soit combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille. Il existe $(\lambda_j)_{j \neq i} \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que $x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$. Mais alors, $1.x_i + \sum_{j \neq i} (-\lambda_j)\, x_j = 0$ et on obtient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des vecteurs de la famille. La famille est donc liée.

Enfin, par contraposition des deux implications, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille.

❏

⇨ **Commentaire** . *Toujours avec la convention qui dit qu'une somme vide est nulle, le théorème précédent reste vrai pour une famille d'un seul vecteur. On aurait donc pu se dispenser de la précision : « . . . constituée d'au moins deux vecteurs ».*

(u, v, w) liée $\not\Rightarrow$ w est combinaison linéaire de u. Le théorème précédent dit que si la famille (u, v, w) est liée, alors l'un au moins des trois vecteurs u ou v ou w est combinaison linéaire des deux autres. Mais le théorème précédent ne dit pas que chacun des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Considérons par exemple un vecteur u non nul donné puis $v = 2u$ puis w non colinéaire à u (et donc non colinéaire à v). La famille (u, v, w) est liée car les deux vecteurs u et v sont colinéaires. Pourtant w n'est pas combinaison linéaire de u et v. Par contre $v = 2.u + 0.w$ est combinaison linéaire de u et w. Le théorème qui suit analyse plus précisément ce problème.

Théorème 32. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(u_1, \dots, u_n, u) \in E^{n+1}$.

Si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et la famille $(u_1, \dots, u_n, u)$ est liée, alors u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

Démonstration . Puisque la famille $(u_1, \dots, u_n, u)$ est liée, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\lambda u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

Si $\lambda = 0$, il reste $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Ainsi, si $\lambda = 0$, alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda) = (0, \dots, 0)$ ce qui est exclu. Donc, $\lambda \neq 0$ puis $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) u_i$. u est effectivement combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

❏

Le théorème 32 se généralise bien sûr à une famille quelconque $L = (u_i)_{i \in I}$ sous la forme : si L est libre et $L \cup \{u\}$ est liée, alors $u \in \text{Vect}\,(u_i)_{i \in I}$. Dans ce dernier intitulé, l'écriture « $L \cup \{u\}$ » est mauvaise car elle suppose que L est une partie de E et pas une famille de vecteurs de E. Nous nous en contenterons néanmoins en identifiant plus ou moins les deux notions.

Théorème 33. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E.

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si (pour toute partie finie non vide J de I,
$\forall \left((\lambda_j)_{j \in J}, (\mu_j)_{j \in J}\right) \in \left(\mathbb{K}^J\right)^2,\ \displaystyle\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = \mu_j x_j \Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = \mu_j$).

Démonstration . Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille non vide de vecteurs de E.

Supposons la famille $(x_i)_{i \in I}$ libre. Soit J une partie finie et non vide de I. Alors, la famille $(x_j)_{j \in J}$ est libre. Soit $\left((\lambda_j)_{j \in J}, (\mu_j)_{j \in J}\right) \in \left(\mathbb{K}^J\right)^2$.

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = \sum_{j \in J} \mu_j x_j \Rightarrow \sum_{j \in J} (\lambda_j - \mu_j)\, x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j - \mu_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = \mu_j.$$

Supposons que pour toute partie finie et non vide J de I, $\forall \left((\lambda_j)_{j \in J}, (\mu_j)_{j \in J}\right) \in \left(\mathbb{K}^J\right)^2,\ \displaystyle\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = \mu_j x_j \Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = \mu_j$.

Soit J une partie finie et non vide de I. En appliquant ce qui précède au cas où tous les μ_j, $j \in J$, sont nuls, on obtient : $\forall (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J,\ \displaystyle\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = 0$. Par suite, la famille $(x_j)_{j \in J}$ est libre.
Puisque toute sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre, on en déduit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

❏

⇨ **Commentaire** . *Le théorème 33 est un moment important. Quand une famille est libre, on a la possibilité d'**identifier les coefficients**. Par exemple,*

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ (a + b)\cos(x) + (2a - b + c)\sin(x) + (a + 2c)\cos(2x) = 3\cos(x) + 2\cos(2x)) \Leftrightarrow a + b = 3,\ 2a - b + c = 0 \text{ et } = a + 2c = 2$$

puisque la famille constituée des trois fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ est libre d'après l'exercice n° 9.

Théorème 34. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration . Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E, libre. Soient J une partie non vide de I puis K une partie finie non vide de J. K est alors une partie finie non vide de I et donc la famille $(x_i)_{i \in K}$ est libre.
Puisque toute sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i \in J}$ est libre, on en déduit que la famille $(x_i)_{i \in J}$ est libre.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E, liée. Soit J un ensemble d'indices tel que $I \subset J$. Si $(x_i)_{i \in J}$ est libre, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre ce qui est faux. Donc, $(x_i)_{i \in J}$ est liée.

❏

Le théorème suivant est à part. Il prépare la définition de la dimension d'un espace vectoriel qui sera exposée au chapitre suivant.

Théorème 35. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ combinaisons linéaires de n vecteurs constituent une famille liée.

Démonstration . On montre le résultat par récurrence sur n.

• Montrons que deux combinaisons linéaires d'un même vecteur constituent une famille liée. Soit $x_1 \in E$. Soient y_1 et y_2 deux vecteurs de E, tous deux combinaisons linéaires du vecteur x_1. Posons $y_1 = \lambda x_1$ et $y_2 = \mu x_1$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Si $y_1 = 0$ ou $y_2 = 0$, la famille (y_1, y_2) est liée.
Sinon, $y_1 \neq 0$ et $y_2 \neq 0$ ce qui impose $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. On a alors $\mu y_1 - \lambda y_2 = \lambda\mu x_1 - \lambda\mu x_1 = 0$. On a ainsi obtenu une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des vecteurs y_1 et y_2. La famille (y_1, y_2) est liée.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $n+1$ combinaisons linéaires de n vecteurs constituent une famille liée. Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Soient y_1, ..., y_{n+1}, y_{n+2} $n+2$ vecteurs tous combinaisons linéaires des vecteurs x_1, ..., x_{n+1}. Posons donc

$$\begin{array}{ccccccccccc}
y_1 & = & a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & + & a_{1,n+1}x_{n+1} \\
y_2 & = & a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & + & a_{2,n+1}x_{n+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
y_{n+1} & = & a_{n+1,1}x_1 & + & a_{n+1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n+1,n}x_n & + & a_{n+1,n+1}x_{n+1} \\
y_{n+2} & = & a_{n+2,1}x_1 & + & a_{n+2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n+2,n}x_n & + & a_{n+2,n+1}x_{n+1}
\end{array}$$

où les $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n+2$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Si tous les nombres $a_{i,n+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n+2$, sont nuls, alors les vecteurs y_1, ..., y_{n+1} sont combinaisons linéaires des vecteurs x_1, ..., x_n. Par hypothèse de récurrence, la famille $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ est liée puis la famille $(y_1, \ldots, y_{n+2})$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

Supposons maintenant que l'un au moins des coefficients $a_{i,n+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n+2$, est non nul. Quite à renuméroter les vecteurs y_i, on supposera dorénavant que $a_{n+2,n+1} \neq 0$.
Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose $z_i = y_i - \dfrac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} y_{n+2}$. Les vecteurs z_1, ..., z_{n+1} sont alors combinaisons linéaires des vecteurs x_1, ..., x_n (et plus du vecteur x_{n+1}). Par hypothèse de récurrence, la famille $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ est liée. Par suite, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \neq 0$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i = 0$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \left(y_i - \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}} y_{n+2}\right) = 0$ puis que

$$.\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i + \left(\sum_{i=1}^{n} -\lambda_i \frac{a_{i,n+1}}{a_{n+2,n+1}}\right) y_{n+2} = 0.$$

Puisque les λ_i ne sont pas tous nuls, l'un au moins des coefficients de la combinaison linéaire ci-dessus n'est pas nul et donc encore une fois, la famille $(y_1, \ldots, y_{n+2})$ est liée.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

5.4 Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition 19. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E.

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est une **base** de E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire, de manière unique, des vecteurs de la famille $(e_i)_{i \in I}$.

Dans le cas où $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, si x est un vecteur de E, x s'écrit sous la forme $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i e_i$ où les x_i sont des éléments de $\mathbb{K}$, nuls sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux. La famille de nombres $(x_i)_{i \in I}$ est la famille des **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Convention. $\varnothing$ est une base de l'espace vectoriel $(\{0\}, +, .)$.

⇨ **Commentaire** . *Dans la définition précédente, rien ne dit que si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel « pris au hasard », il existe au moins une base dans E. Le problème de l'existence d'une base sera en partie réglé au chapitre suivant dans le cas d'un « espace de dimension finie ».*

Exercice 11. On munit $E = \mathbb{R}^3$ des opérations usuelles. Soit $u = (2, 0, -1)$, $v = (2, 1, 3)$et $w = (0, 1, 2)$.

Montrer que la famille (u, v, w) est une base de E. Préciser les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette base.

Solution 11. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) = au+bv+cw \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+2b = x \\ b+c = y \\ -a+3b+2c = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -b+\dfrac{x}{2} \\ c = -b+y \\ -\left(-b+\dfrac{x}{2}\right)+3b+2(-b+y) = z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{1}{4}(x-4y+2z) \\ a = -\dfrac{1}{4}(x-4y+2z)+\dfrac{x}{2} \\ c = -\dfrac{1}{4}(x-4y+2z)+y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{1}{4}(x-4y+2z) \\ a = \dfrac{1}{4}(x+4y-2z) \\ c = \dfrac{1}{4}(-x+8y-2z) \end{array}\right.$$

On a montré que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\exists ! (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z) = au+bv+cw$. Donc, la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = \dfrac{1}{4}(x+4y-2z)u+\dfrac{1}{4}(x-4y+2z)v+\dfrac{1}{4}(-x+8y-2z)w$. La famille des coordonnées de (x,y,z) dans la base (u,v,w) est donc $\left(\dfrac{1}{4}(x+4y-2z), \dfrac{1}{4}(x-4y+2z), \dfrac{1}{4}(-x+8y-2z)\right)$.

Théorème 36. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs de E.

La famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre et génératrice de E.

Démonstration . Par définition, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_i)_{i\in I}$ si et seulement si la famille $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E. De plus, les coefficients d'une telle combinaison linéaire sont uniquement définis si et seulement si $(e_i)_{i\in I}$ est libre d'après le théorème 33.

❏

Quand on se donne un espace vectoriel $(E,+,.)$, rien ne prouve que l'on puisse trouver dans cet espace au moins une base. On verra au chapitre suivant que sous certaines conditions, il existe au moins une base de E. On peut néanmoins donner dès maintenant des situations où l'espace $(E,+,.)$ admet au moins une base.

• Si $E = \{0\}$, une base de E est $\varnothing$. On note que $\varnothing$ est libre (par convention) et génératrice de $E = \{0\}$.

• Soit $E = \mathbb{K}^n$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $e_i = (\delta_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ où le 1 est placé en i-ème composante. Pour tout $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E$, on a

$$x = (x_1,\ldots,x_n) = x_1(1,0,\ldots,0)+\ldots+x_n(0,\ldots,0,1) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est donc génératrice de $\mathbb{K}^n$. De plus, pour $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x_1e_1+\ldots+x_ne_n = 0 \Rightarrow (x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = 0.$$

La famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est donc libre. Finalement, la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas, les composantes $x_1, \ldots, x_n$, d'un n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ sont aussi ses coordonnées dans la base canonique.

• Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Tout polynôme est combinaison linéaire, de manière unique, de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}[X]$. Les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont ses coefficients.

Plus généralement, pour $a \in \mathbb{K}$, posons $P_k = (X-a)^k$. La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre d'après le théorème 26. De plus, la formule de Taylor montre que tous polynôme est combinaison linéaire de la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ($\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ où les $\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$ sont nuls sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux) et la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$. Finalement, la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. La famille des coordonnées d'un polynôme P dans la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est $\left(\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

De même, si $n \in \mathbb{N}$, la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

6 Applications linéaires

6.1 Définitions

DÉFINITION 20. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f une application de E vers E'.

f est une **application linéaire** de E vers E' si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des applications linéaires de E vers E' se note $\mathcal{L}(E, E')$.

Dans la pratique, on peut résumer les conditions en une seule :

Théorème 37. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f une application de E vers E'.

f est une application linéaire de E vers E' si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

DÉMONSTRATION .

• Supposons f linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$. $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

• Supposons que $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Pour $\lambda = \mu = 1$, on obtient $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et pour $y = 0$ et $\mu = 0$, on obtient $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc, f est linéaire.

❏

Exercice 12. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (2x - y + z, x + 2z).$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.

Solution 12. Soient $(u, v) = ((x, y, z), (x', y', z')) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda u + \mu v) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
&= (2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + 2(\lambda z + \mu z')) \\
&= (\lambda(2x - y + z) + \mu(2x' - y' + z'), \lambda(x + 2z) + \mu(x' + 2z')) = \lambda(2x - y + z, x + 2z) + \mu(2x' - y' + z', x' + 2z') \\
&= \lambda f(u) + \mu f(v).
\end{aligned}$$

Donc, $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.

DÉFINITION 21. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit f une application de E vers E'.

Une application linéaire de E vers E s'appelle un **endomorphisme** de E. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}(E)$.
Une application linéaire bijective de E sur E' s'appelle un **isomorphisme** de E sur E'.
Une application linéaire bijective de E sur E s'appelle un **automorphisme** de E. L'ensemble des automorphismes de E se note $GL(E)$.

Théorème 38. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

On a nécessairement $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_{E'}}$.

DÉMONSTRATION . $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = f\left(0.\overrightarrow{0_E}\right) = 0.f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_{E'}}$.

❏

6.2 Détermination des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$

Déterminons d'abord les applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_i = f(e_i)$ (les a_i sont des nombres). Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a nécessairement

$$\begin{aligned} f((x_1, \dots, x_n)) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \end{aligned}$$

Ainsi, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$, f est nécessairement une application de la forme $x \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ où les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Réciproquement, soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ puis $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. f est bien une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. De plus, pour $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{K}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(y_1, \dots, y_n)) &= f((\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)) \\ &= a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + \mu(a_1y_1 + \dots + a_ny_n) \\ &= \lambda f((x_1, \dots, x_n)) + \mu f((y_1, \dots, y_n)), \end{aligned}$$

et donc f est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Donc,

Théorème 39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ sont les applications de la forme

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Une telle application s'appelle une **forme linéaire sur** $\mathbb{K}^n$.

Ainsi, par exemple, les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ ou encore les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$) sont les applications de la forme $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$ où a, b et c sont trois réels donnés.

Passons au cas général. Soient n et p deux entiers naturels non nuls puis f une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$. Posons $f = (f_1, \dots, f_p)$ où les f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des applications de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Il est clair que f est linéaire si et seulement si chaque f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, est linéaire et donc, d'après le théorème 39 :

Théorème 40. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Les applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ sont les applications de la forme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n)$ où $(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, \dots, a_{p,1}, \dots, a_{p,n}) \in \mathbb{K}^{np}$.

Ainsi, par exemple, les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ sont les applications de la forme $(x, y, z) \mapsto (ax+by+cz, a'x+b'y+c'z)$ où a, b, c, a', b' et c' sont six réels donnés.

6.3 Images directes ou réciproques de sous-espaces

Théorème 41. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

Pour tout sous-espace F de E, $f(F)$ est un sous-espace de $(E', +, .)$.

Pour tout sous-espace F' de E', $f^{-1}(F')$ est un sous-espace de $(E, +, .)$.

Démonstration .

• Soit F un sous-espace vectoriel de E. $\overrightarrow{0_E} \in F$ et donc $\overrightarrow{0_{E'}} = f\left(\overrightarrow{0_E}\right) \in f(F)$.

Soient $(x', y') \in (f(F))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(x, y) \in F^2$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$. Puisque F est un sous-espace de E, $\lambda x + \mu y \in F$ puis

$$\lambda x' + \mu y' = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y) \in f(F).$$

Ceci montre que $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de E'.

• Soit F' un sous-espace vectoriel de E'. $\overrightarrow{0_{E'}} \in F'$. Puisque $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_{E'}}$, $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) \in F'$ et donc $\overrightarrow{0_E} \in f^{-1}(F')$.

Soient $(x, y) \in \left(f^{-1}(F')\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $f(x) \in F'$ et $f(y) \in F'$ puis $\lambda f(x) + \mu f(y) \in F'$ ou encore $f(\lambda x + \mu y) \in F'$ ou enfin $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(F')$.

Ceci montre que $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

❏

6.4 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 22. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

Le **noyau** de f est l'ensemble des éléments x de E tel que $f(x) = 0$. Il est noté $\text{Ker}(f)$ (en anglais, noyau se dit kernel et en allemand, noyau se dit kern). Ainsi,

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E / \ f(x) = 0\} = f^{-1}\left(\{0\}\right).$$

L'**image** de f est l'ensemble des images des éléments de E par f. Elle est notée $\text{Im}(f)$. Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \{f(x), \ x \in E\} = f(E).$$

Théorème 42. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

$\text{Ker}(f)$ est un sous-espace de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace de E'.

Démonstration. $\{0\}$ est un sous-espace de E' et donc $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace de E d'après le théorème 39.

E est un sous-espace de E et donc $\text{Im}(f) = f(E)$ est un sous-espace de E' d'après le théorème 39.

❏

Théorème 43. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = E'$.
f est un isomorphisme de E sur E' si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = E'$.

Démonstration.

• Supposons f injective. Soit $x \in E$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0$ (car f injective). Donc, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.
Réciproquement, supposons $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Soit $(x, y) \in E^2$. $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{Ker}(f) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Donc, f est injective.

• f surjective $\Leftrightarrow f(E) = E' \Leftrightarrow \text{Im}(f) = E'$.

• f bijective $\Leftrightarrow$ f injective et surjective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = E'$.

❏

Exercice 13. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, x + 2y, -y) \end{array}$. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. f est-elle injective ? surjective ?

Solution 13. f est linéaire.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f((x, y)) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).\end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$. On en déduit que f est injective.

• Soit $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x', y', z') \in \text{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ f((x, y)) = (x', y', z') \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} x - y = x' \\ x + 2y = y' \\ -y = z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} y = -z' \\ x = x' - z' \\ (x' - z') + 2(-z') = y' \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} y = -z' \\ x = x' - z' \\ x' - y' - 3z' = 0 \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Si $x' - y' - 3z' \neq 0$, le système précédent, d'inconnue (x, y), n'a pas de solution et donc $(x', y', z') \notin \text{Im}(f)$.

Si $x' - y' - 3z' = 0$, le système précédent admet un couple solution à savoir $(x, y) = (x' - z', -z')$ ou encore, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ f((x, y)) = (x', y', z')$. Finalement, $\text{Im}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - y - 3z = 0\right\}$. Le vecteur $(1, 0, 0)$ n'est pas dans $\text{Im}(f)$ et donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. f n'est pas surjective.

6.5 Images de familles libres ou génératrices

Théorème 44. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est liée.

Si la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

Démonstration . Supposons la famille $(u_i)_{i \in I}$ liée. Il existe une sous-famille finie non vide $(u_j)_{j \in J}$ qui est liée. Il existe donc une famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ de scalaires non tous nuls telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j u_j = 0$. Mais alors

$$\sum_{j \in J} \lambda_j f(u_j) = f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j u_j\right) = f(0) = 0.$$

On a obtenu une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des vecteurs $f(u_j)$, $j \in J$. La famille $(f(u_j))_{j \in J}$ est liée puis la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

Par contraposition, si la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

❏

⇨ **Commentaire** . *Ainsi, une application linéaire préserve les liaisons pouvant exister entre certains vecteurs. En particulier, l'image d'un vecteur colinéaire à* u *est un vecteur colinéaire* $f(u)$ *:* $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Par contre, l'image d'une famille libre n'est pas nécessairement une famille libre. Prenons par exemple pour f l'application nulle de E vers E' où E est un espace contenant au moins un vecteur non nul u. La famille (u) est libre mais la famille $(f(u))$ n'est pas libre car contient le vecteur nul. Le théorème suivant analyse le problème.

Théorème 45. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

f est injective si et seulement si l'image de toute famille libre de E par f est une famille libre de E'.

Démonstration . On note que $f(\varnothing) = \varnothing$ est une famille libre, que f soit injective ou pas.

• Supposons f injective. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs de E qui est libre. Soit J une partie finie non vide de I. Montrons que la famille $(f(u_j))_{j \in J}$ est libre. Soit $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} \lambda_j f(u_j) = 0 &\Rightarrow f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j u_j\right) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{j \in J} \lambda_j u_j = 0 \text{ (car } f \text{ est injective et donc Ker}(f) = \{0\}) \\
&\Rightarrow \forall j \in J,\ \lambda_j = 0 \text{ (car la famille } (u_j)_{j \in J} \text{ est libre)}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(f(u_j))_{j \in J}$ est libre. Puisque toute sous-famille finie de la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre.

• Supposons que l'image de toute famille libre de E par f soit une famille libre de E'. Si E contient un vecteur non nul u, la famille (u) est libre. Il en est de même de la famille $(f(u))$ et en particulier $f(u) \neq 0$. Ceci montre que $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et donc que f est injective.

❏

Théorème 46. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

L'image d'une famille génératrice de E par f est une famille génératrice de $f(E) = \text{Im}(f)$.

Démonstration . Si $E = \{0\}$, $\varnothing$ est une famille génératrice de E. $f(\varnothing) = \varnothing$ est effectivement une famille génératrice de $f(E) = \{0\}$.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs de E, génératrice de E. Tout vecteur de E est donc combinaison linéaire des vecteurs u_i, $i \in I$. Par linéarité, tout vecteur de $f(E)$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(u_i)$, $i \in I$, et donc la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de $f(E)$.

❏

Exercice 14. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+2y, -y) \end{array}$.

Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Solution 14.

1ère solution. $\text{Im}(f) = \left\{(x-y, x+2y, -y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1,1,0) + y(-1,2,-1),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (-1,2,-1)$. De plus, les vecteurs u_1 et u_2 n'étant clairement pas colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre. Finalement, (u_1, u_2) est une base de $\text{Im}(f)$.

2ème solution. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (e_1, e_2) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Donc, $(u_1, u_2) = (f(e_1), f(e_2))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (-1,2,-1)$ ...

Théorème 47. Soient $(E, +, .)$ et $(E', +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

f est surjective si et seulement si l'image de toute famille génératrice de E par f est une famille génératrice de E'.

Démonstration . Supposons f surjective. Donc, $\text{Im}(f) = E'$. Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. D'après le théorème précédent, $f(\mathcal{F})$ est génératrice de $\text{Im}(f) = E'$.

Supposons que l'image de toute famille génératrice de E par f soit une famille génératrice de E'. Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E. $f(\mathcal{F})$ est une famille génératrice de E'. D'après le théorème précédent, $f(\mathcal{F})$ est aussi une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ ou encore $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\mathcal{F})) = E'$. On en déduit que f est surjective.

❏

En combinant les théorèmes 45 et 47, on obtient immédiatement :

Théorème 48. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant au moins une base et $(E', +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$.

f est un isomorphisme de E sur E' si et seulement si l'image de toute base de E par f est une base de E'.

6.6 Ensembles d'applications linéaires

6.6.1 L'espace $(\mathcal{L}(E, F), +, .)$

Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On rappelle que l'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}(E, F)$. $\mathcal{L}(E, F)$ est une partie de F^E l'ensemble des applications de E vers F et on rappelle que $\left(F^E, +, .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les opérations $+$ et $.$ étant définies par :

$$\forall (f,g) \in \left(F^E\right)^2,\ \forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } \forall f \in F^E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

Vérifions alors que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(F^E, +, .\right)$.

- $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$.
- $0 \in \mathcal{L}(E, F)$ (l'application nulle est linéaire).
- Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Vérifions que $af + bg$ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}(af+bg)(\lambda x + \mu y) &= af(\lambda x + \mu y) + bg(\lambda x + \mu y) = a(\lambda f(x) + \mu f(y)) + b(\lambda g(x) + \mu g(y)) \\ &= \lambda(af+bg)(x) + \mu(af+bg(y).\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2$, $af + bg \in \mathcal{L}(E, F)$ (une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire).

Ceci montre que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\left(F^E, +, .\right)$. On peut énoncer :

Théorème 49. Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

6.6.2 L'anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$

On étudie maintenant le cas particulier où $F = E$. Dans ce cas, $\circ$ est une loi interne dans E^E et $\mathcal{L}(E)$ est une partie de E^E. On va vérifier que $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (la notion de sous-anneau n'est pas au programme de maths sup). On commence par un résultat qui montre que $\circ$ est une loi interne dans E.

Théorème 50.

1) Soient $(E,+,.)$, $(F,+,.)$ et $(G,+,.)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E,F \times \mathcal{L}(F,G)$, $g\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ (une composée d'applications linéaires est linéaire).

2) En particulier, si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $g\circ f \in \mathcal{L}(E)$ (une composée d'endomorphismes est un endomorphisme).

Démonstration. Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F \times \mathcal{L}(F,G)$. Soient $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$g\circ f(\lambda x+\mu y) = g(f(\lambda x+\mu y)) = g(\lambda f(x)+\mu f(y)) = \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) = \lambda g\circ f(x) + \mu g\circ f(y).$$

Donc, $g\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

❏

On établit maintenant la distributivité de $\circ$ sur $+$:

Théorème 51. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dans $\mathcal{L}(E)$, $\circ$ est distributive sur $+$.

Démonstration. Il y a deux distributivités à vérifier, la distributivité à droite et la distributivité à gauche. La distributivité à droite est immédiate. Seule la distributivité à gauche n'est vraie qu'à cause de la linéarité :

Soit $(f,g,h) \in (\mathcal{L}(E))^3$. Soit $x \in E$. Par définition de l'addition des endomorphismes, $(f+g)\circ h(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x))+g(h(x)) = (f\circ h+g\circ h)(x)$. Donc, $(f+g)\circ h = f\circ h+g\circ h$.

Soit $(f,g,h) \in (\mathcal{L}(E))^3$. Soit $x \in E$. Par linéarité de h, $h\circ(f+g)(x) = h((f+g)(x)) = h(f(x)+g(x)) = h(f(x))+h(g(x)) = (h\circ f+h\circ g)(x)$. Donc, $h\circ(f+g) = h\circ f+h\circ g$. ❏

On peut maintenant énoncer :

Théorème 52. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau.

Démonstration. • On sait que $(\mathcal{L}(E),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier, $(\mathcal{L}(E),+)$ est un groupe commutatif.

• D'après le théorème 50, on sait que $\circ$ est une loi interne dans $\mathcal{L}(E)$. On sait que $\circ$ est associative. $\circ$ possède un élément neutre dans $\mathcal{L}(E)$, à savoir Id_E (Id_E est bien sûr linéaire). Enfin, $\circ$ est distributive sur $+$ d'après le théorème 51.

Ceci montre que $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau.

❏

⇨ **Commentaire** . *On verra plus loin que dès que E contient au moins deux vecteurs non colinéaires (on dira dans le chapitre suivant que E est de dimension au moins 2), l'anneau $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ n'est pas commutatif.*

On définit maintenant dans $\mathcal{L}(E)$ la notation f^n.

Définition 23. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^n = \underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ facteurs}}$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose aussi par convention $f^0 = Id_E$.

⇨ **Commentaire** . *La convention $f^0 = Id_E$ est dangereuse même si elle fonctionne souvent dans la pratique. Cette convention n'est fondamentalement « vraie » que dans le cas où f est de plus bijectif c'est-à-dire le cas où f est un automorphisme, ce qui est l'objet du paragraphe suivant. Dans le cas général, il se peut que cette convention fasse commettre des erreurs inattendues et on évitera si possible de l'utiliser.*

On donne maintenant des règles usuelles de calculs avec des exposants. Quand un seul endomorphisme f est utilisé dans la formule, on retrouve une formule classique. Dès que deux endomorphismes f et g sont utilisés, on est sûr que la formule est vraie quand f et g **commutent**. Nous avons donc séparés les résultats en deux théorèmes (même si cette classification est critiquable) en raison de ce problème.

Dans les théorèmes qui suivent, la composée $f \circ g$ est notée plus simplement fg.

Théorème 53. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $f^n f^p = f^{n+p}$.
- $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $(f^n)^p = f^{np}$.

Théorème 54. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que f et g **commutent** (c'est-à-dire $fg = gf$).

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(fg)^n = f^n g^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$ (avec la convention $f^0 = g^0 = Id_E$) (formule du binôme de Newton).
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n - g^n = (f-g) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^{n-1-k} g^k$ (avec la convention $f^0 = g^0 = Id_E$).

Ainsi, si f et g commutent, $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$. Si f et g ne commutent pas, tout ce que l'on peut écrire est $(f+g)^2 = (f+g)(f+g) = f^2 + fg + gf + g^2$.

A toutes les règles de calcul qui ont précédées et qui concernent les opérations $+$ et $\circ$, on doit en rajouter une qui concerne $.$ et $\circ$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall g \in \mathcal{L}(F, G)$, $(\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda g \circ f$ (pour tout x de E, $g(\lambda f(x) = \lambda g(f(x)) = (\lambda g)(f(x))$.)

6.6.3 Automorphismes. Le groupe $(GL(E), \circ)$

On rappelle qu'un automorphisme de E est une application linéaire bijective de E sur E et que l'ensemble des automorphismes de E se note $GL(E)$.

On a montré dans le chapitre « Ensembles » que l'ensemble des applications de E vers E, inversibles pour la loi $\circ$ sont exactement les bijections de E sur E et on a montré dans le chapitre « Structures » que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, *)$, muni de la loi (induite) $*$, est un groupe. $GL(E)$ est l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ et donc

Théorème 55. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$(GL(E), \circ)$ est un groupe.

Réénonçons explicitement quelques résultats :

- $Id_E \in GL(E)$.
- Si $f \in GL(E)$, alors $f^{-1} \in GL(E)$ et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Si $(f, g) \in (GL(E))^2$, alors $g \circ f \in GL(E)$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- tout élément symétrisable est simplifiable et donc tout automorphisme est simplifiable pour la loi $\circ$:

$$\forall (f, g, h) \in GL(E) \times \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E),\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \text{ et } g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Quand f n'est pas un automorphisme, il est possible d'avoir $f \circ g = f \circ h$ (ou $g \circ f = h \circ f$) et pourtant $g \neq h$. En particulier, il est possible d'avoir $f \circ g = 0$ et pourtant $f \neq 0$ et $g \neq 0$ ou encore, dans $\mathcal{L}(E)$, la phrase « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul » est fausse. Il faudra néanmoins attendre un peu pour avoir des exemples concrets de telles situations car à ce moment du cours, nous ne possédons pas encore d'exemples d'endomorphismes classiques.

6.7 Formes linéaires. Hyperplans

6.7.1 Formes linéaires

Définition 24. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. D'après le théorème 49, $(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ainsi, l'application nulle de E dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire et une combinaison linéaire de formes linéaires est une forme linéaire.

Exemples.

• D'après le théorème 39, les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont les applications de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ où $(a_1, \ldots, a_n)$ est un n-uplet de nombres (indépendant de $(x_1, \ldots, x_n)$). Plus généralement, d'après le théorème 40, les applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$ sont les applications de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$ où les f_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$.

• Sur $E = C^0([a, b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est une forme linéaire.

• Si E est l'espace des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$, l'application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \displaystyle\lim_{p \to +\infty} u_p$ est une forme linéaire sur E.

• Les application $P \mapsto P(a)$, $a \in \mathbb{K}$ donné, (évaluation en a) ou $P \mapsto \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ (application qui à un polynôme associe son k-ème coefficient) sont des formes linéaires sur $\mathbb{K}[X]$. ❏

6.7.2 Hyperplans

Définition 25. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Puisque le noyau d'une application linéaire d'un espace E vers un espace F est un sous-espace de E et que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a immédiatement

Théorème 56. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple. Les formes linéaires non nulles sur $\mathbb{K}^n$ sont les applications de la formes $\varphi\ :\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ (en effet, si $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$, $\varphi = 0$ et s'il existe i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$, alors $\varphi(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = a_{i_0} \neq 0$ (le 1 étant placé en i_0-ème position) et donc $\varphi \neq 0$).
Les hyperplans de $\mathbb{K}^n$ sont donc les ensembles de la forme $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\})$. Une égalité du type $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ est une **équation** de l'hyperplan H.
En particulier, les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) sont les ensembles ayant une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (resp. $ax + by = 0$ où $(a, b \neq (0, 0))$. Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les **plans vectoriels** de $\mathbb{R}^3$ et les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les **droites vectorielles** de $\mathbb{R}^2$.

6.8 Homothéties vectorielles

Définition 26. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'**homothétie** vectorielle de rapport λ est l'application λId_E ou encore l'application $x \mapsto \lambda x$. L'homothétie vectorielle de rapport λ se note h_λ.

Enonçons quelques propriétés des homothéties.

• Si E n'est pas réduit à 0, le rapport λ d'une homothétie est uniquement défini. En effet, il existe dans E un vecteur x_0 non nul. On a alors

$$h_\lambda = h_{\lambda'} \Rightarrow \forall x \in E,\ \lambda x = \lambda' x \Rightarrow \lambda x_0 = \lambda' x_0 \Rightarrow (\lambda - \lambda')x_0 = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'.$$

• Puisque $Id_E \in \mathcal{L}(E)$ et que $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E, toute homothétie est un endomorphisme de E.
• Pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$, $h_\lambda \circ h_{\lambda'} = h_{\lambda'} \circ h_\lambda = h_{\lambda\lambda'}$.

• En particulier, $h_\lambda \in GL(E) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ et dans ce cas, $(h_\lambda)^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$.

• Les homothéties commutent avec tout endomorphisme de E : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f \circ h_\lambda = h_\lambda \circ f = \lambda f$. On peut démontrer que les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties, par exemple grâce à l'exercice qui suit.

Exercice 15. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E.

Montrer que si pour tout x de E, $f(x)$ est colinéaire à x, alors f est une homothétie.

Solution 15. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout x de E, $f(x)$ est colinéaire à x. Donc, $\forall x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda_x x$. Il s'agit de démontrer que λ_x ne varie pas quand x varie.

Si $E = \{0\}$, alors f est l'application nulle et en particulier, f est une homothétie. On suppose dorénavant que $E \neq \{0\}$. On fixe x_0 un vecteur non nul de E. Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda x_0$. λ est uniquement défini car $x_0 \neq 0$ ($\lambda x_0 = \lambda' x_0 \Rightarrow (\lambda - \lambda')x_0 = 0 \Rightarrow \lambda - \lambda' = 0$).

Soit $x \in E$. On doit montrer que $f(x) = \lambda x$.

1er cas. Supposons la famille (x, x_0) libre. On a

$$f(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0) = \lambda_{x+x_0} x + \lambda_{x+x_0} x_0,$$

et d'autre part,

$$f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda x_0.$$

Puisque la famille (x, x_0) est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda$. Ainsi, si la famille (x, x_0) est libre, on a $f(x) = \lambda x$.

2ème cas. Supposons la famille (x, x_0) liée. Puisque $x_0 \neq 0$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu x_0$. On a alors

$$f(x) = \mu f(x_0) = \mu \lambda x_0 = \lambda (\mu x_0) = \lambda x.$$

Ainsi, si la famille (x, x_0) est liée, on a aussi $f(x) = \lambda x$.

On a montré que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda x$ ou encore $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ f = \lambda Id_E$. Donc, f est une homothétie.

6.9 Projections et symétries vectorielles

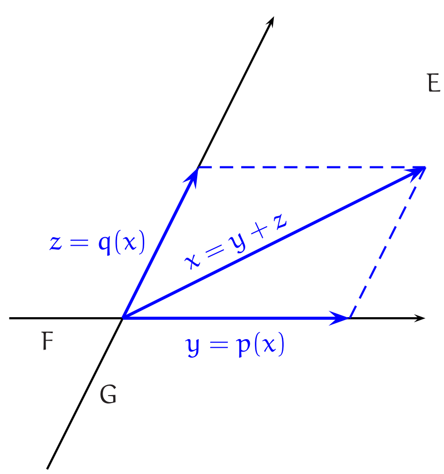
6.9.1 Projections vectorielles

DÉFINITION 27. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient F et G deux sous-espaces de E, supplémentaires ($E = F \oplus G$).

On rappelle que

$$\forall x \in E,\ \exists!(y, z) \in F \times G/\ x = y + z.$$

Pour tout $x \in E$, le **projeté de x sur F parallèlement à G** est y et le **projeté de x sur G parallèlement à F** est z.
L'application p, qui à x associe y est la **projection sur F parallèlement à G** et l'application q, qui à x associe z est la **projection sur G parallèlement à F**. p et q sont des **projections associées**.



On donne maintenant quelques propriétés des projections.

Théorème 57. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis F et G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Soit p la projection sur F parallèlement à G.

p est un endomorphisme de E.

Démonstration . p est effectivement une application de E vers E. Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in F \times G \times F \times G$ tel que $x_1 = y_1 + z_1$ et $x_2 = y_2 + z_2$.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 (y_1 + z_1) + \lambda_2 (y_2 + z_2) = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2).$$

Puisque F et G sont des sous-espaces de E, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in F$ et $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in G$. Mais alors

$$p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 p(x_1) + \lambda_2 p(x_2).$$

Ceci montre que p est linéaire.

❑

Théorème 58. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis F et G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

1) $p^2 = p$, $p + q = \mathrm{Id}_E$ et $pq = qp = 0$.

2) $F = \mathrm{Im}(p) = \{x \in E/\ p(x) = x\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Ker}(q)$ et $G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}(q)$.

3) Si $F \neq E$, alors $p \notin GL(E)$ et si $F = E$, alors $p = \mathrm{Id}_E \in GL(E)$.

Démonstration .

1) • Pour tout x de E, on a $p(x) = p(x) + 0$ où $p(x) \in F$ et $0 \in G$ et donc $p(p(x)) = p(x)$. Ceci montre que $p^2 = p$.

• Par définition des projections p et q, pour tout x de E, on a $x = p(x) + q(x)$ et et donc $p + q = \mathrm{Id}_E$.

• $pq = p(\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0$ et de même $qp = 0$.

2) Soit $x \in E$. Si $x \in F$, alors $x = x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$ et donc $p(x) = x$. Inversement, si $x = p(x)$, alors $x \in F$. Donc, $F = \{x \in E/\ p(x) = x\}$.
Ensuite, pour $x \in E$, $p(x) = x \Leftrightarrow x - p(x) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Id}_E - p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$. Ainsi, $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \{x \in E/\ p(x) = x\}$.
En appliquant ce résultat à la projection q, on a obtenu $G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - q) = \mathrm{Ker}(p)$.
Soit $x \in E$. Si $x = p(x)$, alors $x \in \mathrm{Im}(p)$. Inversement, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ et donc $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$.
On a montré que $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Ker}(q)$. En appliquant à la projection q, on a aussi $G = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - q) = \mathrm{Ker}(p)$.

3) Si $F \neq E$, alors $\mathrm{Im}(p) \neq E$ d'après 2) et donc f n'est pas surjectif. Dans ce cas, $p \notin GL(E)$.
Si $F = E$, alors $\{x \in E/\ p(x) = x\} = E$ et donc $p = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, $p \in GL(E)$.

❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *Les égalités* $pq = qp = 0$ *peuvent se montrer directement. Soit* $x \in E$. $q(x) = 0 + q(x)$ *où* $0 \in F$ *et* $q(x) \in G$. *Donc,* $p(q(x)) = 0$. *De même,* $q(p(x)) = 0$.

◇ *Si* $F = E$, *puisque* $F \cap G = \{0\}$, *on a nécessairement* $G = \{0\}$ *et réciproquement, si* $F = E$ *et* $G = \{0\}$, *alors* $E = F \oplus G$. *Dans ce cas,* $p = \mathrm{Id}_E$ *et donc* Id_E *est la projection sur* E *parallèlement à* $\{0\}$.
Si $G = E$ *et donc* $F = \{0\} = Im(p)$, p *est l'application nulle. L'application nulle est la projection sur* $\{0\}$ *parallèlement à* E.
Les cas $p = \mathrm{Id}_E$ *et* $p = 0$ *sont deux cas très particuliers de projections.*

◇ *On a déjà expliqué, sans fournir d'exemple, que dans* $\mathcal{L}(E)$, *il est possible de trouver deux endomorphismes* f *et* g *vérifiant* $f \neq 0$, $g \neq 0$ *et* $fg = 0$. *On peut démontrer que si* E *contient au moins deux vecteurs non colinéaires, il est possible de trouver deux sous-espaces supplémentaires* F *et* G *tels que* $F \neq \{0\}$ *et* $G \neq \{0\}$. *Les projections* p *et* q *associées à la décomposition* $E = F \oplus G$ *constituent alors un premier exemple explicite d'endomorphismes non nuls dont le produit est nul.*

D'après le théorème 58, une projection p est un endomorphisme vérifiant $p^2 = p$. Une conséquence de cette égalité est que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p^k = p$, ce qui est immédiat par récurrence. Ainsi, toutes les puissances de p sont les mêmes. On dit alors que p est un **idempotent** de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. De manière générale,

Définition 28. Soient $(A, +, *)$ un anneau puis a un élément de A.

a est **idempotent** si et seulement si $a^2 = a$.

Il y a deux éléments de A qui sont obligatoirement idempotents : 0 l'élément neutre pour l'addition et e l'élément neutre pour $*$. Ainsi, dans $\mathbb{C}$, $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$. 0 et 1 sont d'ailleurs les seules solutions de l'équation $z^2 = z$.
Dans $\mathcal{L}(E)$, $0^2 = 0$ et $\mathrm{Id}_E^2 = \mathrm{Id}_E$. Mais l'équation $f^2 = f$ admet en général (si E contient au moins deux vecteurs non colinéaires) d'autres solutions que ces deux endomorphismes à savoir toutes les projections. Ainsi, dans un anneau, il est possible qu'une équation de degré 2 admette strictement plus que deux solutions. Ici, le problème vient du fait que $f^2 = f \Leftrightarrow f(f - \mathrm{Id}_E) = 0 \not\Leftrightarrow f = 0$ ou $f - \mathrm{Id}_E = 0$ car dans $\mathcal{L}(E)$, on a plus la phrase « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ».

Le théorème 58 affirme qu'une projection est un endomorphisme idempotent. Le théorème suivant établit la réciproque de ce résultat : un endomorphisme idempotent est une projection.

Théorème 59. Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = f$.

1) $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

2) f est la projection sur $F = \mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration .

1) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors, $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Puisque $f = f^2$, on en déduit

$$x = f(y) = f(f(y)) = f(x) = 0.$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$ puis $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Soit $x \in E$. On a $x = f(x) + (x - f(x))$. $f(x)$ est dans $\mathrm{Im}(f)$ et d'autre part, $x - f(x)$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$ car $f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$. Donc, tout élément de E est somme d'un élément de $\mathrm{Im}(f)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ ou encore $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.

En résumé, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$. Finalement, $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

2) Posons $F = \mathrm{Im}(f)$ et $G = \mathrm{Ker}(f)$ de sorte que $E = F \oplus G$. Soit $x \in E$. On a déjà écrit : $x = f(x) + (x - f(x))$ où $f(x)$ est dans F et $x - f(x)$ est dans G. Donc, $f(x)$ est le projeté de x sur F parallèlement à G. Ceci montre que f est la projection sur F parallèlement G.

❑

Exercice 16. $E = \mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles.
Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x - 4y + z = 0\right\}$ et $G = \{(-\lambda, \lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces de E.

2) Montrer que $E = F \oplus G$.

3) On note p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F. Pour $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, préciser $p(u)$ et $q(u)$.

Solution 16.

1) F est le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$G = \mathrm{Vect}(e)$ où $e = (-1,1,1)$. Donc, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u - (-\lambda,\lambda,\lambda) \in F &\Leftrightarrow (x+\lambda, y-\lambda, z-\lambda) \in F \Leftrightarrow (x+\lambda) - 4(y-\lambda) + (z-\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}(-x+4y-z). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall u \in E,\ \exists! w \in G /\ u - w \in F$. Ceci montre que $E = F \oplus G$.

3) Le projeté de $u = (x,y,z)$ sur G parallèlement à F, à savoir $q(u)$, est $(-\lambda,\lambda,\lambda)$ où $\lambda = \dfrac{1}{4}(-x+4y-z)$. Donc,

$$q(u) = \frac{1}{4}(-x+4y-z)(-1,1,1) = \left(\frac{x-4y+z}{4}, \frac{-x+4y-z}{4}, \frac{-x+4y-z}{4}\right).$$

Le projeté de $u = (x,y,z)$ sur F parallèlement à G, à savoir $p(u)$ est

$$\begin{aligned} p(u) = u - q(u) &= (x,y,z) - \left(\frac{x-4y+z}{4}, \frac{-x+4y-z}{4}, \frac{-x+4y-z}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3x+4y-z}{4}, \frac{x+z}{4}, \frac{x-4y+5z}{4}\right). \end{aligned}$$

Exercice 17. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projections (pas nécessairement associées).

1) Montrer que : $\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2,\ f \circ g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2) a) Montrer que $p + q$ est une projection si et seulement si $pq = qp = 0$.
b) En déduire que $p + q$ est une projection si et seulement si $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
c) On suppose que $p + q$ est une projection. Déterminer les éléments caractéristiques de cette projection (son noyau et son image) en fonction des éléments caractéristiques des projections p et q.

Solution 17.

1) Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

$$f \circ g = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ g(x) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

2) a) Soient p et q deux projections. $p + q$ est en particulier un endomorphisme de E.

$$p + q \text{ projection } \Leftrightarrow (p + q)^2 = p + q \Leftrightarrow p^2 + pq + qp + q^2 = p + q \Leftrightarrow p + pq + qp + q = p + q \Leftrightarrow pq + qp = 0.$$

Si $pq = qp = 0$, alors $pq + qp = 0$. Si $pq + qp = 0$, en composant les deux membres de cette égalité par p à gauche ou à droite et en tenant compte de $p^2 = p$, on obtient $pq + pqp = 0$ et $pqp + qp = 0$. On en déduit $pq = -pqp = qp$. Mais alors, $pq + qp = 0 \Rightarrow 2pq = 0 \Rightarrow pq = 0$. Finalement, $pq = qp = 0$.

On a montré que $p + q$ est une projection si et seulement si $pq = qp = 0$.

b) D'après 1), on en déduit que $p + q$ est une projection si et seulement si $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

c) On suppose que $p + q$ est une projection et on a donc $pq = qp = 0$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. On a donc $p(x) = q(x) = 0$ puis $(p+q)(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p + q)$.
Inversement, soit $x \in \mathrm{Ker}(p + q)$. Alors, $p(x) + q(x) = 0$ puis $p(p(x) + q(x)) = 0$ puis $p^2(x) + pq(x) = 0$ et donc $p(x) = 0$ car $p^2(x) = p(x)$ et $pq(x) = 0$. De même, $q(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p + q) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

• Pour tout x de E, $p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Donc, $\mathrm{Im}(p + q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
Inversement, soit $(y, z) \in E^2$ puis $x = p(y) + q(z)$. Alors,

$$(p + q)(x) = p(p(y)) + p(q(z)) + q(p(y)) + q(q(z)) = p(y) + p(z) = x$$

car $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = qp = 0$. Donc, $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p + q)$.

Finalement, $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

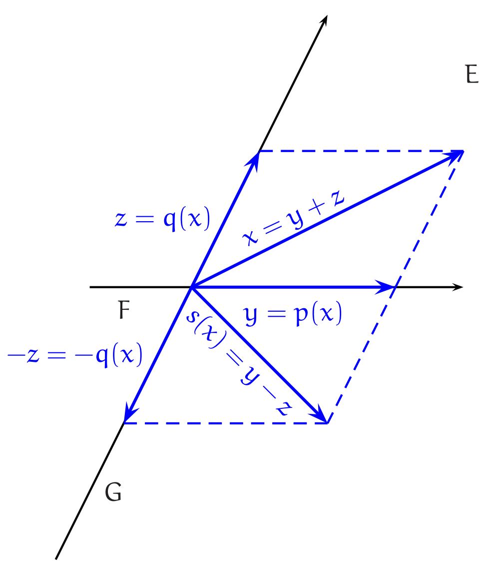
6.9.2 Symétries vectorielles

Définition 29. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient F et G deux sous-espaces de E, supplémentaires ($E = F \oplus G$).

On rappelle que

$$\forall x \in E,\ \exists!(y, z) \in F \times G /\ x = y + z.$$

Pour tout $x = y + z \in E$, avec $(y, z) \in F \times G$, le **symétrique de x par rapport à F parallèlement à G** est $y - z$.
L'application s, qui à $x = y + z \in E$, avec $(y, z) \in F \times G$, associe $y - z$ est la **symétrie par rapport à F parallèlement à G**.



On note p (resp. q) la projection sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F). Pour tout $x \in E$, on a $s(x) = p(x) - q(x) = p(x) - (x - p(x)) = 2p(x) - x$. Donc, $s = 2p - \mathrm{Id}_E$. En particulier, s est un endomorphisme de E en tant que combinaison linéaire d'endomorphismes de E. On peut donc énoncer

Théorème 60. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Soient p (resp. q) la projection sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F). Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1) $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$ et $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s)$.

2) $s \in \mathcal{L}(E)$.

3) $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et en particulier $s \in GL(E)$.

Démonstration . Il reste à démontrer 3). On peut proposer deux démonstrations.

Pour la première, on revient à la définition du symétrique. Soit $x \in E$. Soit $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Alors, $s(x) = y - z$ puis, puisque $y \in F$ et $-z \in G$, $s(s(x)) = y - (-z) = y + z = x$.

Pour la deuxième, on peut utiliser la projection p. $s^2 = (2p - \mathrm{Id}_E)^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_E$ (car $2p$ et Id_E commutent). Donc, $s^2 = 4p - 4p + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$.

Ainsi, une symétrie vectorielle est involutive. On sait alors que s est une bijection de E sur E et donc $s \in GL(E)$ puisque d'autre part, s est linéaire.

❏

Théorème 61. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

$F = \{x \in E / \ s(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \{x \in E / \ s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration . On note p la projection sur F parallèlement à G.

1ère démonstration. Soit $x \in E$. Posons $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$.
- $s(x) = x \Leftrightarrow y - z = y + z \Leftrightarrow 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x \in F$.
- $s(x) = -x \Leftrightarrow y - z = -(y + z) \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x \in G$.

Donc, $F = \{x \in E / \ s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E / \ s(x) = -x\}$.

De plus, pour $x \in E$, $s(x) = x \Leftrightarrow (s - \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$. Donc $F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$. De même, pour $x \in E$, $s(x) = -x \Leftrightarrow (s + \mathrm{Id}_E)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. Donc $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

2ème démonstration. Soit $x \in E$. $s(x) = x \Leftrightarrow 2p(x) - x = x \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow x \in F$ (d'après le théorème 58). Donc, $F = \{x \in E / \ s(x) = x\}$.

Soit $x \in E$. $s(x) = -x \Leftrightarrow 2p(x) - x = -x \Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in G$ (d'après le théorème 57). Donc, $G = \{x \in E / \ s(x) = -x\}$.

❏

Le théorème 60 dit entre autres que les symétries sont les involutions linéaires de E. Comme pour les projections, la réciproque est vraie ou encore un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}_E$ est une symétrie :

Théorème 62. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1) $E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$.

2) f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ par rapport à $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration . Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1) • Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Soit $x \in E$.

$$x \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E) \Rightarrow s(x) = x \text{ et } s(x) = -x \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E) \subset \{0\}$ puis $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$.

• Montrons que $E = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$. Soit $x \in E$. On cherche $y \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ et $z \in \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ tel que $x = y + z$. Nécessairement, on doit avoir $f(y) = y$ et $f(z) = -z$ puis $\left\{\begin{array}{l} y + z = x \\ y - z = f(x) \end{array}\right.$. En additionnant membre à membre, on obtient $y = \dfrac{1}{2}(x + f(x))$ et $z = \dfrac{1}{2}(x - f(x))$.

Réciproquement, posons $y = \dfrac{1}{2}(x + f(x))$ et $z = \dfrac{1}{2}(x - f(x))$. Déjà, $y + z = x$. Ensuite,

$$f(y) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + x\right) = y$$

et donc $y \in \operatorname{Ker}(f - Id_E)$ puis

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f^2(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) - x\right) = -z$$

et donc $z \in \operatorname{Ker}(f + Id_E)$. On a montré que tout x de E s'écrit sous la forme $y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$. Donc, $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) + \operatorname{Ker}(f + Id_E)$.

Finalement, $E = \operatorname{Ker}(f - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id_E)$.

2) Soit $x \in E$. Posons $x = y + z$ où $y \in F = \operatorname{Ker}(f - Id_E)$ et $z \in G = \operatorname{Ker}(f + Id_E)$. Alors, $f(x) = f(y) - f(z) = y - z$ et donc $f(x)$ est le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G.

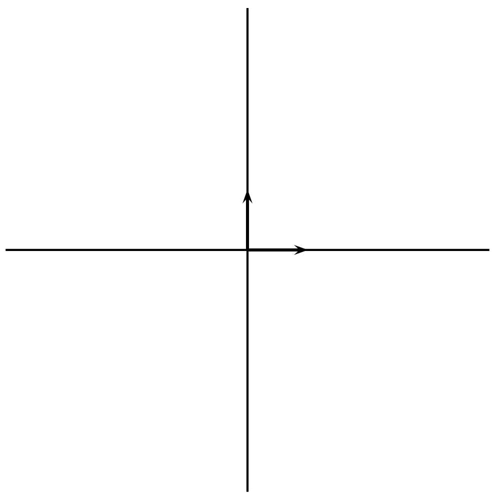
On a montré que f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

❑

7 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

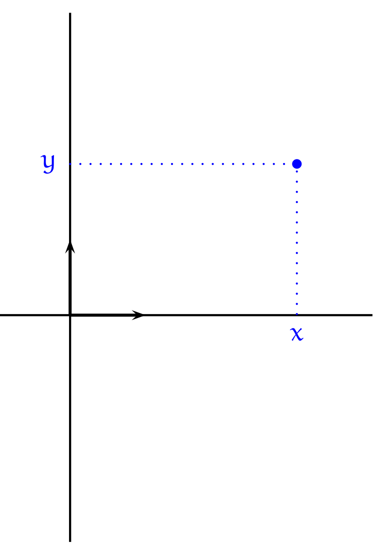
7.1 La notation $A + u$

Dans cette section, les éléments d'un espace vectoriel E auront deux statuts : ils pourront être considéré bien sûr comme des **vecteurs** mais aussi comme des **points**. Ceci ne doit pas choquer. Par exemple, $E = \mathbb{R}^2$ (ou aussi $E = \mathbb{C}$) est souvent représenté comme ceci :

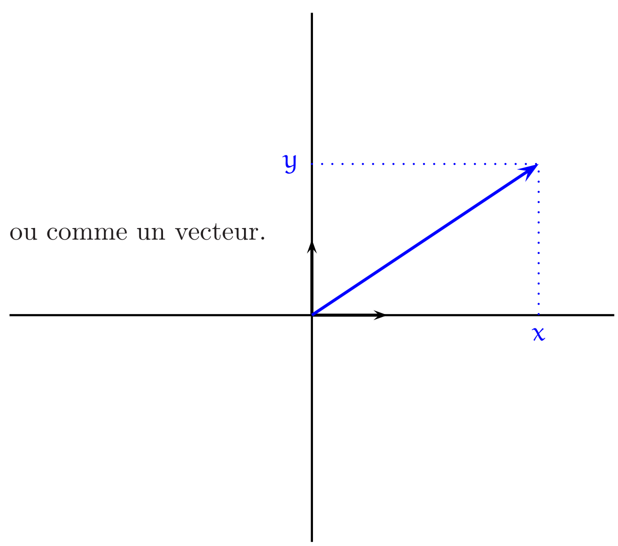


Un couple (x, y) de réels (ou un nombre complexe $z = x + iy$) peut être pensé

comme un point ...



ou comme un vecteur.



Puisqu'on sait additionner des éléments d'un espace vectoriel, on sait additionner un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$, ce qui s'écrit $A + \overrightarrow{u}$. Le résultat est un point B de E :

$$A + \overrightarrow{u} = B.$$

On dit dans ce cas que B est le **translaté** de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$: $B = t_{\overrightarrow{u}}(A)$ ou aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc défini par l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

7.2 Repère affine. Coordonnées

Définition 30. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Un **repère** $\mathcal{R}$ de E est un couple $(O, \mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E.

Théorème 63 (et définition). Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère de E où $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$.

Pour tout point M de E, il existe une unique famille de scalaires $(x_i)_{i \in I}$, où les x_i sont nuls sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux telle que

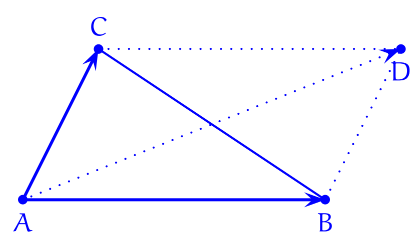
$$M = O + \sum_{i \in I} x_i e_i.$$

La famille de nombres $(x_i)_{i \in I}$ est la famille des **coordonnées** du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

Démonstration . Il existe une unique famille de scalaires $(x_i)_{i \in I}$, où les x_i sont nuls sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux telle que $\overrightarrow{OM} = \sum_{i \in I} x_i e_i$ (existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base).

❏

Par exemple, si A, B et C sont trois points non alignés du plan, $\mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan. Dans ce repère, le point A a pour coordonnées $(0, 0)$, le point B a pour coordonnées $(1, 0)$, le point C a pour coordonnées $(0, 1)$ et le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme a pour coordonnées $(1, 1)$ car $\overrightarrow{AD} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AC}$.



7.3 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

7.3.1 Définition. Direction d'un sous-espace affine

Définition 31. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F}$ une partie de E.

$\mathcal{F}$ est un **sous-espace affine** de E si et seulement si il existe un point A et un sous-espace vectoriel F tel que $\mathcal{F} = A + F$ ou encore

$$\mathcal{F} = \left\{A + \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \in F\right\}.$$

On établit maintenant l'unicité de F :

Théorème 64. Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A et B deux points de E et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$A + F = B + G \Rightarrow F = G.$$

Démonstration . Soient A et B deux points de E et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $A+F=B+G$.

Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{AB}=B-A$ est dans F. $\overrightarrow{0}$ est dans G puis $B=B+\overrightarrow{0}\in B+G=A+F$. Donc, il existe $\overrightarrow{u_0}\in F$ tel que $B=A+\overrightarrow{u_0}$ ou encore $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u_0}$. Ceci montre que $\overrightarrow{AB}$ est dans F. Par symétrie des rôles, $\overrightarrow{AB}$ est aussi dans G.

Montrons alors que $F\subset G$. Soit $\overrightarrow{u}\in F$. Il existe $\overrightarrow{v}\in G$ tel que $A+\overrightarrow{u}=B+\overrightarrow{v}$ ou encore $\overrightarrow{u}=B-A+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{v}$. Ainsi, $\overrightarrow{u}$ est somme de deux éléments de G et est donc un élément de G. Ceci montre que $F\subset G$. Par symétrie des rôles, $G\subset F$ et finalement, $F=G$.

❏

On peut donc donner la définition suivante :

Définition 32. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A un point de E et F un sous-espace vectoriel de E. Soit enfin $\mathcal{F}=A+F$.

F s'appelle **la direction** du sous-espace affine $\mathcal{F}$. On dit alors que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de direction F passant par le point A.

Remarques.

• On doit noter qu'un sous-espace vectoriel F de E est en particulier un sous-espace affine de E : F est le sous-espace affine de direction F passant pas 0.

• Si $\mathcal{F}=A+F$ où A est un point et F un sous-espace vectoriel de E, alors pour tout point M de E,

$$M\in\mathcal{F}\Leftrightarrow\exists\overrightarrow{u}\in F/\ M-A=\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\in F.$$

• Si $\mathcal{F}=A+F$ où A est un point et F un sous-espace de E, F est uniquement défini mais ce n'est bien sûr pas le cas du point point A. Le théorème suivant analyse ce problème.

Théorème 65. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A un point de E, F un sous-espace de E puis $\mathcal{F}=A+F$.

$$\forall B\in E,\ \left(\mathcal{F}=B+F\Leftrightarrow B\in\mathcal{F}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\in F\right).$$

Démonstration . D'après la remarque précédant ce théorème, $B\in\mathcal{F}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\in F$.

Si $\mathcal{F}=B+F$, alors $B=B+\overrightarrow{0}$ est dans $\mathcal{F}$.

Réciproquement, soit B un point de $\mathcal{F}$. Alors $\overrightarrow{AB}\in F$ puis $B+F=A+\overrightarrow{AB}+F$. Puisque $\overrightarrow{AB}\in F$, $\overrightarrow{AB}+F=\left\{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}\in F\right\}\subset F$ et donc

$$B+F=A+\overrightarrow{AB}+F\subset A+F=\mathcal{F}.$$

Par symétrie des rôles, $A+F\subset B+F$ et finalement $B+F=A+F=\mathcal{F}$.

❏

7.3.2 Intersection de sous-espaces affines

Théorème 66. Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G.

$\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $F\cap G$.

Démonstration . Supposons $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\varnothing$, soit A un point de $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$. D'après le théorème 64, on a $\mathcal{F}=A+F$ et $\mathcal{G}=A+G$. Mais alors, tout point M de E,

$$M\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\Leftrightarrow M\in\mathcal{F}\text{ et }M\in\mathcal{G}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\in F\text{ et }\overrightarrow{AM}\in G\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\in F\cap G\Leftrightarrow M\in A+F\cap G.$$

Ainsi, $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=A+F\cap G$ et donc $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est un sous-espace affine de E de direction $F\cap G$.

❏

7.4 Résolution de l'équation $f(x)=a$ où $f\in\mathcal{L}(E,F)$

On se donne deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ puis f une application linéaire de E vers F. On se donne ensuite un élément a de F et on veut résoudre dans E l'équation (d'inconnue $x\in E$)

$$f(x) = a \quad (\mathcal{E}).$$

L'équation $(\mathcal{E})$ est une **équation linéaire**. Si de plus $a = 0$, l'équation $(\mathcal{E})$ est une **équation linéaire homogène**.

Commençons par rappeler que, quand $a = 0$ ($(\mathcal{E})$ s'écrit alors $f(x) = 0$), l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ n'est jamais vide : l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est par définition le noyau de f, noyau qui contient au moins le vecteur nul.

Passons au cas général où a est quelconque.

• Si $a \notin \mathrm{Im}(f)$, alors l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de $(\mathcal{E})$ est vide et il n'y a plus rien à dire.

• Si $a \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = a$ (x_0 est une solution particulière de l'équation). Mais alors, pour $x \in E$,

$$f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow x \in x_0 + \mathrm{Ker}(f).$$

Dans ce cas, $\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(f)$. Cette égalité peut se réénoncer sous une forme déjà rencontrée de multiples fois : si l'ensemble des solutions n'est pas vide, la solution générale de l'équation « avec second membre » est la somme d'une solution particulière de l'équation « avec second membre » et de la solution générale de l'équation « sans second membre » (plus correctement appelée équation homogène associée). On peut énoncer :

Théorème 67. Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a \in F$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ (d'inconnue $x \in E$) est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(f)$.

Appliquons ce résultat à un certain nombre de situations rencontrées au premier semestre.

• Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
L'ensemble des suites u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ est le noyau de φ. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Plus généralement, si $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite donnée, l'ensemble des suites u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = v_n$ est l'ensemble des solutions l'équation $\varphi(u) = v$. D'après le théorème 66, cet ensemble est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de direction $\mathrm{Ker}(\varphi)$ l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

Notons que si $a \neq 0$, il est aisé de démontrer que l'équation $\varphi(u) = v$ au moins une solution : si u est la suite définie par $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\dfrac{b}{a}u_{n+1} - \dfrac{c}{a}u_n + \dfrac{1}{a}v_n$, alors u convient.
En résumé, si $a \neq 0$, la solution générale de l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = v_n$$

est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène associée

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

• Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} D^1(I, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^I \\ f & \mapsto & f' + af \end{array}$. φ est une application linéaire de $D^1(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^I$.
L'ensemble des fonctions f vérifiant $\forall x \in I$, $f'(x) + af(x) = 0$ est le noyau de φ. C'est un sous-espace vectoriel de $D^1(I, \mathbb{K})$.
Plus généralement, l'ensemble des fonctions $f \in D^1(I, \mathbb{K})$ vérifiant $\forall x \in I$, $f'(x) + af(x) = b(x)$ est l'ensemble des solutions l'équation $\varphi(f) = b$. Cet ensemble est soit vide, soit un sous-espace affine de $D^1(I, \mathbb{K})$, de direction $\mathrm{Ker}(\varphi)$ l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

Rappelons que puisque a et b sont continues sur I, l'équation $y' + ay = b$ admet au moins une solution à savoir la fonction $x \mapsto e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} b(t)\ dt$ où x_0 est un réel donné de I et A une primitive donnée de la fonction a sur I et donc l'ensemble des solutions n'est pas vide.
• Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} D^2(I, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^I \\ f & \mapsto & af'' + bf' + cf \end{array}$. φ est une application linéaire de $D^2(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^I$. L'ensemble des fonctions f vérifiant $\forall x \in I$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ est le noyau de φ. C'est un sous-espace vectoriel de $D^2(I, \mathbb{K})$.
Plus généralement, si g est une fonction donnée, l'ensemble des fonctions $f \in D^2(I, \mathbb{K})$ vérifiant $\forall x \in I$, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x)$ est l'ensemble des solutions l'équation $\varphi(f) = g$. Cet ensemble est soit vide, soit un sous-espace affine de $D^2(I, \mathbb{K})$, de direction $\mathrm{Ker}(\varphi)$ l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

Rappelons que si g est continue sur I, le théorème de CAUCHY affirme entre autres que l'équation $ay'' + by' + cy = g$ admet au moins une solution sur I.

• Soient a_0, ..., a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts puis b_0, ..., b_n $n+1$ nombres complexes. On sait qu'il existe un polynôme L de degré inférieur ou égal à n et un seul tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $L(a_i) = b_i$:

$$L = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Déterminons alors tous les polynômes P vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$. Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$. φ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

En posant $b = (b_0, \ldots, b_n)$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i \Leftrightarrow \varphi(P) = b$. L'ensemble des solutions de cette équation est $L + \mathrm{Ker}(\varphi)$.

De plus, $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = 0 \Leftrightarrow P$ est divisible par $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ (car les a_i sont deux à deux distincts).

Donc, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{Q\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - a_i),\ Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$.

Les polynômes P vérifiant $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = b_i$ sont les polynômes de la forme $L + Q\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$.

• On peut aussi appliquer le théorème 67 à la résolution des systèmes d'équations linéaires du type $\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \ldots + a_{p,n}x_n = b_n \end{array}\right.$.

Nous le ferons dans le chapitre « Systèmes d'équations linéaires ».

