Dérivation

Plan du chapitre

1 Fonctions dérivables en un point

1.1 Définition de la dérivabilité en un point

DÉFINITION 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit x_0 un réel élément de l'intervalle I.
La fonction f est **dérivable** en x_0 si et seulement si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite réelle (resp. complexe) quand x tend vers x_0.
Quand f est dérivable en x_0, le nombre $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ s'appelle le **nombre dérivé** de f en x_0 et se note $f'(x_0)$. Ainsi,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est la « fonction taux d'accroissement » de f en x_0. Le nombre dérivé en x_0 est la valeur limite de la fonction taux en x_0.
Si on pose $x=x_0+h$, on obtient une autre écriture du nombre dérivé :

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Par exemple, puisque $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$, la fonction $x\mapsto x^2$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=2x_0$.

1.2 Développement limité d'ordre 1 en un point

Supposons f définie sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0\in I$. Puisque I est ouvert, on peut trouver un intervalle de la forme $]x_0-a,x_0+a[$, $a>0$, contenu dans I. Supposons f dérivable en x_0. Pour $h\in]-a,a[\setminus\{0\}$, posons

$$\varepsilon(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0).$$

Puisque f est dérivable en x_0, on a immédiatement $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$. D'autre part, on peut écrire

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un nombre (réel ou complexe) ℓ et une fonction ε définie sur $]-a,a[\setminus\{0\}$ telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ et pour tout h de $]-a,a[\setminus\{0\}$, $f(x_0+h)=f(x_0)+h\ell+h\varepsilon(h)$. On a alors $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\ell\underset{h\to 0}{\to}0$ ou encore

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\underset{h\to 0}{\to}\ell.$$

On en déduit que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)=\ell$. L'écriture $f(x_0+h)=f(x_0)+h\ell+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ s'appelle le **développement limité d'ordre 1**. Nous étudierons beaucoup plus en détail les développements limités dans le chapitre « Comparaison des fonctions en un point ». Pour l'instant, on peut énoncer

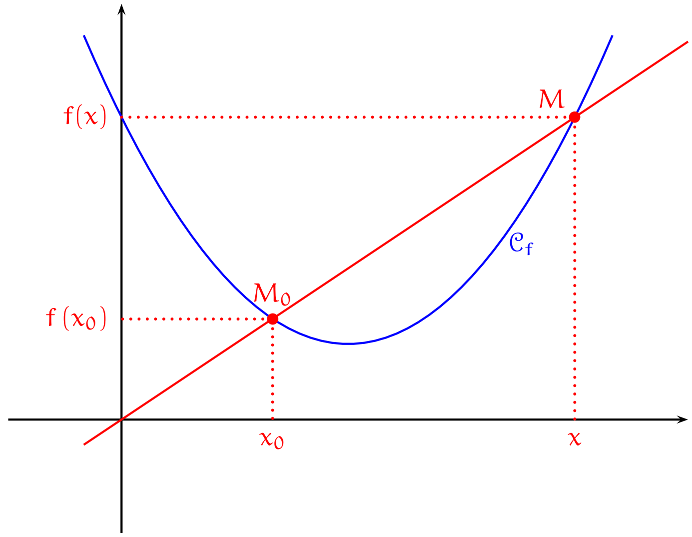
Théorème 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0\in I$.
f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un nombre ℓ et une fonction ε définie sur un ensemble de la forme $]-a,a[\setminus\{0\}$ et vérifiant $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ telle que, $\forall h\in]-a,a[\setminus\{0\}$, $f(x_0+h)=f(x_0)+h\ell+h\varepsilon(h)$.
De plus, quand f est dérivable en x_0, alors $\ell=f'(x_0)$ ou encore $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$.

Par exemple, puisque $(x_0+h)^2=x_0^2+2hx_0+h^2=x_0^2+2x_0h+h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h)=h\underset{h\to 0}{\to}0$, la fonction $f:x\mapsto x^2$ est dérivable en $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=2x_0$.

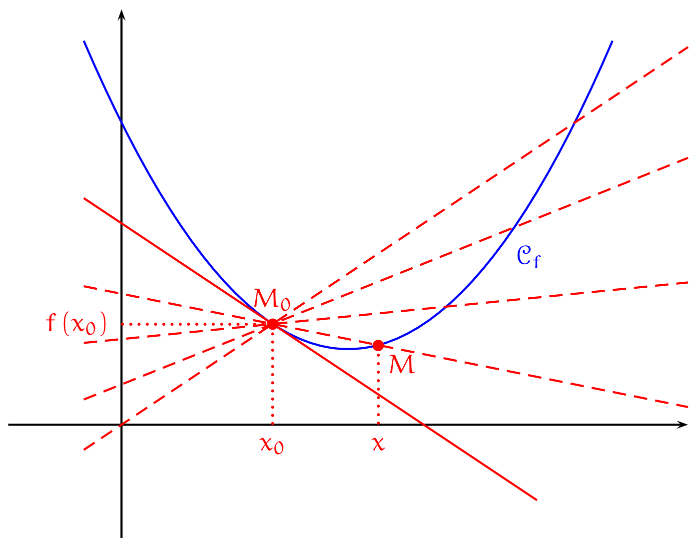
1.3 Tangente en un point d'un graphe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit x_0 un réel élément de l'intervalle I.

Pour tout réel x de l'intervalle I, différent du réel x_0, le nombre $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le coefficient directeur (ou encore la pente) de la droite passant par les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$.



On suppose maintenant que f est dérivable en x_0. Par définition, le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0, limite qui est le nombre réel $f'(x_0)$. Graphiquement, quand x tend vers x_0, le point M tend vers le point M_0 puis la droite (M_0M) tend vers une droite limite appelée la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en M_0.



Ainsi, par définition

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse x_0.
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1.4 Lien avec la continuité

Théorème 2. Si f est dérivable en x_0, **alors** f est continue en x_0.

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0. Alors, $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h \to 0,\ h \neq 0}{\longrightarrow} 0$. En particulier, $f(x_0 + h) \underset{h \to 0,\ h \neq 0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc f est continue en x_0.

❏

⇨ **Commentaire**. *Par contraposition, on a aussi : « si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0 ».*

1.5 Fonctions dérivables à droite, à gauche, en un point

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]-\infty,b[$, $a<b$, a réel et b réel ou infini (resp. $]a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,+\infty[$, $a<b$, a réel ou infini et b réel) à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

f est **dérivable à droite** (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si le taux $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite à droite (resp. à gauche) dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures (resp. inférieures).
En cas d'existence, cette limite s'appelle la dérivée à droite (resp. à gauche) et se note $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

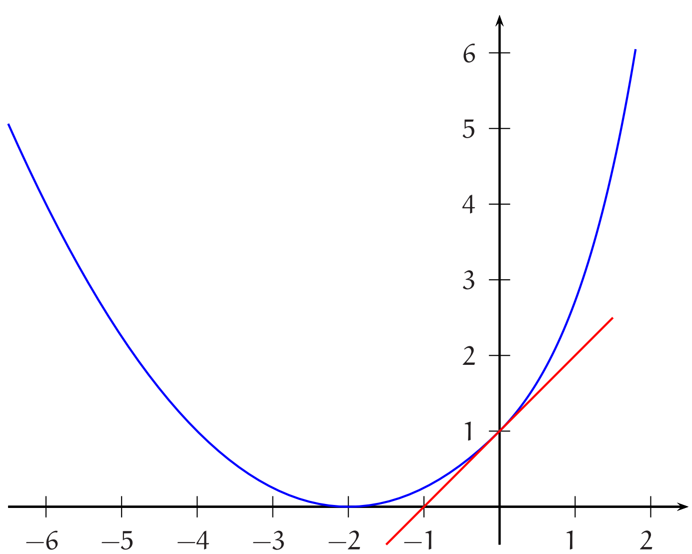
Ainsi, $f'_d(x_0) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ et $f'_g(x_0) = \displaystyle\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Exemple. Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$. Etudions l'existence de dérivées à droite et à gauche en 2.
Pour $x>2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x-1$. Donc, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ tend vers 1 quand x tend vers 2 par valeurs supérieures. On en déduit que f est dérivable à droite en 2 et que $f'_d(2)=1$.
Pour $x\in]1,2[$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{-\left(x^2-3x+2\right)}{x-2} = \dfrac{-(x-1)(x-2)}{x-2} = -x+1$. Donc, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ tend vers -1 quand x tend vers 2 par valeurs inférieures. On en déduit que f est dérivable à gauche en 2 et que $f'_g(2)=-1$. ❑

Le lien entre limite et limites à droite et à gauche fournit immédiatement :

Théorème 3. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$.

Exemple. Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $f(x)=\begin{cases} e^x \text{ si } x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{4}(x+2)^2 \text{ si } x<0\end{cases}$.
Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^x-1}{x}$ et donc, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=1$.
Pour $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{(x+2)^2-4}{4(x-0)} = \dfrac{4x+x^2}{4x} = 1+\dfrac{x}{4}$. Donc, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 par valeurs inférieures. On en déduit que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0)=1$.
Puisque f est dérivable à droite et à gauche en 0 et que $f'_d(0)=f'_g(0)=1$, on en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$. Voici le graphe de f :



❑

Sinon, on a immédiatement :

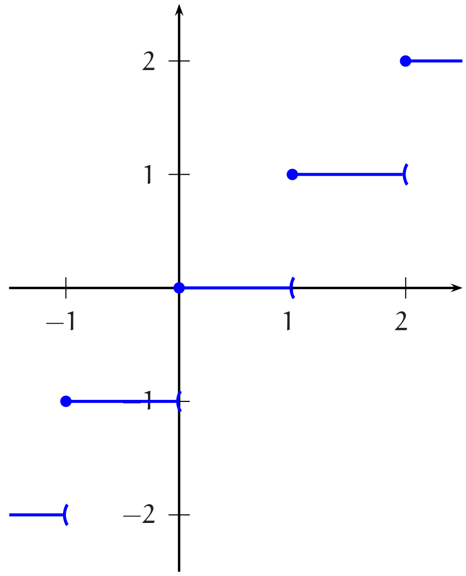
Théorème 4. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, **alors** f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0.

1.6 Fonctions non dérivables en un point

On décrit maintenant les quatre situations usuelles de non-dérivabilité dans le cas de fonctions à valeurs réelles.

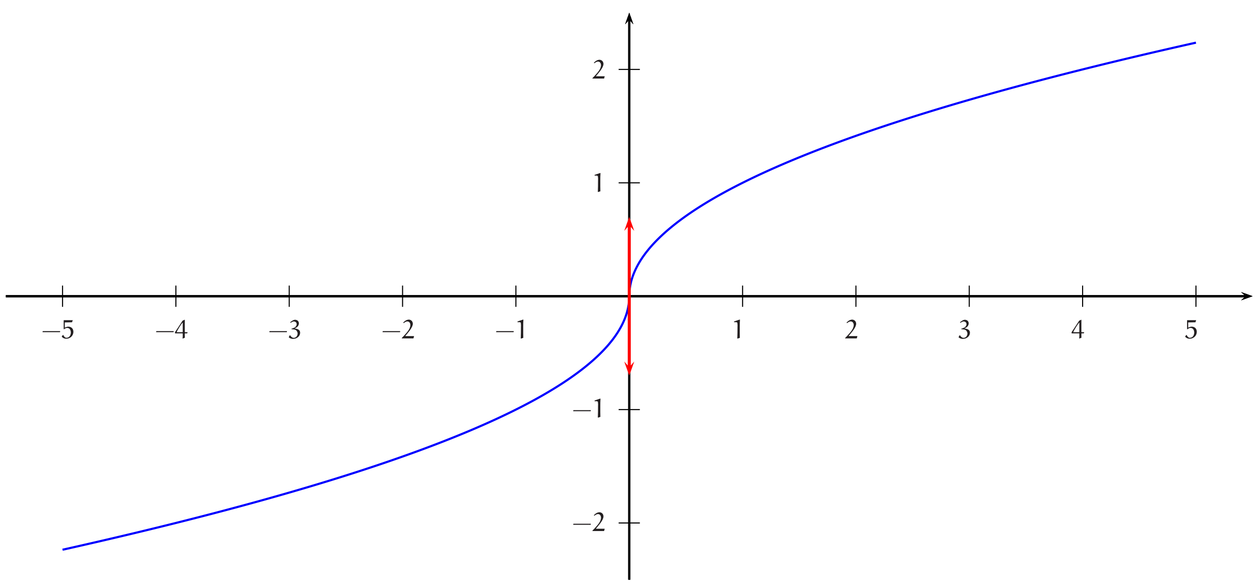
• *La fonction est discontinue en* x_0. Si f est dérivable en x_0, f est continue en x_0. Par contraposition, si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0.

Ainsi, la fonction « partie entière » n'est pas dérivable en un entier.



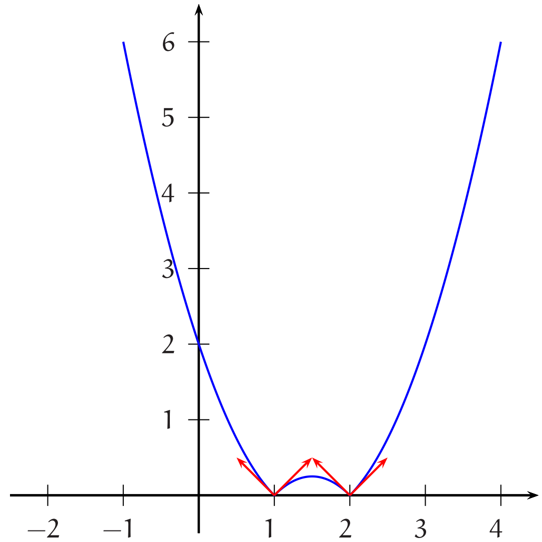
• *La fonction est continue en* x_0 *mais le taux a une limite infinie*. Dans ce cas, la fonction f n'est pas dérivable en x_0. Néanmoins, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f admet en le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente parallèle à (Oy).

C'est par exemple le cas de la fonction $f\ :\ x \mapsto \left\{\begin{array}{l} -\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{array}\right. = \text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$. Le taux d'accroissement en 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\text{sgn}(x)\sqrt{|x|}}{\text{sgn}(x)|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0. Néanmoins, la courbe représentative admet l'axe (Oy) pour tangente en O.



• *La fonction est continue en* x_0 *mais le taux a une limite à droite et une limite à gauche et ces limites sont différentes.* Dans ce cas, la fonction n'est pas dérivable en x_0 mais est dérivable à droite et à gauche en x_0. On dit que sa courbe représentative admet en son point d'abscisse x_0 deux demi-tangentes.

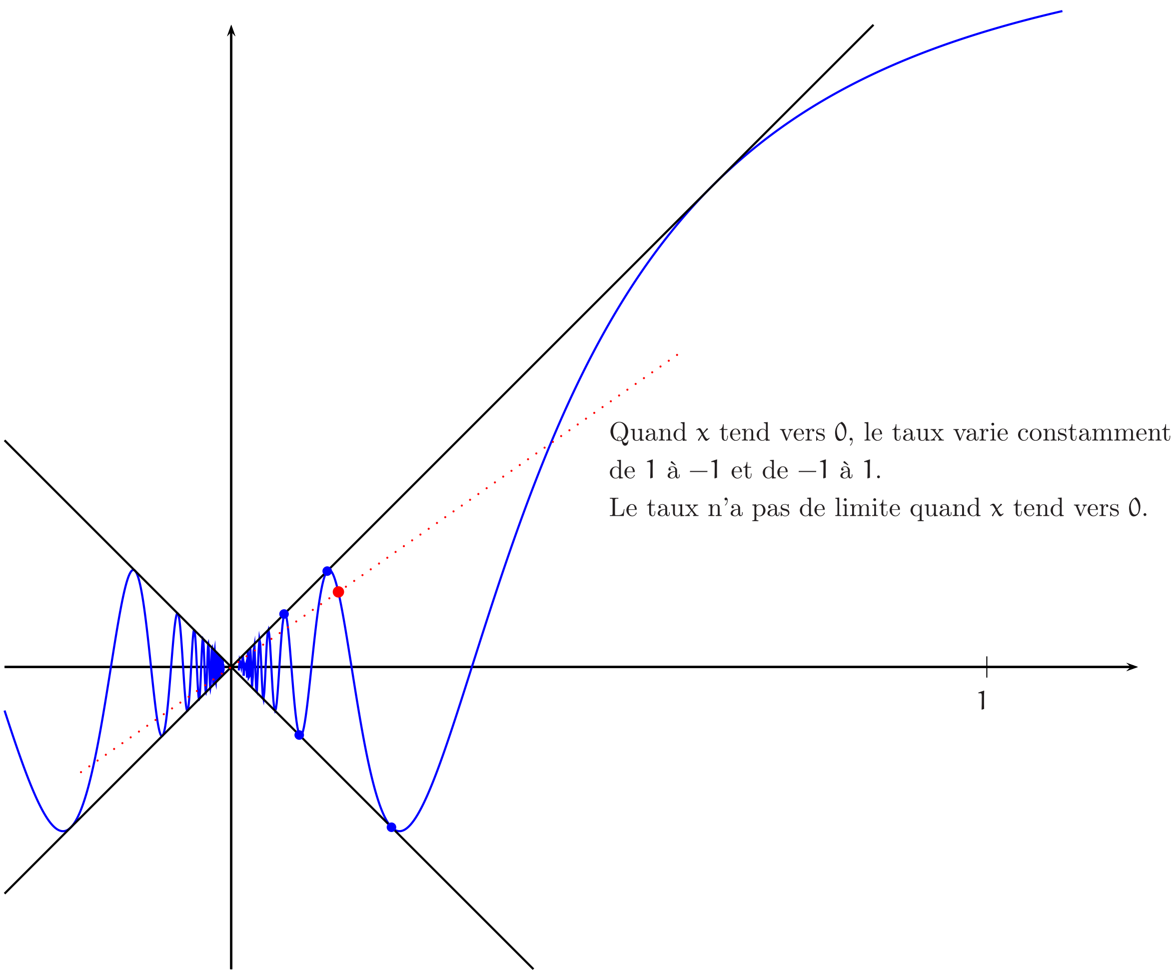
C'est par exemple le cas de la fonction $f\ :\ x \mapsto \left|x^2 - 3x + 2\right|$. Le taux d'accroissement en 1 est égal à $\dfrac{|x-1|}{x-1}|x-2|$. Ce taux tend vers -1 quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et vers 1 quand x tend vers 1 par valeurs supérieures. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Néanmoins, f est dérivable à droite et à gauche en 1 avec $f'_g(1) = -1$ et $f'_d(1) = 1$. On dit dans ce cas que la courbe admet en son point d'abscisse 1 deux **demies-tangentes** ou aussi que le point d'abscisse 1 est un **point anguleux** de la courbe.



• *La fonction est continue en x_0 mais le taux n'a pas de limite, ni finie, ni infinie.*

Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La fonction f est continue en 0 car pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant |x|$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$.

Par contre, la fonction f n'est pas dérivable en 0 car le taux $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 (car par exemple, $\sin\left(\dfrac{1}{1/\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$ et $\sin\left(\dfrac{1}{1/(2n\pi)}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$).



1.7 Compléments sur les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ dérivables en un point

On sait déjà qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable en x_0 si et seulement si le taux $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite quand x tend vers x_0 ou aussi si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0. On peut rajouter une caractérisation de la dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ à partir des parties réelle et imaginaire de cette fonction :

Théorème 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en x_0 et dans ce cas,

$$f'(x_0) = (\mathrm{Re}(f))'(x_0) + i(\mathrm{Im}(f))'(x_0).$$

Démonstration . Ce théorème est une conséquence immédiate du résultat correspondant sur les limites puisque pour $x \neq x_0$, $\mathrm{Re}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Re}(f(x_0))}{x-x_0}$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \dfrac{\mathrm{Im}(f(x)) - \mathrm{Im}(f(x_0))}{x-x_0}$.
❑

2 Opérations sur les fonctions dérivables en un point

2.1 Combinaisons linéaires

Théorème 6. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Soit $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, **alors**, pour tous réels (resp. complexes) λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0.
Dit autrement, une combinaison linéaire de fonctions dérivables en x_0 est dérivable en x_0.

De plus, en cas de dérivabilité, $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.

Démonstration . Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. Supposons f et g dérivables en x_0.

$$\frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x-x_0} = \lambda \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \mu \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Quand x tend vers x_0, on obtient l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x-x_0}$ et donc la dérivabilité de $\lambda f + \mu g$ en x_0 et de plus, en cas de dérivabilité, quand x tend vers x_0, on obtient $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$. ❑

On prendra garde à ne pas renverser l'implication précédente. Une combinaison linéaire de fonctions peut être dérivable en x_0 sans qu'aucune des deux fonctions ne soit dérivable en x_0 ou encore $\lambda f + \mu g$ dérivable en $x_0 \not\Rightarrow f$ et g dérivables en x_0. Par exemple, les fonctions $f\ :\ x \mapsto x - \sqrt{x}$ et $g\ :\ x \mapsto \sqrt{x}$ sont définies sur $[0, +\infty[$ et ne sont pas dérivables (à droite) en 0, mais la somme $f+g\ :\ x \mapsto x$ est dérivable (à droite) en 0.

2.2 Produits et quotients

Théorème 7. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0, **alors** $f \times g$ est dérivable en x_0.
Dit autrement, un produit de fonctions dérivables en x_0 est dérivable en x_0.

De plus, en cas de dérivabilité, $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.

Démonstration . Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. Supposons f et g dérivables en x_0.

$$\frac{(f\times g)(x) - (f\times g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)\, g(x) + f(x_0)\, g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)\, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

f est dérivable en x_0 et en particulier continue en x_0. Donc, $f(x)$ tend vers vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 en restant différent de x_0. Quand x tend vers x_0, on obtient l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{(f\times g)(x) - (f\times g)(x_0)}{x-x_0}$ et donc la dérivabilité de $f \times g$ en x_0 et de plus, en cas de dérivabilité, quand x tend vers x_0, on obtient $(f\times g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$. ❑

On peut généraliser le théorème précédent à un produit de 3, 4, 5, ... fonctions dérivables :

Théorème 8. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 puis $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables en x_0, **alors** $f_1 \times \ldots \times f_n$ est dérivable en x_0.

De plus, en cas de dérivabilité, $(f_1 \times \ldots \times f_n)'(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \times \ldots \times f_k'(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) \prod_{i \neq k} f_i(x_0)$.

Par exemple, $(fgh)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$.

Démonstration . On montre le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- Pour $n = 2$, c'est le théorème 7.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions dérivables en x_0, alors $f_1 \times \ldots \times f_n$ est dérivable en x_0 et $(f_1 \times \ldots f_n)'(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \ldots \times f_k'(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0)$.

  Soient $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ $n+1$ fonctions dérivables en x_0. Tout d'abord, $f_1 \times \ldots \times f_{n+1} = (f_1 \times \ldots \times f_n) \times f_{n+1}$ est dérivable en x_0 par hypothèse de récurrence et d'après le théorème 7. En suite,

$$\begin{aligned}
(f_1 \times \ldots \times f_{n+1})'(x_0) &= (f_1 \times \ldots \times f_n)'(x_0) f_{n+1}(x_0) + f_1(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0) \times f_{n+1}'(x_0) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \times \ldots \times f_k'(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0)\right) f_{n+1}(x_0) + f_1(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0) \times f_{n+1}'(x_0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \times \ldots \times f_k'(x_0) \times \ldots \times f_{n+1}(x_0) + f_1(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0) \times f_{n+1}'(x_0) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} f_1(x_0) \times \ldots \times f_k'(x_0) \times \ldots \times f_{n+1}(x_0).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions dérivables en x_0, alors $f_1 \times \ldots \times f_n$ est dérivable en x_0 et $(f_1 \times \ldots f_n)'(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_1(x_0) \ldots \times f_k'(x_0) \times \ldots \times f_n(x_0)$.

❏

Théorème 9. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 puis f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0, **alors** f^n est dérivable en x_0.
De plus, en cas de dérivabilité, $(f^n)'(x_0) = nf'(x_0)f^{n-1}(x_0)$.

Démonstration . On applique le théorème 8 au cas particulier où $f_1 = \ldots = f_n = f$. On obtient la dérivabilité de f^n en x_0 et de plus

$$(f^n)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f^{n-1}(x_0) f'(x_0) = nf'(x_0) f^{n-1}(x_0).$$

❏

Un corollaire du théorème 9 est :

Théorème 10. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0 et $(x^n)'(x_0) = nx_0^{n-1}$.
Un polynôme quelconque est dérivable en x_0.

Démonstration . On applique le théorème 9 au cas particulier où f est la fonction $x \mapsto x$. Dans ce cas, f est immédiatement dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 1$. On obtient la formule désirée.

La dérivabilité d'un polynôme en x_0, polynôme qui est une combinaison linéaire de monômes du type $x \mapsto a_p x^p$, est alors une conséquence du théorème 6.

On peut montrer directement la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x^n$ en x_0 de deux façons :

- Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}.$$

Quand x tend vers x_0, cette dernière expression tend vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}$.

• Pour tout réel h,

$$(x_0 + h)^n = x_0^n + n x_0^{n-1} h + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1}.$$

Si pour $h \in \mathbb{R}$, on pose $\varepsilon(h) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1}$, alors $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 (car pour $k \geqslant 2$, $k - 1 > 0$).
Ainsi, il existe une fonction $\varepsilon\ :\ h \mapsto \varepsilon(h)$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$(x_0 + h)^n = x_0^n + n x_0^{n-1} h + h\varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On obtient de nouveau la dérivabilité de la fonction $x \mapsto x^n$ en x_0 et la formule $(x^n)'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

❑

Passons maintenant aux quotients en commençant par le cas particulier de l'inverse :

Théorème 11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, **alors** $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0.

De plus, en cas de dérivabilité, $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Démonstration. Puisque f est dérivable en x_0, f est continue en x_0. Puisque $f(x_0) \neq 0$ et que f est continue en x_0, f ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 ou encore il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$, $f(x) \neq 0$.
Pour $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$, on a

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{f(x_0) f(x)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisque f est continue en x_0, $-\frac{1}{f(x_0) f(x)}$ tend vers $-\frac{1}{(f(x_0))^2}$ quand x tend vers x_0 et puisque f est dérivable en x_0, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$. Quand x tend vers x_0, $\dfrac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0}$ tend vers $-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$. Ceci montre la dérivabilité de $\frac{1}{f}$ en x_0 et établit la formule proposée.

❑

Théorème 12. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si f et g sont dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, **alors** $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0.

De plus, en cas de dérivabilité, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Démonstration. La fonction $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 d'après les théorèmes 7 et 11 et de plus,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \times \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \times \left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

❑

Théorème 13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, **alors** $\dfrac{1}{f^n}$ est dérivable en x_0.
De plus, en cas de dérivabilité, $\left(\dfrac{1}{f^n}\right)'(x_0) = -\dfrac{nf'(x_0)}{f^{n+1}(x_0)}$.

Démonstration. La fonction f^n est dérivable en x_0 d'après le théorème 9 et ne s'annule pas en x_0. Donc, la fonction $\dfrac{1}{f^n}$ est dérivable en x_0 d'après le théorème 11 et

$$\left(\frac{1}{f^n}\right)'(x_0) = -\frac{nf'f^{n-1}}{f^{2n}}(x_0) = -\frac{nf'}{f^{n+1}}(x_0).$$

❑

2.3 Composées

Théorème 14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose de plus que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, **alors** $g \circ f$ est dérivable en x_0.
De plus, en cas de dérivabilité, $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.

Démonstration. On peut donner une démonstration simple de ce théorème dans le cas particulier où f est strictement monotone et donc injective sur un voisinage de x_0. Dans ce cas, pour x au voisinage de x_0 et distinct de x_0,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Puisque f est dérivable en x_0, f est en particulier continue en x_0. Donc, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0 puis $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$ tend vers $g'(f(x_0))$ quand x tend vers x_0. D'autre part, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ et finalement, $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0) \times g'(f(x_0))$ quand x tend vers x_0.

Malheureusement, cette démonstration n'est pas de portée générale. Elle n'est plus valable dans le cas très simple où f est constante ou plus généralement dans le cas où f prend la valeur $f(x_0)$ sur tout voisinage de x_0 privé de x_0. On doit adopter une démarche qui n'utilise pas de dénominateur pouvant être nul : on travaille sur les développements limités d'ordre 1.

f est dérivable en x_0 et donc il existe une fonction ε_1 de limite nulle en 0 telle que pour h proche de 0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h).$$

De même, en posant $y_0 = f(x_0)$, il existe une fonction ε_2 de limite nulle en 0 telle que pour k proche de 0

$$g(y_0 + k) = g(y_0) + kg'(y_0) + k\varepsilon_2(k).$$

On en déduit que $g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h))$ puis, puisque $k = hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0,

$$\begin{aligned}
g(f(x_0 + h)) &= g\left(f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\right) \\
&= g(f(x_0)) + \left(hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\right) g'(f(x_0)) + \left(hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\right) \varepsilon_2\left(hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\right) \\
&= g(f(x_0)) + hf'(x_0)\, g'(f(x_0)) + h\left[\varepsilon_1(h) g'(f(x_0)) + \left(f'(x_0) + \varepsilon_1(h)\right) \varepsilon_2\left(hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\right)\right].
\end{aligned}$$

Pour h dans un voisinage de 0, posons $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) g'(f(x_0)) + (f'(x_0) + \varepsilon_1(h))\, \varepsilon_2(hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h))$. $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 et de plus, pour h dans un voisinage de 0,

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + hf'(x_0)\, g'(f(x_0)) + h\varepsilon(h).$$

Ceci montre dans tous les cas que $g \circ f$ est dérivable en x_0 et que $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.

❑

2.4 Dérivée d'une réciproque

Théorème 15. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur I. f réalise donc une bijection de I sur $J = f(I)$ qui est un intervalle de même nature que I.

Soit $x_0 \in I$. **Si** f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, **alors** f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration . Soit y un réel de J distinct de y_0. On sait que f^{-1} est injective et donc $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ puis

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}.$$

On sait que f^{-1} est continue en y_0 et donc $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(y_0)$ quand y tend vers y_0. Mais alors $\dfrac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}$ tend vers $f'\left(f^{-1}(y_0)\right)$ quand y tend vers y_0 d'après le théorème de composition des limites. Enfin, puisque $f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \neq 0$, $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ tend vers $\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.

Ceci montre f^{-1} est dérivable en y_0 et que $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$.

❏

3 Fonctions dérivables sur un intervalle

3.1 Définition

Comme pour définir la continuité sur un intervalle, on se heurte à quelques difficultés techniques. On commence par le cas d'une fonction définie sur un intervalle ouvert.

Définition 3. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ (où a et b sont réels ou infinis et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en chaque point de I.

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ (où a est réel et b est réel ou infini) une fonction définie sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en chaque point de $]a, b[$ et f est dérivable à droite en a.

On a une définition analogue si $I =]a, b]$ ou $I = [a, b]$.

Quand f est dérivable sur I, la fonction dérivée est la fonction définie sur I qui, à chaque réel x_0 de I, associe $f'(x_0)$ le nombre dérivé de f en x_0.

Quand on cherche à généraliser la définition précédente à une fonction définie sur une partie Δ quelconque de $\mathbb{R}$, des problèmes se pose. Par exemple, si f dérivable $]a, b[$ et sur $[b, c[$, f est dérivable en chaque point de $]a, b[$, dérivable à droite en b, dérivable en chaque point de $]b, c[$ mais n'est pas nécessairement dérivable sur $]a, c[$ car n'est pas nécessairement dérivable à gauche en b.
Si par contre, $\Delta =]a, b[\cup]c, d[$ (avec $b \leqslant c$), alors f est dérivable en chaque point de Δ si et seulement si f est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable sur $]c, d[$. On dira alors que f est dérivable sur Δ.

Notation. L'ensemble des fonctions dérivables sur Δ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ se note $D^1(\Delta, \mathbb{K})$.

Puisqu'une fonction dérivable (resp. dérivable à droite, dérivable à gauche) en un point est en particulier continue (resp. continue à droite, continue à gauche) en ce point, on a $D^1(I, \mathbb{K}) \subset C^0(I, \mathbb{K})$. D'autre part, si x_0 est un réel de I qui n'est pas une borne de I, la fonction $x \mapsto |x - x_0|$ est continue sur I mais n'est pas dérivable en x_0 et donc n'est pas dérivable sur I. Par suite,

Théorème 16.

$$D^1(I, \mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^0(I, \mathbb{K}).$$

3.2 Opérations sur les dérivées

Les différentes formules de dérivation en un point fournissent immédiatement les théorèmes généraux suivants

Théorème 17. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f et g sont dérivables sur I, **alors** pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

(Donc, une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I).

Théorème 18. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f et g sont dérivables sur I, **alors** $f \times g$ est dérivable sur I et

$$(f \times g)' = f'g + fg'.$$

(Donc, un produit de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I).

Théorème 19. Soient $n \geqslant 2$ puis $f_1, \ldots, f_n$ n fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $f_1, \ldots, f_n$ sont dérivables sur I, **alors** $f_1 \times \ldots \times f_n$ est dérivable sur I et

$$(f_1 \times \ldots \times f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \left(\prod_{j \neq k} f_j \right).$$

Théorème 20. Soient $n \geqslant 2$ et f une fonctions définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est dérivable sur I, **alors** f^n est dérivable sur I et

$$(f^n)' = nf'f^{n-1}.$$

Théorème 21. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, **alors** $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

(Donc, l'inverse d'une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I, est dérivable sur I).

Théorème 22. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, **alors** $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(Donc, un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, est dérivable sur I).

Théorème 23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si f est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, **alors** $\dfrac{1}{f^n}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f^n}\right)' = -\frac{nf'}{f^{n+1}}.$$

Théorème 24. Soient $f\ :\ I \to J$ et $g\ :\ J \mapsto \mathbb{K}$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J, **alors** $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Ainsi, par exemple, si f est dérivable sur I et à valeurs dans $]0, +\infty[$ et si α est un réel, alors f^α est dérivable sur I et $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$. De même, $\left(e^f\right)' = f'e^f$, $(\text{Arcsin}(f))' = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$ (si f est dérivable sur I et à valeurs dans $]-1, 1[$) ...

Théorème 25. Soit $f : I \to J$ continue et strictement monotone sur I, bijective de I sur J.

Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, **alors** f^{-1} est dérivable sur J et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

4 Dérivées d'ordre supérieur

4.1 Fonctions n fois dérivables, de classe C^n, de classe C^∞

On a déjà défini la notion de fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$: ce sont les fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont la dérivée est de plus une fonction continue sur $[a, b]$. Cette définition se généralise à un intervalle quelconque I et on note $C^1(I, \mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I. Une fonction de classe C^1 sur I étant en particulier une fonction dérivable sur I, on a

$$C^1(I, \mathbb{K}) \subset D^1(I, \mathbb{K}).$$

« Vérifions sur un exemple » que $C^1(I, \mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^1(I, \mathbb{K})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$. On va vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x, $f(x)$ existe (que x soit nul ou pas) et donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux et pour x non nul,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

(Pour dériver sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par exemple, on a constaté que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et on a appliqué une formule de dérivation).

• Vérifions que f est dérivable en 0. Pour tout réel x **non nul**,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis, pour tout réel x non nul,

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|.$$

Mais alors, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes. Ceci montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$ (pour dériver f en 0 qui est un point en lequel aucun théorème général ne s'applique, on est revenu à la définition de la dérivabilité en un point).

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \left\{\begin{array}{l} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$.

• Vérifions que f' n'est pas continue en 0 et donc que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
La fonction $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0. En effet, le suites $(x_n) = \left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)$ et $(y_n) = \left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)$ sont deux suites convergeant vers 0 telles que les suites $(g(x_n))$ et $(g(y_n))$ convergente vers des limites distinctes à savoir 0 et 1.
D'autre part, la fonction $h : x \mapsto 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Si f' a une limite en 0, alors $g = h - f'$ a une limite en 0 ce qui n'est pas. Donc, f' n'a pas de limite en 0 et en particulier n'est pas continue en 0.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que l'on a aussi rencontré un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ non dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc, de manière générale,

$$C^1(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^1(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^0(I,\mathbb{K}).$$

On peut poursuivre. Un élément f de $C^1(I,\mathbb{K})$ est dérivable sur I et sa dérivée f' est ou n'est pas dérivable sur I. Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I. On note f'' la dérivée de f' et on note $D^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur I. Si f'' est continue sur I, on dit que f est de classe C^2 sur I et on note $C^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et on a

$$C^2(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^2(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^1(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^1(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^0(I,\mathbb{K}).$$

De manière générale, on définit une fonction n fois dérivable et sa dérivée n-ème ainsi qu'une fonction de classe C^n :

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est n fois dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur I puis f' est dérivable sur I, ..., puis $\underbrace{\left(\left(\ldots(f')'\ldots\right)'\right)'}_{n-1 \text{ fois}}$ est dérivable sur I.

Dans ce cas, la dérivée n-ème de f sur I est $\underbrace{\left(\left(\ldots(f')'\ldots\right)'\right)'}_{n \text{ fois}}$. Elle se note $f^{(n)}$.

On note alors $D^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Les dérivées successives d'une fonction suffisamment dérivable sur un intervalle, peuvent être définies par récurrence :

$$\text{On pose } f^{(0)} = f \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Les dérivées successives s'écrivent traditionnellement f (dérivée 0-ème), f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ... (à partir de f''', on préfère écrire $f^{(3)}$. On prendra garde à ne pas confondre $f^{(3)}$ qui est la dérivée 3-ème de f avec f^3 qui peut suivant le cas désigner $f \times f \times f$ ou $f \circ f \circ f$.

Théorème 26. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^{n+1}(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^n(I,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Démonstration. On a vu que la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ sans être de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En particulier, f' n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Si maintenant I est un intervalle contenant un certain réel x_0 non borne de cet intervalle, la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} (x-x_0)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right) & \text{si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ 0 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$ est une fonction dérivable sur I sans être deux fois dérivable sur I. Ceci montre que $D^2(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^1(I,\mathbb{K})$.

f est continue sur I et admet donc des primitives sur I (ceci sera énoncé et démontré au deuxième semestre dans le chapitre « Intégration »). Une primitive de f est deux fois dérivable sur I sans être trois fois dérivable sur I. Plus généralement, une fonction dont la dérivée $(n-1)$-ème (primitive itérée) est f sera n fois dérivable sur I sans être $n+1$ fois dérivable sur I. Ceci montre que $D^{n+1}(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^n(I,\mathbb{K})$.

❏

On peut donner un exemple important et plus simple de fonction dérivable un certain nombre de fois et pas plus. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $f\ :\ x \mapsto x^{n+\frac{1}{2}}$ est dérivable n fois sur $[0,+\infty[$ de dérivée n-ème la fonction $f^{(n)}\ :\ x \mapsto \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left(n+\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(n+\dfrac{1}{2}-(n-1)\right)x^{\frac{1}{2}}$. Mais la fonction $f^{(n)}$ n'est pas dérivable (à droite) en 0 et donc f n'est pas $n+1$ fois dérivable sur $[0,+\infty[$.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe** C^n sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.
On note $C^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

⇨ **Commentaire**. *On rappelle que* $C^0(I,\mathbb{K})$ *désigne l'ensemble des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues sur* I *dont la dérivée* 0*-ème est continue sur* I.

Une démarche analogue à celle du théorème 26 montre que :

Théorème 27. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^{n+1}(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^n(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^n(I,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I ou aussi que f **de classe** C^∞ sur I si et seulement si f admet des dérivées à tout ordre sur I.
On note $C^\infty(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Un résultat immédiat est :

Théorème 28.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C^\infty(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^n(I,\mathbb{K})$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $C^\infty(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^n(I,\mathbb{K})$.
$C^\infty(I,\mathbb{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D^n(I,\mathbb{K}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I,\mathbb{K})$.

Ainsi,

$$C^\infty(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} D^{n+1}(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^n(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^n(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} C^1(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} D^1(I,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^0(I,\mathbb{K}).$$

On a le résultat immédiat suivant :

Théorème 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in D^n(I,\mathbb{K})$ (resp. $C^n(I,\mathbb{K})$), alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)} \in D^{n-k}(I,\mathbb{K})$ (resp. $C^n(I,\mathbb{K})$).

Enfin, signalons le fait que la plupart des fonctions usuelles sont de classe C^∞ sur leur domaine définition :

• Un polynôme est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, si f est un polynôme non nul de degré n, alors $\forall k \geqslant n+1$, $f^{(k)} = 0$.

• Une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est de classe C^∞ sur son domaine de définition (par récurrence car la dérivée d'une fraction rationnelle est une fraction rationnelle).

• La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = f$.

• La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ (car sa dérivée première est une fraction rationnelle). De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)\times(-2)\times\ldots\times(-(n-1))}{x^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

• Les fonctions sin, cos, ch, sh sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction tan est de classe C^∞ sur chaque intervalle de la forme $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$, et la fonction th est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée première est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$).

Les fonctions Arcsin et Arccos sont un premier exemple de fonctions usuelles qui ne sont pas de classe C^∞ sur leur domaine de définition : Arcsin et Arccos sont définies et continues sur $[-1,1]$, de classe C^∞ sur $]-1,1[$, pas dérivables sur $[-1,1]$. Les fonctions du type $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$, prolongée par continuité en 0 à droite, fournissent des exemples de fonctions dérivables un certain nombre de fois (n fois avec $n = E(\alpha)$) sur $[0,+\infty[$ et pas plus.

4.2 Opérations sur les fonctions n fois dérivables

On donne maintenant les théorèmes généraux sur les fonctions n fois dérivables sur I. Le premier résultat est immédiat par récurrence.

Théorème 30. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $(f, g) \in (D^n(I, \mathbb{K}))^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, (resp. $(f, g) \in (C^n(I, \mathbb{K}))^2$, $(f, g) \in (C^\infty(I, \mathbb{K}))^2$) **alors** pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in D^n(I, \mathbb{K})$ (resp. $C^n(I, \mathbb{K})$, $C^\infty(I, \mathbb{K})$)et

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ (\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

(ou $\forall k \in \mathbb{N},\ (\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$).

Ainsi, une combinaison linéaire de fonctions n fois dérivables sur I, (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I) est n fois dérivables sur I, (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I).

Théorème 31 (formule de Leibniz). Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. **Si** f et g sont n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I), **alors** $f \times g$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I) et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Ainsi, un produit de fonctions n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I), est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I).

Démonstration . Le résultat est clair pour $n = 0$. On montre ensuite le résultat par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- Pour $n = 1$, le résultat est connu.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour n. Soient f et g deux fonctions $n + 1$ fois dérivables sur I.
Par hypothèse de récurrence, $f \times g$ est n fois dérivable sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Dans cette somme, puisque $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $k \leqslant n < n + 1$ et $n - k \leqslant n < n + 1$, on peut dériver encore une fois ou encore $f \times g$ est $n + 1$ fois dérivable. De plus

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(n+1)} &= \left((f \times g)^{(n)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} f^{(k')} g^{(n-(k'-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} \text{ (en posant } k' = k + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} \text{ (la variable } k' \text{ est muette)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{((n+1)-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Si de plus, f et g sont de classe C^n sur I, $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)} g^{(n-k)}$ est continue sur I et donc $f \times g$ est de classe C^n sur I.

❑

Théorème 32. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $f \in D^n(I,\mathbb{K})$ (resp. $C^n(I,\mathbb{K})$, $C^\infty(I,\mathbb{K})$) et ne s'annule pas sur I, **alors** $\dfrac{1}{f} \in D^n(I,\mathbb{K})$ (resp. $C^n(I,\mathbb{K})$, $C^\infty(I,\mathbb{K})$).

Donc, l'inverse d'une fonction n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I) et ne s'annulant pas sur I, est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I).

Démonstration. On montre par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, si f est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I) et ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I).

- Si f est dérivable sur I (resp. de classe C^1 sur I) et ne s'annule pas sur I, on sait que $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et que $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.
Si de plus, f est de classe C^1 sur I, $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ est continue sur I en tant que quotient de fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que si f est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I) et ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I).
Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I (resp. de classe C^{n+1} sur I) et ne s'annulant pas sur I. f est en particulier dérivable sur I et ne s'annule pas sur I. $\dfrac{1}{f}$ est donc dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -f' \times \dfrac{1}{f^2}$.
La fonction f' est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I). D'autre part, la fonction f^2 est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I) d'après le théorème 31 et ne s'annule pas sur I. Par hypothèse de récurrence, la fonction $\dfrac{1}{f^2}$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I). D'après le théorème 31, la fonction $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -f' \times \dfrac{1}{f^2}$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I) ou encore $\dfrac{1}{f}$ est $n+1$ fois dérivable sur I (resp. de classe C^{n+1} sur I).

Le résultat est démontré par récurrence.

❑

Théorème 33. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(f,g) \in (D^n(I,\mathbb{K}))^2$ (resp. $(f,g) \in (C^n(I,\mathbb{K}))^2$, $(f,g) \in (C^\infty(I,\mathbb{K}))^2$) et si g ne s'annule pas sur I, **alors** $\dfrac{f}{g} \in D^n(I,\mathbb{K})$ (resp. $\dfrac{f}{g} \in C^n(I,\mathbb{K})$, $\dfrac{f}{g} \in C^\infty(I,\mathbb{K})$).

Donc, un quotient de fonctions n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I) dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, est n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I).

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate des théorèmes 31 et 32.

❑

Théorème 34. Soient $f : I \to J$ et $g : J \mapsto \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si f est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I) et g est n fois dérivable sur J (resp. de classe C^n sur J, de classe C^∞ sur J), **alors** $g \circ f$ est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I).

Démonstration. Le résultat se démontre par récurrence sur n sur le même schéma que pour $\dfrac{1}{f}$ (théorème 32) en remplaçant la formule $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ par la formule $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

❑

Théorème 35. Soit $f : I \to J$ continue et strictement monotone sur I, bijective de I sur J. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si f est n fois dérivable sur I (resp. de classe C^n sur I, de classe C^∞ sur I) et si f' ne s'annule pas sur I, **alors** f^{-1} est n fois dérivable sur J (resp. de classe C^n sur J, de classe C^∞ sur J).

Démonstration. De nouveau, le résultat se démontre par récurrence sur le même schéma.

❑

5 Les grands théorèmes

5.1 Le théorème de Rolle

Théorème 36 (théorème de Rolle). Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$,

alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration . f est continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, f admet sur $[a, b]$ un minimum m et un maximum M.

• Si $m = M$, alors pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$ et donc, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) = m$. Dans ce cas, la fonction f est constante. Mais alors, pour un réel $c \in]a, b[$ donné, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$ tend vers 0 quand x tend vers c. N'importe quel réel c de $]a, b[$ est ainsi un réel en lequel la dérivée de f s'annule.

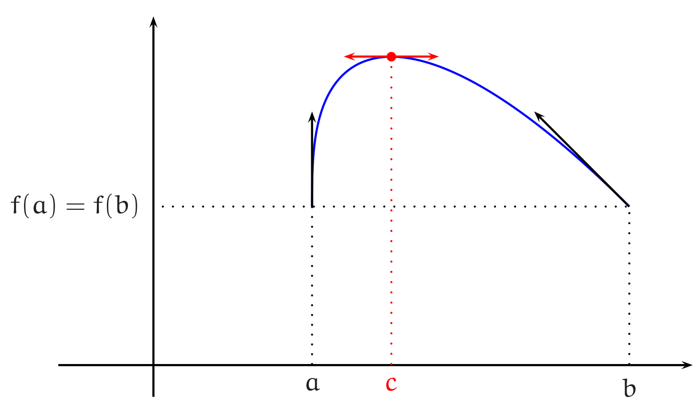
• Sinon, $m < M$. Puisque $f(a) = f(b)$, on ne peut avoir à la fois $f(a) = f(b) = m$ et $f(a) = f(b) = M$. L'un des deux extrema m ou M est donc atteint dans $]a, b[$. Supposons par exemple que ce soit M. Il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Puisque $c \in]a, b[$, f est dérivable en c. De plus, par définition de c, pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant f(c)$.

Pour $x \in [a, c[$, on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$. Quand x tend vers c par valeurs inférieures, on obtient $f'(c) \geqslant 0$.
De même, pour $x \in]c, b]$, on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$. Quand x tend vers c par valeurs supérieures, on obtient $f'(c) \leqslant 0$.
Finalement, $f'(c) = 0$.

❑

⇨ **Commentaire .** *Le théorème de* Rolle *est faux pour les fonctions à valeurs dans* $\mathbb{C}$. *Considérons par exemple la fonction* $f : x \mapsto e^{ix}$. f *est continue sur* $[0, 2\pi]$, *dérivable sur* $]0, 2\pi[$ *et vérifie* $f(0) = 1 = f(2\pi)$. *Pourtant, pour tout réel* c *de* $]0, 2\pi[$, $f'(c) = ie^{ic} \neq 0$. *Par contre, les parties réelle et imaginaire de* f *à savoir* $Re(f) = \cos$ *et* $Im(f) = \sin$ *rentre dans le cadre du théorème de* Rolle *et de fait leurs dérivées respectives s'annulent au moins une fois sur l'intervalle* $]0, 2\pi[$ *(mais pas simultanément).*

Le théorème de Rolle s'interprète géométriquement pour les fonctions à valeurs réelles. Si f prend les mêmes valeurs en a et en b, est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse dans $]a, b[$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



5.2 Le théorème des accroissements finis

5.2.1 L'égalité des accroissements finis

Théorème 37 (égalité des accroissements finis). Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,

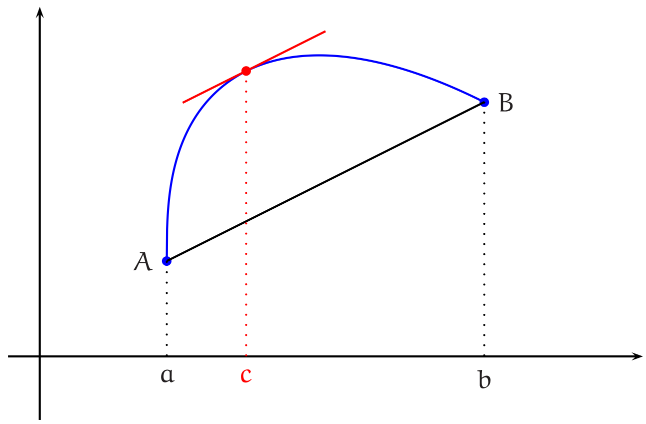
alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Démonstration . Pour $x \in [a, b]$, posons $h(x) = f(x) - g(x)$ où g est la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que

f en a et b. Pour tout x de $[a, b]$, on a $g(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $h(a) = h(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$ ou encore tel que $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ ce qui démontre le théorème.

❑

Graphiquement, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ et $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse c. L'égalité $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ se traduit par le fait que les droites (AB) et (T) sont parallèles.



Comme pour le théorème de Rolle, l'*égalité des accroissements finis* est fausse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. On verra néanmoins au paragraphe suivant qu'on peut déduire de l'égalité des accroissements finis une inégalité dite *inégalité des accroissements finis* et que cette inégalité continue d'être vraie pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

5.2.2 L'inégalité des accroissements finis

Théorème 38 (inégalité des accroissements finis). Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I.

1) Si il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de I, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \neq b$, $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

2) S'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de I, $|f'(x)| \leqslant M$, alors pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Le cas où f est de classe C^1 sur un segment $I = [a, b]$ est un cas où la fonction f' est automatiquement bornée sur I.*

◇ *Si f' est bornée sur I et si M est un majorant de $|f'|$ sur I, alors f est M-lipschitzienne.*

Démonstration .

1) Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. f est dérivable sur I et en particulier, f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Par hypothèse, $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et donc $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

Si $a > b$, on applique le résultat précédent au couple (b, a) ce qui fournit $m \leqslant \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$.

2) Pour tout x de I, on a $-M \leqslant f'(x) \leqslant M$. D'après 1), pour tout (a, b) de I^2 tel que $a \neq b$, on a $-M \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$ ou encore $\left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leqslant M$. On en déduit que $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$. Cette dernière inégalité reste vraie quand $a = b$.

❑

Théorème 39. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 sur I.

S'il existe un réel M tel que, pour tout réel x de I, $|f'(x)| \leqslant M$, alors pour tout $(a, b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$.

Démonstration . Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$. Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$,

$$|f(b)-f(a)| = \left|\int_a^b f'(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\ dx \leqslant \int_a^b M\ dx = M(b-a) = M|b-a|.$$

Si $a > b$, on applique l'inégalité ci-dessus au couple (b,a).

❑

⇨ **Commentaire** . *Dans la démonstration précédente, on admet momentanément que si* f *est une fonction continue sur un segment* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*, alors* $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$*. Ce résultat sera démontré dans le chapitre « Intégration » au deuxième semestre.*

5.2.3 Le théorème de la limite de la dérivée

Théorème 40. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{K}) \cap C^1(]a,b],\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si la fonction f' a une limite en a (à droite) dans $\mathbb{K}$, **alors** $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. En particulier, si la fonction f' a une limite en a (à droite), **alors** f est dérivable en a (à droite) et $f'(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$.

Démonstration . Commençons par le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Posons $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in]a,b]$. La fonction f est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c = c_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x).$$

Pour tout x de $]a,b]$, on a $a \leqslant c_x \leqslant x$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, c_x tend vers a quand x tend vers a par valeurs supérieures. D'après le théorème de composition des limites, $f'(c_x)$ tend vers ℓ.

Par suite, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures. f est donc dérivable (à droite) en a et $f'_d(a) = \ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x)$. Mais alors, f' est continue en a et donc $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.

Supposons maintenant que $f \in C^0([a,b],\mathbb{C}) \cap C^1(]a,b],\mathbb{C})$ et que f' a une limite complexe ℓ quand x tend vers a par valeurs supérieures. Alors, $\mathrm{Re}(f')$ et $\mathrm{Im}(f')$ sont éléments de $C^0([a,b],\mathbb{K}) \cap C^1(]a,b],\mathbb{K})$ et ont une limite réelle en a. On en déduit que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de classe C^1 sur $[a,b]$ puis que $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ est de classe C^1 sur $[a,b]$.

❑

Le théorème précédent se généralise bien sûr aux cas où $f \in C^0([a,b[,\mathbb{C}) \cap C^1(]a,b[,\mathbb{C})$ ou $f \in C^0([a,+\infty[,\mathbb{C}) \cap C^1(]a,+\infty[,\mathbb{C})$ ou $f \in C^0(]-\infty,a],\mathbb{C}) \cap C^1(]-\infty,a[,\mathbb{C})$ ou $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^1(]-\infty,a[\cup]a,+\infty[,\mathbb{C})$...

Exercice 1. Montrer que la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Solution 1. En vertu de théorèmes généraux, la fonction f est définie et continue sur $[0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}.$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} -\dfrac{\sin(X)}{2X} = -\dfrac{1}{2}$.

En résumé,

- $f \in C^0([0,+\infty[,\mathbb{R}) \cap C^1(]0,+\infty[)$,
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, $f \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

⇨ **Commentaire**. *En particulier,* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$. *Ce résultat aurait pu être établi directement par l'étude du taux d'accroissement : pour* $x > 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x} = -\frac{1}{2} \times \frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}$$

et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2} \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \dfrac{1-\cos(X)}{\dfrac{X^2}{2}} = -\dfrac{1}{2}$.

Néanmoins, puisque f' *avait une limite en* 0 *(à droite), il était obligatoire que* f *soit dérivable en* 0 *puis que* f' *soit continue en* 0. *Ceci rendait l'étude de la limite du taux superflue.*

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right.$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout entier naturel n, préciser $f^{(n)}(0)$.

Solution 2.

• La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $y \mapsto e^y$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

• Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une fraction rationnelle R_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-1/x^2}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ avec $R_0 = 1$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons qu'il existe une fraction rationnelle R_n telles que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-1/x^2}$.
Alors, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = R_n'(x)e^{-1/x^2} + R_n(x) \times \left(\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \left(R_n'(x) + \frac{2}{x^3}R_n(x)\right)e^{-1/x^2} = R_{n+1}(x)e^{-1/x^2},$$

où, pour tout réel non nul x, $R_{n+1}(x) = R_n'(x) + \dfrac{2}{x^3}R_n(x)$. Puisque R_{n+1} est une fraction rationnelle, on a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ il existe une fraction rationnelle } R_n \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-1/x^2}.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

- Pour $n = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 = f(0)$. Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que f soit de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors, d'une part f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et C^{n+1} sur $\mathbb{R}^*$ et de plus, d'après un théorème de croissances comparées, $f^{(n+1)}(x) = R_{n+1}(x)e^{-1/x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers 0, $x \neq 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. f est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel non nul n, f est n fois dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = 0$.

5.3 La formule de Taylor-Laplace

Théorème 41 (la formule de Taylor-Laplace). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie et de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur n.

- Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors la fonction f' est définie et continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

puis

$$f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,dt.$$

La formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour toute fonction f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, on ait

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Soit f une fonction de classe C^{n+2} sur $[a, b]$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, b]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *La formule de* Taylor*-Laplace est aussi appelée formule de* Taylor *avec reste intégral.*

◇ *Les intégrations par parties ci-dessus restent parfaitement valables dans le cas où $a > b$. On a donc un énoncé plus général de l'égalité de* Taylor*-Laplace :*
Soit f une fonction définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Théorème 42 (inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M_{n+1} = \text{Max}\left\{\left|f^{(n+1)}(x)\right|,\ x \in [a, b] \text{ (resp. } [b, a])\right\}$ si $a \leqslant b$ (resp. $b \leqslant a$).

Démonstration . Soient a et b deux réels de I.

• Si $a \leqslant b$ (resp. $a > b$), la fonction $f^{(n+1)}$ est définie et continue sur le segment $[a, b]$ (resp. $[b, a]$). On en déduit que M_{n+1} existe dans $\mathbb{R}$.

• Si $a \leqslant b$, l'égalité de Taylor-Laplace permet d'affirmer que

$$
\begin{aligned}
\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &= \left|\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\ dx\right| \\
&\leqslant \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\ dx \text{ (car pour } x\in[a,b],\ b-x\geqslant 0) \\
&\leqslant M_{n+1}\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\ dx = M_{n+1}\left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b \\
&= M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = M_{n+1}\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

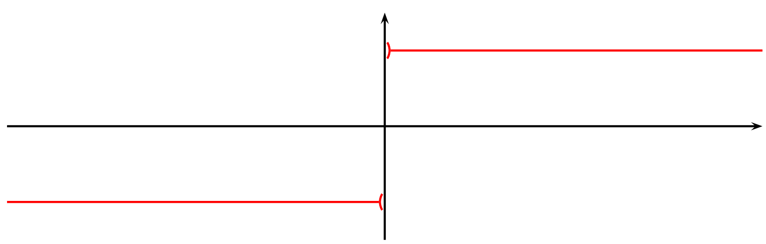
La démarche est analogue si $a > b$.

❏

6 Applications des dérivées

6.1 Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle

Commençons par constater que le « théorème » : « f est constante si et seulement si f' est nulle » **est faux**.
Par exemple, la fonction $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ -1 \text{ si } x<0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.



Le problème vient du fait que $\mathbb{R}^*$ **n'est pas un intervalle**. Le théorème précis est le suivant :

Théorème 43. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$.

Démonstration .

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons f constante sur I. Soit $x_0 \in I$. Pour $x \in I\setminus\{x_0\}$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Quand x tend vers x_0, on obtient $f'(x_0) = 0$. Ainsi, pour tout x_0 de I, $f'(x_0) = 0$ et donc $f' = 0$.

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $f' = 0$.

- Cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel fixé de I. Soit x un réel de I distinct de a. Si $x > a$ (resp. $x < a$), la fonction f est continue sur $[a, x]$ (resp. $[x, a]$), dérivable sur $]a, x[$ (resp. $]x, a[$) (car $[a, x]$ (resp. $[x, a]$) est contenu dans I puisque I est un intervalle). D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]a, x[$ (resp. $]x, a[$) tel que

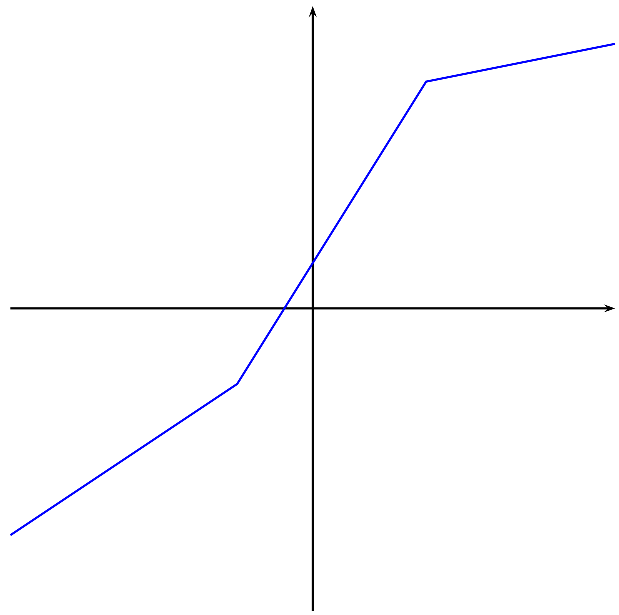
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) = 0.$$

Mais alors, $f(x) = f(a)$. On a montré que pour tout x de I, on a $f(x) = f(a)$ et donc f est constante sur I.

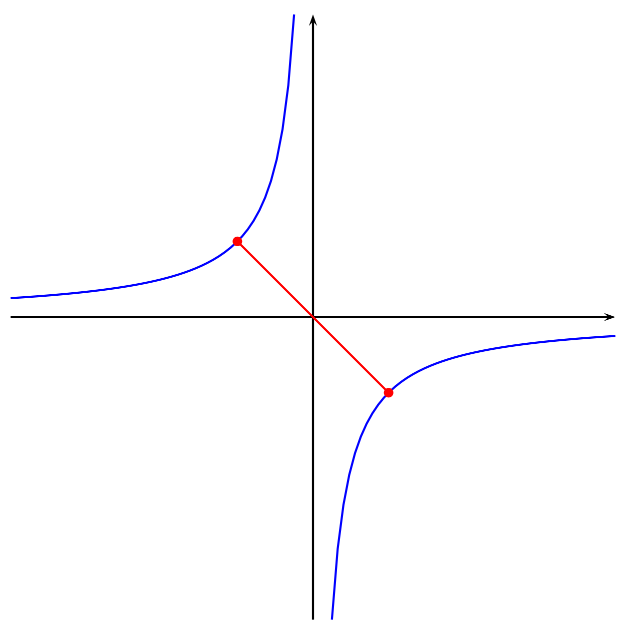
- Cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I, de dérivée nulle sur I (on rappelle que $(\mathrm{Re}(f))' = \mathrm{Re}(f')$ et $(\mathrm{Im}(f))' = \mathrm{Im}(f')$) et à valeurs réelles. On en déduit que les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont constantes sur I puis que $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ est constante sur I. ❏

6.2 Etude des variations d'une fonction à valeurs réelles

De même que dans le paragraphe précédent, un théorème du genre « f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$ » **est faux**. D'abord, l'hypothèse de dérivabilité manque : une fonction a le droit d'être croissante sans être dérivable. Par exemple, la fonction $x \mapsto E(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et n'est même pas continue sur $\mathbb{R}$. De même, une fonction dont le graphe est donné ci-dessous est continue et croissante mais n'est pas dérivable en certains points. Son sens de variation n'est donc pas obtenu à l'aide du signe de la dérivée.



Ensuite, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ dont le graphe est donné ci-dessous, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée, à savoir $f' : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, est positive sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$ car par exemple, $-1 < 1$ et $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$. Le problème vient ici du fait que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.



Le théorème précis est le suivant :

Théorème 44. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$. f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$.

Démonstration .

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons f croissante sur I. Soit $x_0 \in I$. Pour $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0.$$

Quand x tend vers x_0, on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout x_0 de I, $f'(x_0) \geqslant 0$ et donc $f' \geqslant 0$.

Si maintenant f est décroissante sur I, alors $-f$ est croissante sur I. On en déduit que $-f' = (-f)' \geqslant 0$ puis que $f' \leqslant 0$.

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f' \geqslant 0$.

Soient a et b deux réels de I tel que $b > a$. La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (car $[a, b]$ est contenu dans I puisque I est un intervalle). D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $(a, b) \in I^2$, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. Ceci montre que f est croissante sur I.

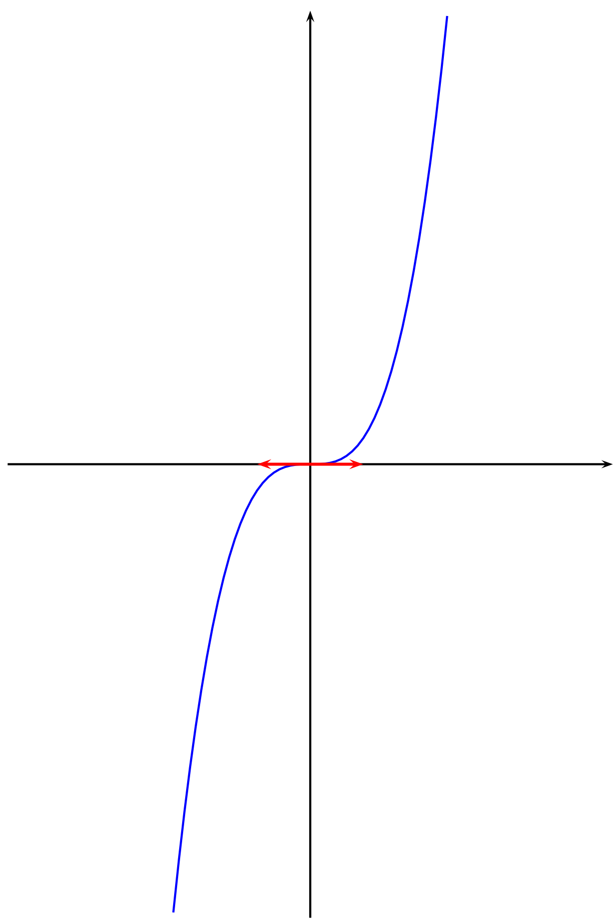
Si maintenant $f' \leqslant 0$, alors $(-f)' = -f' \geqslant 0$ puis $-f$ est croissante sur I et donc f est décroissante sur I.

❏

Il existe de nombreuses situations où l'on a besoin de savoir si une fonction est strictement monotone. Le théorème précédent s'avère alors insuffisant. Un théorème du genre « si f est dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' > 0$ » est faux. La fonction $f : x \mapsto x^3$ fournit un exemple de fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$. En effet, $f'(0) = 0$ et d'autre part, si a et b sont deux réels tels que $a < b$,

$$\frac{b^3-a^3}{b-a} = a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3b^2}{4} = 0$ ou encore $a = b = 0$ ce qui contredit $a < b$. Donc, si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.



Dans les théorèmes qui suivent, on commence par énoncer quelques situation où f est strictement monotone avant d'énoncer un théorème du type « f est strictement croissante si et seulement si … ».

Théorème 45. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f' > 0$, **alors** f est strictement croissante sur I. **Si** $f' < 0$, **alors** f est strictement décroissante sur I.

Démonstration . Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f' > 0$.

Soient a et b deux réels de I tel que $b > a$. La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (car $[a, b]$ est contenu dans I puisque I est un intervalle). D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0.$$

Ainsi, pour tout $(a, b) \in I^2$, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. Ceci montre que f est strictement croissante sur I.

Si maintenant $f' < 0$, alors $(-f)' = -f' > 0$ puis $-f$ est strictement croissante sur I et donc f est strictement décroissante sur I.

❏

On a vu que le théorème précédent est insuffisant pour prouver que la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On peut améliorer le théorème précédent qui lui s'applique directement à la fonction $x \mapsto x^3$:

Théorème 46. Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si pour tout réel x de I sauf peut-être pour un nombre fini de réels de I, on a $f'(x) > 0$, **alors** f est strictement croissante sur I.
Si pour tout réel x de I sauf peut-être pour un nombre fini de réels de I, on a $f'(x) < 0$, **alors** f est strictement décroissante sur I.

Démonstration . Supposons que la fonction f' est strictement positive sur $I \setminus \{x_0\}$ où x_0 est un réel de I qui n'est pas une borne de I.
La dérivée de f est strictement positive sur l'intervalle $I \cap]-\infty, x_0[$ et sur l'intervalle $I \cap]x_0, +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $I \cap]-\infty, x_0[$ et sur $I \cap]x_0, +\infty[$.
Il reste à recoller les morceaux. Soit par exemple x un réel de I strictement supérieur à x_0. Puisque f est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) > 0,$$

et donc $f(x) > (x_0)$. Par suite, f est strictement croissante sur $I \cap [x_0, +\infty[$. De même, f est strictement croissante sur $I \cap]-\infty, x_0]$ et finalement f est strictement croissante sur I. En effet, soient a et b deux réels de I tels que $a < b$:

- si $a < b \leqslant x_0$, $f(a) < f(b)$ car f est strictement croissante sur $I \cap]-\infty, x_0]$,
- si $x_0 \leqslant a < b$, $f(a) < f(b)$ car f est strictement croissante sur $I \cap [x_0, +\infty[$,
- si $a < x_0 \leqslant b$ ou $a \leqslant x_0 < b$, alors $f(a) < f(x_0) \leqslant f(b)$ ou $f(a) \leqslant f(x_0) < f(b)$ et donc $f(a) < f(b)$.

Ce qui précède se généralise aisément au cas où la dérivée n'est pas strictement positive en un nombre fini de points puis au cas où la dérivée est strictement négative sauf en un nombre fini de points.

❏

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée, à savoir la fonction $f' : x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Donc, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ❏

On peut encore améliorer pour obtenir enfin une équivalence :

Théorème 47. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, de dérivée positive (resp. négative) sur I.

f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si il n'existe pas de segment $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ sur lequel la dérivée de f est nulle.

Démonstration . Soit f dérivable sur I, de dérivée positive sur I. Donc f est croissante sur I.

• Supposons que f ne soit pas strictement croissante sur I. Alors, il existe deux réels a et b de I tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Puisque f est croissante sur $[a, b]$, pour tout x de $[a, b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = f(a)$ et donc pour tout x de $[a, b]$, $f(x) = f(a)$. f est donc constante sur $[a, b]$ et par suite sa dérivée est nulle sur $[a, b]$.

Par contraposition, s'il n'existe pas de segment $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ sur lequel la dérivée de f est nulle, alors f est strictement croissante sur I.

• Supposons maintenant f strictement croissante sur I. S'il existe $[a, b] \subset I$ tel que $a < b$ et $f'_{/[a,b]} = 0$, alors f est constante sur $[a, b]$ ce qui contredit le fait que f est strictement croissante sur I. Donc, il n'existe pas de segment $[a, b] \subset I$ avec $a < b$ sur lequel la dérivée de f est nulle.

Enfin, en appliquant ce résultat à $-f$, on obtient le résultat analogue pour les fonctions de dérivée négative sur I.

❑

D'autres types de fonctions très simples échappent au cadres des théorèmes 45 à 47 comme par exemple la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ mais « pourtant » strictement croissante sur $[0, +\infty[$: pour x et y réels positifs tels que $x < y$,

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x} = \frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)}{(y-x)\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)} = \frac{y-x}{(y-x)\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} > 0.$$

Le théorème qui suit répond à ce problème :

Théorème 48. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est continue sur I, dérivable en tout point intérieur à I, de dérivée strictement positive en tout point intérieur à I, **alors** f est strictement croissante sur I.
Si f est continue sur I, dérivable en tout point intérieur à I, de dérivée strictement négative en tout point intérieur à I, **alors** f est strictement décroissante sur I.

Démonstration . On suppose par exemple que $I = [a, b[$, b réel ou infini, et que f est continue sur $[a, b[$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée strictement positive sur $]a, b[$.

Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$. Puisque c est à l'intérieur à I, $f'(c) > 0$ et donc $f(y) - f(x) > 0$.

❑

Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

6.3 Recherche des extrema locaux d'une fonction à valeurs réelles

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

f admet en x_0 un **maximum local** (égal à $f(x_0)$) si et seulement si $\exists \alpha > 0 / \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.

f admet en x_0 un **minimum local** (égal à $f(x_0)$) si et seulement si $\exists \alpha > 0 / \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.

f admet en x_0 un **extremum local** (égal à $f(x_0)$) si et seulement si f admet en x_0 un minimum local ou un maximum local.

f admet en x_0 un **maximum local strict** (égal à $f(x_0)$) si et seulement si $\exists \alpha > 0 / \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha] \cap I$, $f(x) < f(x_0)$.

f admet en x_0 un **minimum local strict** (égal à $f(x_0)$) si et seulement si $\exists \alpha > 0 / \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha] \cap I$, $f(x) > f(x_0)$.

f admet en x_0 un **extremum local strict** (égal à $f(x_0)$) si et seulement si f admet en x_0 un minimum local strict ou un maximum local strict.

Comme dans les deux paragraphes précédents, il faut d'abord avoir conscience que les deux « théorèmes » : « si f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ » et « si $f'(x_0) = 0$, alors f admet un extremum local en x_0 » **sont faux**.

Pour le premier « théorème », la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ admet un maximum en 1 et pourtant $f'(1) = 2 \neq 0$. Pour le deuxième « théorème », la dérivée de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ s'annule en 0 et pourtant f n'admet pas d'extremum local en 0 car pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_1 \in [0 - \alpha, 0 + \alpha]$ tel que $f(x_1) < 0 = f(0)$ (à savoir $x_1 = -\alpha$ par exemple) et il existe $x_2 \in [0 - \alpha, 0 + \alpha]$ tel que $f(x_2) > 0 = f(0)$ (à savoir $x_2 = \alpha$ par exemple).

On donne maintenant les théorèmes précis associés à chacune des deux situations :

Théorème 49. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f admet un extremum local en un point x_0 **situé à l'intérieur de** I, **alors** $f'(x_0) = 0$.

Démonstration . On suppose que f admet un maximum local en un point x_0 situé à l'intérieur de I.

$]-\infty, x_0[\cap I$ n'est pas vide car x_0 est à l'intérieur de I. Pour $x \in]-\infty, x_0[\cap I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ puis $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Puisque f est dérivable en x_0, quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures, on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$.
De même, pour $x \in]x_0, +\infty[\cap I$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures, on obtient $f'(x_0) \leqslant 0$ et finalement $f'(x_0) = 0$.

❏

Théorème 50. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si la dérivée de f s'annule en un point x_0 situé à l'intérieur de I, **en changeant de signe**, **alors** f admet un extremum local en x_0.

⇨ **Commentaire** . *L'expression « en changeant de signe » a une signification un peu floue. Cette signification est explicitée dans la démonstration qui suit.*

Démonstration . Supposons par exemple qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et que pour $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$, $f'(x) \geqslant 0$ et pour $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, $f'(x) \leqslant 0$. Alors, f est croissante sur $[x_0 - \alpha, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, x_0 + \alpha]$. Donc, f admet un maximum local en x_0.

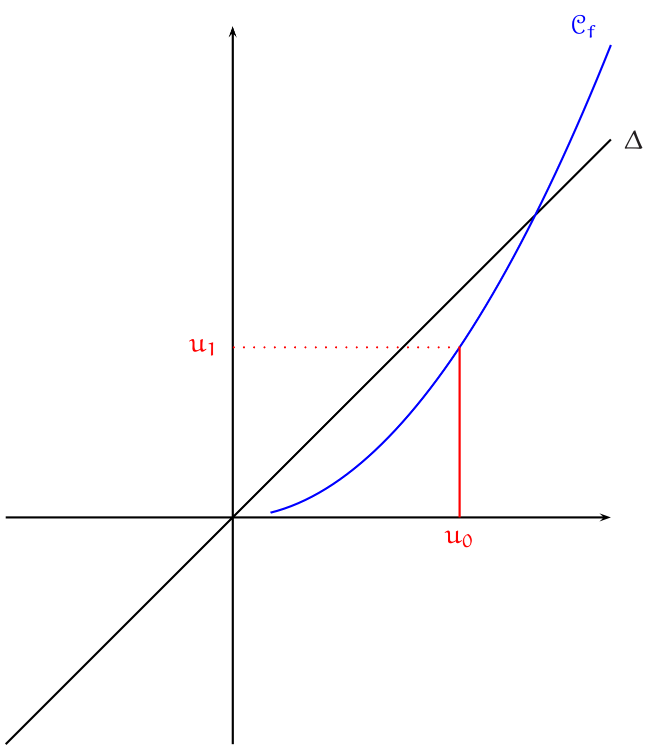
❏

7 Etude des suites définies par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

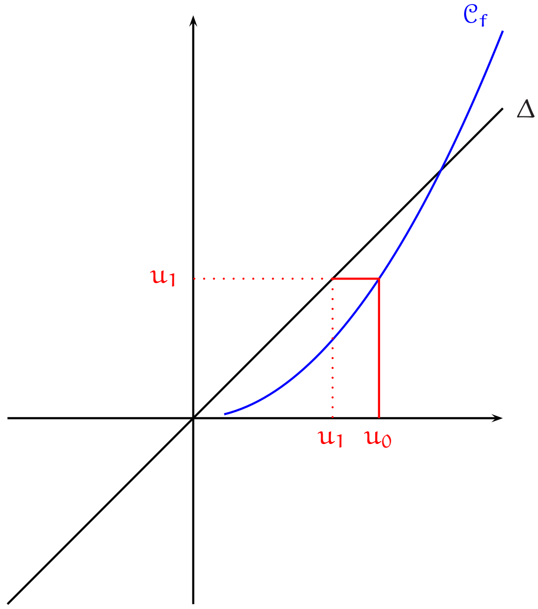
On se donne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on considère la suite u définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On se propose de donner quelques généralités sur l'étude de ces suites.

Représentation graphique.

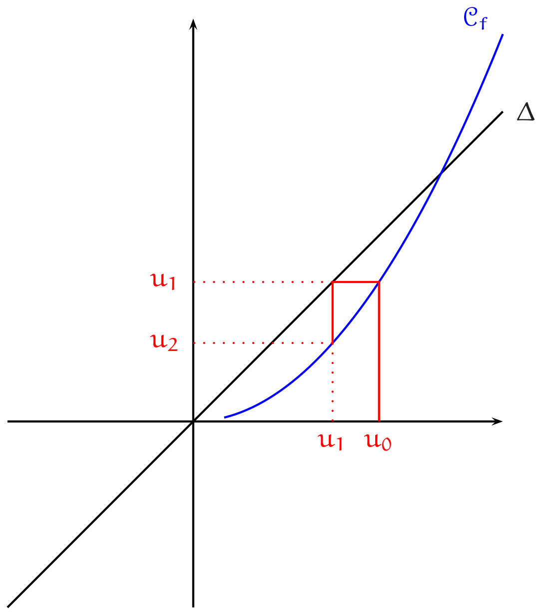
On veut représenter graphiquement la suite (u_n). On commence par construire $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
On place ensuite le nombre u_0 sur l'axe des abscisses. Le nombre $u_1 = f(u_0)$ est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0.



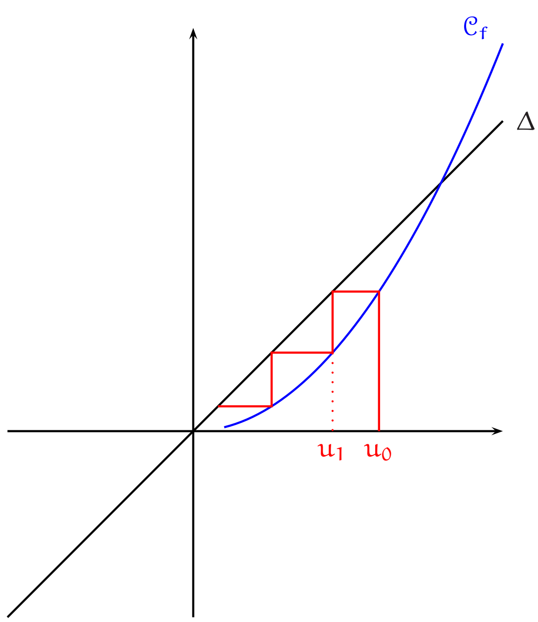
On ramène ensuite le nombre u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$, le point de cette droite d'ordonnée u_1 ayant également u_1 pour abscisse.



On recommence le même processus pour u_2 sans s'obliger à « redescendre » jusqu'à l'axe des abscisses pour u_1.



et ainsi de suite ...



Définition de la suite (u_n)

On se préoccupe maintenant de la définition de la suite (u_n). La fonction f est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, si u_n existe, on peut calculer l'image de u_n par f si u_n appartient à I. Dans ce cas, u_{n+1} existe mais n'est pas nécessairement dans I et si ce n'est pas le cas, le processus s'arrête.
Pour que ceci ne se produise pas, il est essentiel que l'image d'un réel quelconque de I reste un réel de I. Ceci nous amène à poser la définition suivante :

DÉFINITION 8. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I est **stable par** f si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \in I \Rightarrow f(x) \in I)$ ou encore I est **stable par** f si et seulement si $f(I) \subset I$.

On supposera dorénavant que l'intervalle I est stable par f et on prend u_0 dans I. Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.

- u_0 existe et $u_0 \in I$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $u_n \in I$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe (car f est définie sur I) et $u_{n+1} \in I$ (car I est stable par f).

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$. Dans ce cas, la suite (u_n) est définie et de plus, tous les termes de cette suite sont des réels éléments de l'intervalle I.

Sens de variation de la suite (u_n)

On suppose toujours que I est un intervalle stable par f et que $u_0 \in I$. La suite (u_n) est donc définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. On veut étudier les variations de la suite (u_n). Deux types de propriétés de f peuvent intervenir dans cette étude :

- la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = x$ ou encore le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$;
- le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

• Commençons par l'utilisation du signe de $f(x) - x$. Supposons que pour tout x de I, $f(x) > x$. Alors, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$. Dans ce cas, la suite (u_n) est strictement croissante. De même, si pour tout x de I, $f(x) < x$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Ainsi, la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ donne effectivement une information sur le sens de variation de la suite (u_n).

• Analysons maintenant l'influence du sens de variation de la fonction f sur le sens de variation de la suite (u_n).

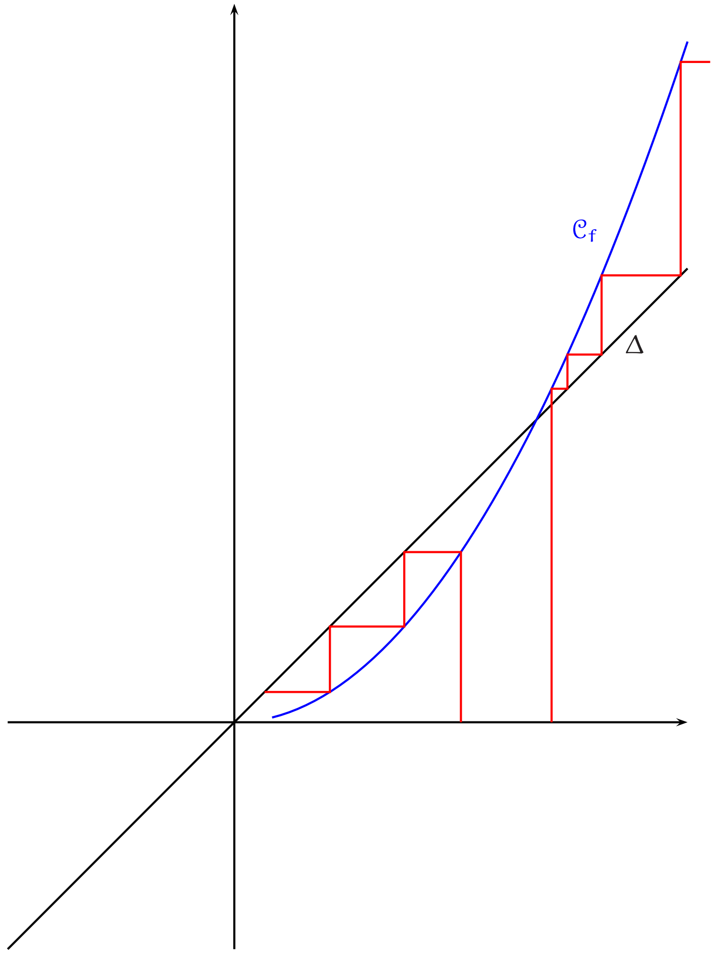
Supposons f croissante sur l'intervalle I. Alors, pour tous réels a et b de I, $\text{sgn}(f(b) - f(a)) = \text{sgn}(b - a)$. Mais alors, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, puisque les réels u_n et u_{n+1} sont des réels de I, on a

$$\text{sgn}\left(u_{n+2} - u_{n+1}\right) = \text{sgn}\left(f\left(u_{n+1}\right) - f\left(u_n\right)\right) = \text{sgn}\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

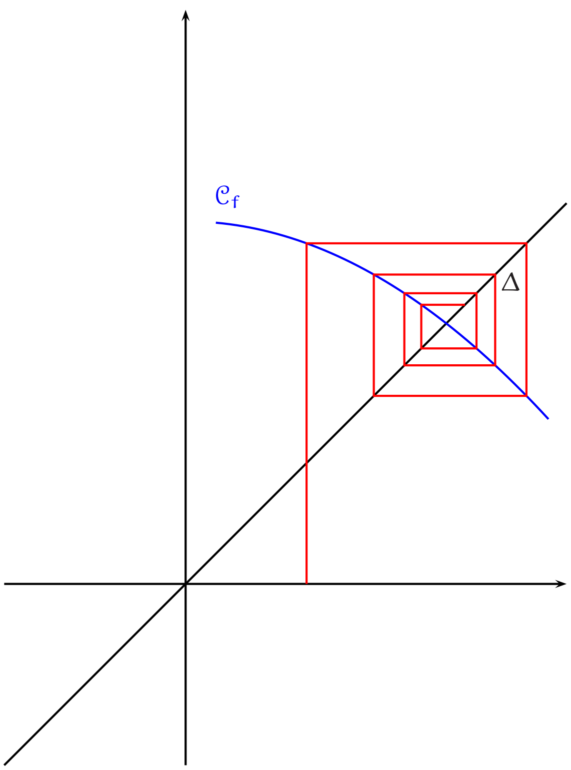
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}\left(u_{n+2} - u_{n+1}\right) = \text{sgn}\left(u_{n+1} - u_n\right)$ ou encore la suite $\left(u_{n+1} - u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant ou enfin la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Si on veut plus de précision, il reste à connaître le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$: si $u_1 \geqslant u_0$, la suite (u_n) est croissante et si $u_1 \leqslant u_0$, la suite (u_n) est décroissante. Dans ce cas, de nouveau, le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ doit être connu.

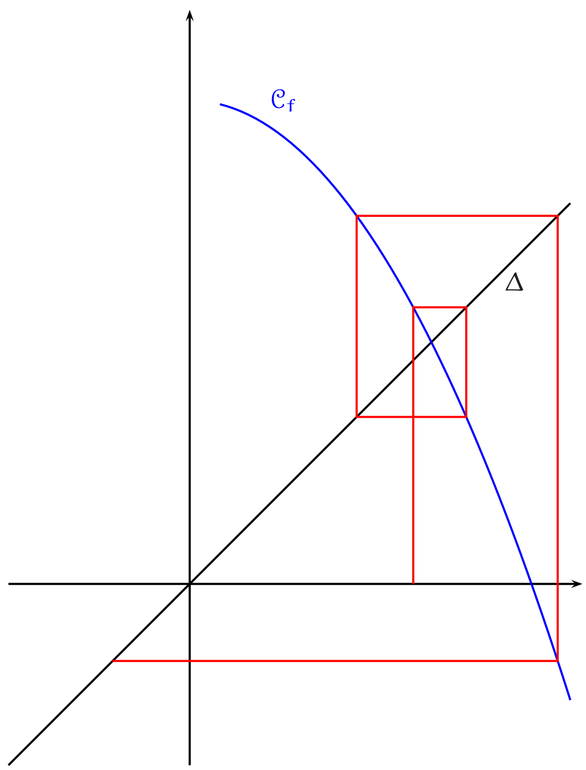
Si la fonction f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone.

Dans le graphique de la page suivante, f est croissante et donc si $f(u_0) \geqslant u_0$, la suite u est croissante et si $f(u_0) \leqslant u_0$, la suite u est décroissante.



Supposons maintenant f décroissante sur I. Puisque $f(I) \subset I$, $f \circ f$ est définie sur I et croissante sur I. Puisque pour tout entier naturel n, $u_{2n+2} = f \circ f\,(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f\,(u_{2n+1})$, les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.





Convergence éventuelle de la suite (u_n)

On suppose maintenant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ **élément de** I et que la fonction f est **continue sur** I. Puisque la fonction f est continue sur I et que $\ell \in I$, f est en particulier continue en ℓ. On en déduit que

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\underbrace{\lim_{n\to+\infty}f\left(u_n\right)=f\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)}_{\text{car f continue en }\ell}=f(\ell).$$

Dans les conditions où l'on s'est placé, la limite éventuelle ℓ est donc un **point fixe** de f. Dans le cadre du programme officiel, ce résultat est le seul résultat de cours qui doit être absolument connu :

Théorème 51. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'intervalle I étant stable par f.
Soit u la suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

Si la suite u converge vers un certain réel ℓ de I, **alors** ℓ est un point fixe de f ou encore $f(\ell)=\ell$.

Nous allons maintenant voir que, si f est une fonction dérivable sur I et admet un point fixe ω, la dérivée de f en ce point a une influence sur la convergence de la suite u vers ω.

On se place dorénavant dans la situation suivante :

- f est dérivable sur I qui est un intervalle stable par f, (I)
- f admet dans I un point fixe ω, (II)
- il existe un réel k tel que $0 \leqslant k < 1$ et pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant k$. (III)

La condition (III) permet d'affirmer que f est k-lipschitzienne (d'après l'inégalité des accroissements finis). Puisque $k \in [0,1[$, on dit alors que f est contractante :

Définition 9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

f est **contractante** si et seulement si $\exists k \in [0,1[/\ \forall(x,y)\in I^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant k|y-x|$.

On va voir maintenant que, puisque f est contractante, le point fixe ω est unique. Soit ω' un réel de I qui est un point fixe de f. Alors

$$|\omega-\omega'|=|f(\omega)-f(\omega')| \leqslant k|\omega-\omega'|$$

et donc, $(1-k)|\omega-\omega'| \leqslant 0$. Puisque $1-k>0$, on en déduit que $|\omega-\omega'| \leqslant 0$ puis que $|\omega-\omega'|=0$ et donc que $\omega=\omega'$. Ceci montre l'unicité du point fixe ω.

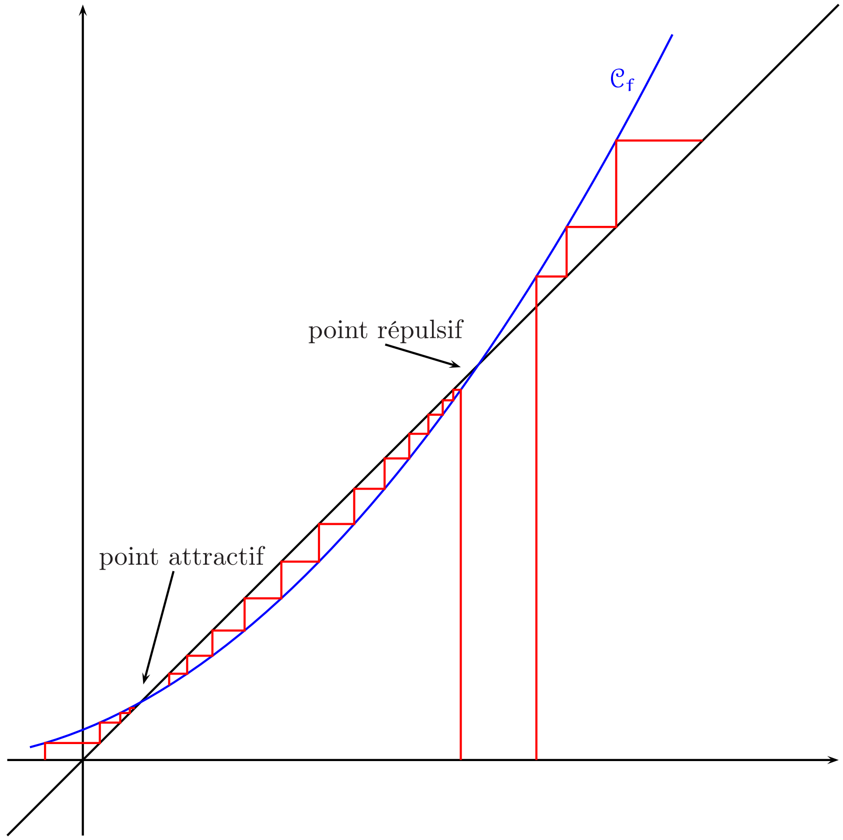
On revient maintenant vers la suite u définie par son premier terme $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$. On va démontrer que la suite u converge vers ω.

Puisque u_0 et que I est stable par f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et u_n est élément de I.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque u_n et ω sont éléments de I et puisque f vérifie les conditions (I) à (III), on en déduit d'après l'inégalité des accroissements finis que

$$\left|u_{n+1}-\omega\right|=\left|f\left(u_n\right)-f(\omega)\right| \leqslant k\left|u_n-\omega\right|.$$

Mais alors, par récurrence, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\omega| \leqslant k^n\left|u_0-\omega\right|$. Puisque $k \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n\left|u_0-\omega\right|=0$ et donc la suite u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\omega$.

Ainsi, les conditions (I), (II) et (III) entrainent la convergence de la suite (u_n) vers ω, quelque soit la valeur du premier terme u_0. On dit alors que ω est un **point attractif**. Au contraire, un point fixe en lequel la valeur absolue de la dérivée est strictement plus grande que 1 est appelé **point répulsif**. On visualise ces deux situations sur les graphique ci-après :



$\mathcal{C}_f$
point répulsif
point attractif