

# Continuité sur un intervalle

## Plan du chapitre

<b>1 Fonctions continues sur un intervalle</b> .....	<b>page 2</b>
1.1 Définitions .....	page 2
1.2 Fonctions continues et opérations .....	page 2
<b>2 Les grands théorèmes</b> .....	<b>page 3</b>
2.1 Le théorème des valeurs intermédiaires .....	page 3
2.1.1 Compléments sur les intervalles de $\mathbb{R}$ .....	page 3
2.1.2 Le théorème des valeurs intermédiaires .....	page 4
2.2 Image continue d'un segment .....	page 6
<b>3 Fonctions uniformément continues sur un intervalle</b> .....	<b>page 6</b>
3.1 Définition et propriétés .....	page 6
3.2 Fonctions lipschitziennes .....	page 9
3.3 Le théorème de HEINE .....	page 11
<b>4 Fonctions continues strictement monotones</b> .....	<b>page 12</b>

La section 3 de ce chapitre est consacrée aux fonctions uniformément continues sur un intervalle. Ce thème ne doit normalement être abordé qu'au deuxième semestre dans le chapitre « Intégration sur un segment ». Néanmoins, par souci d'unité, nous avons incorporé l'uniforme continuité au chapitre « Continuité ». Vous pouvez sauter cette section si vous le désirez.

## 1 Fonctions continues sur un intervalle

### 1.1 Définitions

La définition de la continuité sur un intervalle ou une réunion d'intervalles pose quelques problèmes techniques. On commence par le cas d'un intervalle ouvert.

DÉFINITION 1.

1) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle **ouvert** non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$f$  est **continue** sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en chaque point de  $I$ .

2) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de la forme  $]a, b[$  ( $a$  réel et  $b$  réel ou infini et  $a < b$ ) (resp.  $]a, b]$  ( $b$  réel et  $a$  réel ou infini et  $a < b$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$f$  est **continue** sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en chaque point de  $]a, b[$  et continue à droite en  $a$  (resp. continue à gauche en  $b$ ).

3) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de la forme  $[a, b]$  ( $a$  et  $b$  réels et  $a < b$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$f$  est **continue** sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en chaque point de  $]a, b[$ , continue à droite en  $a$  et continue à gauche en  $b$ .

La continuité de  $f$  sur  $I$  peut s'écrire avec des quantificateurs :

$$f \text{ continue sur } I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon).$$

**Notation.** L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) se note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ) ou aussi  $C^0(I, \mathbb{R})$  (resp.  $C^0(I, \mathbb{C})$ ) ( $C^0$  (fonctions de classe  $C^0$ ) est le début d'une liste :  $C^0, C^1$  (fonctions de classe  $C^1$  déjà définies dans le chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales » pour les intégrations par parties),  $C^2, \dots, C^\infty$ ).

⇒ **Commentaire.** La définition précédente se généralise sans problème à des sous-ensembles  $D$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $D = \mathbb{R}^*$  (qui n'est pas un intervalle) ou  $D = ]0, 1] \cup ]2, +\infty[$ . Ici  $D$  est une réunion de deux intervalles disjoints et  $f$  est continue sur  $D$  si et seulement si  $f$  est continue sur chacun des deux intervalles.

Mais il faut se méfier : si  $D = I_1 \cup I_2$  où  $I_1 = ]0, 1[$  et  $I_2 = ]1, +\infty[$ , la continuité sur  $I_1$  et sur  $I_2$  n'assure pas la continuité  $D$  car une fonction continue sur  $I_1$  et sur  $I_2$  est continue à droite en 1 mais n'est pas nécessairement continue en 1. Par contre, puisque  $D = ]0, +\infty[$ , une fonction est continue sur  $D$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $]0, +\infty[$  et continue à droite en 0.

### 1.2 Fonctions continues et opérations

Les théorèmes du chapitre précédent fournissent immédiatement :

**Théorème 1.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1) Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , la fonction  $\lambda f + \mu g$  est continue sur  $I$ .

2) La fonction  $f \times g$  est continue sur  $I$ .

3) Si de plus la fonction  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $I$ .

En particulier,

**Théorème 2.** Soient  $f$  une fonctions continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $g$  une fonction continue sur un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  telles que  $f(I) \subset J$ .

Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $J$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

On rappelle que les fonctions usuelles sont quasiment toutes continues sur le domaine de définition. Plus précisément,

- les fonctions  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions  $x \mapsto x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sont définies et continues sur  $\mathbb{R}^*$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , sont définies et continues sur  $]0, +\infty[$  ;
- les fonctions  $x \mapsto x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sont définies et continues sur  $]0, +\infty[$  ;

- la fonction  $x \mapsto |x|$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions  $x \mapsto a^x$ ,  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \log_a(x)$ ,  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , sont définies et continues sur  $]0, +\infty[$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$  ;
- la fonction  $x \mapsto \tan(x)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$  et  $x \mapsto \text{Arccos}(x)$  sont définies et continues sur  $[-1, 1]$  ;
- la fonction  $x \mapsto \text{Arctan}(x)$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions  $x \mapsto \text{sh}(x)$ ,  $x \mapsto \text{ch}(x)$  et  $x \mapsto \text{th}(x)$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$ .

En ce qui concerne les fonctions  $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ ,  $x \mapsto \text{Arccos}(x)$  et  $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ , leurs continuité est une conséquence d'un théorème concernant la réciproque d'une bijection qui sera énoncé et démontré à la fin du chapitre.

En ce qui concerne les fonctions  $x \mapsto \text{sh}(x)$ ,  $x \mapsto \text{ch}(x)$  et  $x \mapsto \text{th}(x)$ , leurs continuité est une conséquence des théorèmes 1 et 2 et de la continuité de la fonction exponentielle (la continuité de la fonction exponentielle étant une conséquence de sa dérivabilité).

Sinon, le théorème 1 permet d'énoncer :

### Théorème 3.

- Un polynôme est continu sur  $\mathbb{R}$ .
- Une fraction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

A titre d'exemple d'utilisation de ces « théorèmes généraux », étudions la continuité de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)}{\ln(x^2+1)}$ .

- Pour tout réel  $x$ ,  $1+x^2 \neq 0$  puis  $1 - \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{x^2+1} = \frac{(|x|-1)^2}{x^2+1} \geq 0$  et donc, pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$ .

La fonction  $g_1 : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fraction rationnelle définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[-1, 1]$

et la fonction  $g_2 : y \mapsto \text{Arcsin}(y)$  est continue sur  $[-1, 1]$ . Donc, la fonction  $g = g_2 \circ g_1 : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout réel  $x$ ,  $1+x^2 > 0$ . La fonction  $h_1 : x \mapsto x^2+1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et la fonction  $h_2 : y \mapsto \ln(y)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Donc, la fonction  $h = h_2 \circ h_1 : x \mapsto \ln(x^2+1)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Pour tout réel  $x$ ,  $1+x^2 > 1$  puis  $\ln(x^2+1) > 0$  et en particulier, pour tout réel  $x$ ,  $h(x) \neq 0$ . La fonction  $f = \frac{g}{h}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

## 2 Les grands théorèmes

### 2.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

#### 2.1.1 Compléments sur les intervalles de $\mathbb{R}$

On rappelle les différents types d'intervalles :

- $[a, b]$ ,  $a$  et  $b$  réels tels que  $a \leq b$  (intervalle fermé borné ou segment)
- $[a, b[$ ,  $a$  et  $b$  réels tels que  $a < b$  (intervalle semi-ouvert à droite et borné) et  $]a, b]$ ,  $a$  et  $b$  réels tels que  $a < b$  (intervalle semi-ouvert à gauche et borné)
- $]a, b[$ ,  $a$  et  $b$  réels tels que  $a < b$  (intervalle ouvert et borné)
- $[a, +\infty[$ ,  $a$  réel (intervalle fermé et borné à gauche et non majoré) et  $] - \infty, b]$ ,  $b$  réel (intervalle fermé et borné à droite et non minoré)
- $]a, +\infty[$ ,  $a$  réel (intervalle ouvert et borné à gauche et non majoré) et  $] - \infty, b[$ ,  $b$  réel (intervalle ouvert et borné à droite et non minoré)
- $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ .

On a la caractérisation suivante des intervalles :

**Théorème 4.** Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

$I$  est un intervalle si et seulement si  $\forall (a, b) \in I^2$  ( $a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I$ ).

**DÉMONSTRATION.** Il est clair que tout intervalle vérifie la propriété (\*) :  $\forall (a, b) \in I^2$  ( $a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I$ ).

Réciproquement, soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  vérifiant (\*).

**1er cas.** On suppose que  $I$  est minoré et majoré.  $I$  est donc une partie non vide, majorée et minorée de  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $I$  admet une borne inférieure  $m$  et une borne supérieure  $M$ . Puisque  $m$  et  $M$  sont respectivement un minorant et un majorant de  $I$ , on a  $I \subset [m, M]$ . On va alors vérifier que  $I$  est l'un des quatre intervalles  $]m, M[$ ,  $[m, M[$ ,  $]m, M]$  ou  $[m, M]$ .

**1er sous-cas.** On suppose que  $m \in I$  et  $M \in I$ . On sait déjà que  $I \subset [m, M]$ . Inversement, puisque  $m$  et  $M$  sont deux éléments de  $I$  vérifiant  $m \leq M$  et que  $I$  vérifie (\*), on a  $[m, M] \subset I$ . Finalement,  $I = [m, M]$ .

**2ème sous-cas.** On suppose que  $m \in I$  et  $M \notin I$ . On sait déjà que  $I \subset [m, M]$  et même plus précisément  $I \subset [m, M[$ . Inversement, soit  $x_0 \in [m, M[$ . Puisque  $M = \text{Sup}(I)$ , il existe  $a \in I$  tel que  $x_0 < a < M$ . Puisque  $I$  vérifie (\*), on a  $[m, a] \subset I$  et en particulier  $x_0 \in I$ . Ceci montre que  $[m, M[ \subset I$  et finalement que  $I = [m, M[$ .

**3ème sous-cas.** On suppose que  $m \notin I$  et  $M \in I$ . De manière analogue, on obtient  $I = ]m, M]$ .

**4ème sous-cas.** On suppose que  $m \notin I$  et  $M \notin I$ . On a  $I \subset ]m, M[$ . Inversement, soit  $x_0 \in ]m, M[$ . Il existe  $(a, b) \in I^2$  tel que  $m < a < x_0 < b < M$ . Puisque  $I$  vérifie (\*), on a  $[a, b] \subset I$  et en particulier  $x_0 \in I$ . Ceci montre que  $]m, M[ \subset I$  et finalement que  $I = ]m, M[$ .

**2ème cas.** On suppose que  $I$  est minoré et non majoré.  $I$  est une partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $I$  admet une borne inférieure  $m$ . Puisque  $m$  est un minorant de  $I$  et donc  $I \subset [m, +\infty[$ .

**1er sous-cas.** On suppose que  $m \in I$ . On rappelle que  $I \subset [m, +\infty[$ . Inversement, soit  $x_0 \in [m, +\infty[$ . Puisque  $I$  n'est pas majorée,  $x_0$  n'est pas un majorant de  $I$ . Donc, il existe  $a \in I$  tel que  $a > x_0 \geq m$ . Puisque  $I$  vérifie (\*), on a  $[m, a] \subset I$  et en particulier  $x_0 \in I$ .

Ceci montre que  $[m, +\infty[ \subset I$  et finalement que  $I = [m, +\infty[$ .

**2ème sous-cas.** On suppose que  $m \notin I$ . On a  $I \subset [m, +\infty[$  et même plus précisément  $]m, +\infty[ \subset I$ . Inversement, soit  $x_0 \in ]m, +\infty[$ . Comme précédemment, il existe  $b \in I$  tel que  $b > x_0$  et d'autre part, puisque  $m = \text{Inf}(I)$ , il existe  $a \in I$  tel que  $m < a < x_0$ . Puisque  $I$  vérifie (\*), on a  $[a, b] \subset I$  et en particulier  $x_0 \in I$ . Ceci montre que  $]m, +\infty[ \subset I$  et finalement que  $I = ]m, +\infty[$ .

**3ème cas.** On suppose que  $I$  est non minoré et majoré. De manière analogue, on obtient  $I = ]-\infty, M]$  ou  $I = ]-\infty, M[$  où  $M = \text{Sup}(I)$ .

**4ème cas.** On suppose que  $I$  est non minoré et non majoré. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  n'est ni un minorant, ni un majorant de  $I$ . Par suite, il existe  $(a, b) \in I^2$  tel que  $a < x_0 < b$ . Puisque  $I$  vérifie (\*), on a  $[a, b] \subset I$  et en particulier,  $x_0 \in I$ . Ceci montre que  $I = ]-\infty, +\infty[$ .  $\square$

$\Rightarrow$  **Commentaire.** Si  $I$  est un intervalle et si on pose  $m = \text{Inf}(I)$  et  $M = \text{Sup}(I)$  où  $m$  et  $M$  sont réels ou infinis, alors

$$]m, M[ \subset I \subset [m, M].$$

### 2.1.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 5 (théorème des valeurs intermédiaires).** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

**DÉMONSTRATION.**

**1ère démonstration.** Posons  $J = f(I)$ . On va démontrer que  $\forall [c, d] \in J^2$ ,  $(c \leq d \Rightarrow [c, d] \subset J)$ . Soient donc  $c$  et  $d$  deux éléments de  $J$  tels que  $c \leq d$ . Il existe deux réels  $a$  et  $b$  de  $I$  tels que  $c = f(a)$  et  $d = f(b)$ . Quite à remplacer  $f$  par  $-f$  (qui est continue sur  $I$ ), on peut supposer que  $a \leq b$  ce que l'on fait dorénavant. Puisque  $I$  est intervalle, on a  $[a, b] \subset I$ .

Soit  $\gamma \in [c, d]$ . On va montrer qu'il existe  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) = \gamma$ . Soit  $\mathcal{E} = \{x \in [a, b] / f(x) \leq \gamma\}$ . Puisque  $f(a) = c \leq \gamma$ , on a  $a \in \mathcal{E}$ . D'autre part, pour tout  $x \in \mathcal{E}$ , on a  $x \leq b$ . Ainsi,  $\mathcal{E}$  est une partie non vide et majorée (par  $b$ ) de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{E}$  admet donc une borne supérieure que l'on note  $x_0$ .  $x_0$  est un élément de  $[a, b]$  et donc de  $I$ . On va montrer que  $f(x_0) = \gamma$ .

**1er cas.** Supposons que  $x_0 < b$ . Puisque  $x_0$  est un majorant de  $\mathcal{E}$ , si  $x \in ]x_0, b]$ ,  $x$  n'est pas un élément de  $\mathcal{E}$  et donc  $f(x) > \gamma$ . On fait tendre  $x$  vers  $x_0$  par valeurs supérieures. Par continuité de  $f$  sur  $I$  et donc en  $x_0$ ,  $f(x)$  tend vers  $f(x_0)$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs supérieures et on obtient donc  $f(x_0) \geq \gamma$ .

D'autre part, puisque  $x_0 = \text{Sup}(\mathcal{E})$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $u_n \in \mathcal{E}$  tel que  $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est un élément de  $I$  tel que  $f(u_n) \leq \gamma$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x_0$ . Puisque  $f$  est continue sur  $I$  et en particulier en  $x_0$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f(x_0)$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(u_n) \leq \gamma$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $f(x_0) \leq \gamma$  et finalement  $f(x_0) = \gamma$ .

**2ème cas.** Supposons que  $x_0 = b$ . On a déjà  $\gamma \leq d = f(b) = f(x_0)$ . D'autre part, comme dans le premier cas, on peut construire une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  convergeant vers  $x_0 = b$  et comme précédemment, on obtient  $f(x_0) \leq \gamma$  puis  $f(x_0) = \gamma$ .

Dans tous les cas, on a trouvé un élément  $x_0$  de  $I$  tel que  $f(x_0) = \gamma$ . Ainsi, tout  $\gamma$  de  $[c, d]$  est un élément de  $f(I) = J$  et donc  $[c, d] \subset J$ . On a montré que  $\forall (c, d) \in J^2, (c \leq d \Rightarrow [c, d] \subset J)$  et donc  $J$  est un intervalle.

**2ème démonstration (par dichotomie).** On reprend les mêmes notations que dans la première démonstration : on se donne deux éléments  $c$  et  $d$  de  $J$  tels que  $c \leq d$  puis on note  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $f(a) = c$  et  $f(b) = d$  et on suppose sans perte de généralité que  $a \leq b$ . On se donne enfin  $\gamma \in [c, d]$  et on veut montrer que l'équation  $f(x) = \gamma$  admet une solution dans  $I$ .

Pour  $x \in [a, b]$ , on pose  $g(x) = f(x) - \gamma$  puis on pose  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .  $a_0$  et  $b_0$  sont deux réels de  $I$  tels que  $g(a_0) = f(a) - \gamma = c - \gamma \leq 0$  et  $g(b_0) = f(b) - \gamma = d - \gamma \geq 0$ .

Si  $g\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) \geq 0$ , on pose  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  et si  $g\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$ , on pose  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0$ . Dans les deux cas,  $a_1$  et  $b_1$  sont deux réels de  $I$  tels que  $[a_1, b_1]$  est l'une des deux moitiés de l'intervalle  $[a_0, b_0]$  et  $g(a_1) \leq 0$  et  $g(b_1) \geq 0$ .

Soit  $n \geq 1$ . Supposons avoir construit  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  des réels de  $I$  tels que

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, [a_k, b_k]$  est l'une des deux moitiés de l'intervalle  $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ ,
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g(a_k) \leq 0$  et  $g(b_k) \geq 0$ .

Si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et si  $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ , on pose  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ . Dans les deux cas,  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont deux réels de  $I$  tels que  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  est l'une des deux moitiés de l'intervalle  $[a_n, b_n]$  et  $g(a_{n+1}) \leq 0$  et  $g(b_{n+1}) \geq 0$ .

On a ainsi construit par récurrence deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  telles que

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, [a_n, b_n]$  est l'une des deux moitiés de l'intervalle  $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ ,
- $\forall n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leq 0$  et  $g(b_n) \geq 0$ .

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}]$  est l'une des deux moitiés de l'intervalle  $[a_n, b_n]$ , on a en particulier  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ . Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc respectivement croissantes et décroissantes.

D'autre part, puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}]$  est l'une des deux moitiés de l'intervalle  $[a_n, b_n]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$  puis pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n}$ . On en déduit que la suite  $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc adjacentes et en particulier convergentes, de même limite. Notons  $x_0$  la limite commune de ces deux suites. Puisque  $x_0 \in [a, b]$ ,  $x_0$  est un élément de  $I$ . Puisque  $g$  est continue sur  $I$  et en particulier en  $x_0$ , les suites  $(g(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $g(x_0)$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}, g(a_n) \leq 0$  et  $g(b_n) \geq 0$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $g(x_0) \leq 0$  et  $g(x_0) \geq 0$ . Finalement,  $g(x_0) = 0$  ou encore  $f(x_0) = \gamma$  ce qui achève la démonstration. □

## ⇒ Commentaire .

◇ *Le théorème des valeurs intermédiaires se résume parfois en la phrase : « l'image continue d'un intervalle est un intervalle ».*

◇ *Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et si on pose  $m = \text{Inf}(f(I))$  et  $M = \text{Sup}(f(I))$  où  $m$  et  $M$  sont réels ou infinis, alors*

$$]m, M[ \subset f(I) \subset [m, M].$$

Le théorème des valeurs intermédiaires a un certain nombre de corollaires intéressants :

**Théorème 6.** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

S'il existe deux réels  $a$  et  $b$  de  $I$  tels que  $f(a)f(b) \leq 0$ , alors  $f$  s'annule au moins une fois dans  $I$ .

**DÉMONSTRATION .**  $f(I)$  est un intervalle et donc contient toute valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Puisque  $f(a)f(b) \leq 0$ , 0 est une valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  et il existe  $x$  compris entre  $a$  et  $b$  et donc dans  $I$  tel que  $f(x) = 0$ . □

**Théorème 7.** Un polynôme de degré impair à coefficients réels s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .

**DÉMONSTRATION .** Puisque  $f$  est un polynôme de degré impair, ou bien  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , ou bien

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Dans tous les cas,  $\text{Inf}(f(\mathbb{R})) = -\infty$  et  $\text{Sup}(f(\mathbb{R})) = +\infty$ . Puisque  $f$  est un polynôme,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et donc  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  ou encore

$$f(\mathbb{R}) = ]\text{Inf}(f(\mathbb{R})), \text{Sup}(f(\mathbb{R}))[- = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}.$$

En particulier,  $0 \in f(\mathbb{R})$  et donc il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ . □

**Exercice 1.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une application de  $[a, b]$  dans lui-même, continue sur  $[a, b]$ .

Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .

**Solution 1.** Pour  $x \in [a, b]$ , posons  $g(x) = f(x) - x$ .

- $g$  est continue sur  $[a, b]$  car  $f$  l'est.
- $g(a) = f(a) - a \geq 0$  (car  $f(a) \in [a, b]$ ) et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel  $x_0$  de  $[a, b]$  tel que  $g(x_0) = 0$  ou encore tel que  $f(x_0) = x_0$ .

## 2.2 Image continue d'un segment

**Théorème 8.** Soit  $f$  une fonction définie est continue sur un **segment**  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Alors,  $f([a, b])$  est un segment de  $\mathbb{R}$ .

**DÉMONSTRATION.** D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f([a, b])$  est un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Montrons que  $I$  est borné. Supposons par l'absurde  $I$  non majoré. Alors, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $v_n \in I$  tel que  $v_n \geq n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $u_n \in [a, b]$  tel que  $f(u_n) = v_n$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(u_n) \geq n$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = +\infty$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $[a, b]$  et en particulier, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle bornée. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers un certain réel  $x_0$ .

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$ , par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $a \leq x_0 \leq b$ . Puisque  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f$  est continue en  $x_0$ .

Puisque la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x_0$  et que  $f$  est continue en  $x_0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_{\varphi(n)}) = f(x_0)$ . Ceci contredit le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = +\infty$ . Il était donc absurde de supposer  $I$  non majoré.

On montre de manière analogue que  $I$  est minoré.

- $I$  est donc un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Posons  $m = \text{Inf}(I)$  et  $M = \text{Sup}(I)$ .  $m$  et  $M$  sont deux réels tels que

$$]m, M[ \subset I \subset [m, M].$$

Montrons que la borne supérieure  $M$  de  $f$  sur  $I$  est atteinte. Puisque  $M = \text{Sup}\{f(x), x \in [a, b]\}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $v_n \in I$  tel que  $M - \frac{1}{n} < v_n < M$ . D'après le théorème des gendarmes, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $M$ .

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $u_n \in [a, b]$  tel que  $f(u_n) = v_n$ . De nouveau, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'éléments de  $[a, b]$  et d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergeant vers un certain réel  $x_0$  de  $[a, b]$ . Puisque  $f$  est continue en  $x_0$ , la suite  $(f(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f(x_0)$ . D'autre part, la suite  $(f(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est extraite de la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $M$ . On en déduit que la suite  $(f(u_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge aussi vers  $M$  et donc que  $f(x_0) = M$ . On a montré que  $M$  est une valeur atteinte par  $f$ .

On montre de même que  $f$  atteint sa borne inférieure  $m$  et finalement  $f([a, b]) = [m, M]$ . On a montré que l'image du segment  $[a, b]$  par la fonction continue  $f$  est un segment de  $\mathbb{R}$ . □

⇒ **Commentaire.** Le théorème 8 se réénonce parfois sous la forme « l'image continue d'un segment est un segment » ou sous la forme « si  $f$  est une fonction continue sur un segment,  $f$  est bornée et atteint ses bornes », cette dernière phrase signifiant que  $f$  admet un minimum et un maximum.

## 3 Fonctions uniformément continues sur un intervalle

### 3.1 Définition et propriétés

Donnons d'abord la définition avec quantificateurs de la continuité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  :

$$f \text{ est continue sur } I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon).$$

Cette définition traduit la continuité de  $f$  en chaque  $x_0$  de  $I$  (éventuellement continuité à droite ou à gauche en une éventuelle borne de  $I$  comprise). Dans cette définition, le réel  $\alpha$  est fonction de  $\varepsilon$  mais aussi de  $x_0$  et ce réel  $\alpha$  peut changer quand  $x_0$  change.

On donne maintenant la définition de l'uniforme continuité de  $f$  sur  $I$  :

**DÉFINITION 2.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$f$  est **uniformément continue** sur  $I$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Dans cette définition le réel  $\alpha$  ne dépend pas de  $x$ . Une fonction uniformément continue sur  $I$  est continue « de la même façon » en chaque point  $x$  de  $I$ . En particulier,

**Théorème 9.** Si  $f$  est uniformément continue sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**DÉMONSTRATION .**

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, \forall y \in I, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon) \Rightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall y \in I, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$   $\square$

La réciproque est fautive. L'exercice suivant fournit un premier exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue.

**Exercice 2.**

1) Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^2$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .

2) Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Solution 2.**

1) Montrons que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon).$

Soit  $(x, y) \in I^2$ .  $|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|$ . Soit alors  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ . Si  $|x - y| \leq \alpha$ , alors

$$|x^2 - y^2| \leq 2|x - y| \leq 2\alpha = 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon)$ . Donc,  $f$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .

2) Montrons que :  $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0 / \exists (x_0, y_0) \in [0, +\infty[^2, (|x_0 - y_0| \leq \alpha \text{ et } |x_0^2 - y_0^2| > \varepsilon).$

Soit  $\varepsilon = 1$ . Soit  $\alpha > 0$ . Soient  $x \in [0, +\infty[$  puis  $y = x + \alpha$ . On a déjà  $y \in [0, +\infty[$  et  $|x - y| \leq \alpha$ . D'autre part,

$$|x^2 - y^2| = (x + \alpha)^2 - x^2 = 2\alpha x + \alpha^2.$$

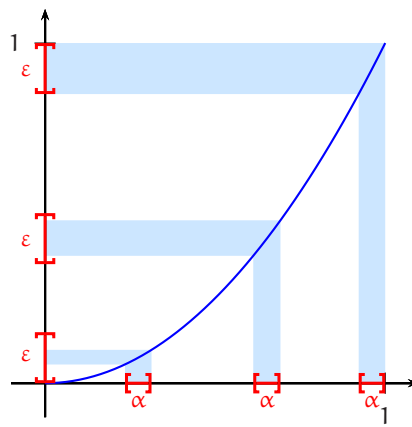
On choisit  $x_0 = \frac{1}{2\alpha}$  (et donc  $y_0 = \frac{1}{2\alpha} + \alpha$ ).  $x_0$  et  $y_0$  sont deux réels positifs tels que  $|x_0 - y_0| \leq \alpha$  et

$$|x_0^2 - y_0^2| = 1 + \alpha^2 > 1 = \varepsilon.$$

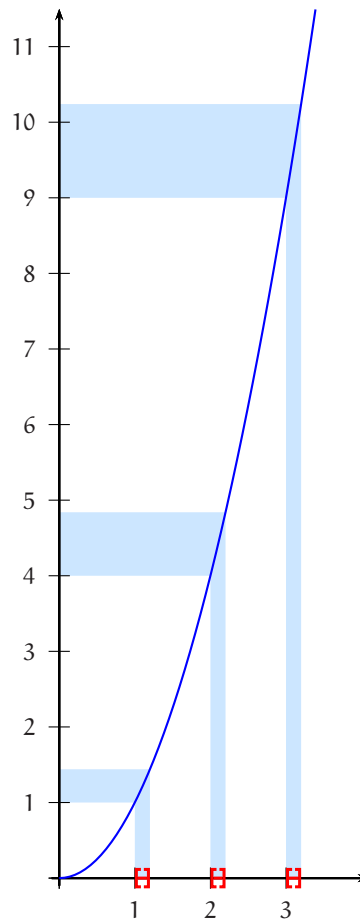
On a montré que  $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0 / \exists (x_0, y_0) \in [0, +\infty[^2, (|x_0 - y_0| \leq \alpha \text{ et } |x_0^2 - y_0^2| > \varepsilon)$ . Donc,  $f$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

---

$\Rightarrow$  **Commentaire.** *L'uniforme continuité de la fonction  $x \mapsto x^2$  sur  $[0, 1]$  peut se visualiser. On se donne une « longueur mobile »  $\varepsilon > 0$  sur l'axe  $(Oy)$  et on fournit une longueur  $\alpha > 0$  sur l'axe  $(Ox)$  telle que quand  $x$  et  $y$  sont dans un segment de longueur  $\alpha$  contenu dans  $[0, 1]$ , alors  $x^2$  et  $y^2$  sont dans un segment de longueur  $\varepsilon$ . La courbe étant plus pentue du côté de 1 qu'ailleurs, c'est les valeurs proches de 1 de la variable qui commandent le choix de  $\alpha$ .*



Le fait que la fonction  $x \mapsto x^2$  ne soit pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$  (bien que continue sur  $[0, +\infty[$ ) est moins facile à appréhender. Si  $x$  et  $y$  sont deux réels distants de  $\alpha$  (ou encore si  $y = x + \alpha$ ) l'écart entre les carrés de ces nombres à savoir  $(x + \alpha)^2 - x^2 = 2\alpha x + \alpha^2$  n'est pas borné quand  $x$  décrit  $[0, +\infty[$  et donc ne peut être choisi uniformément sur la totalité de la demi-droite  $[Ox)$  de manière à ce que l'écart entre  $x^2$  et  $(x + \alpha)^2$  soit uniformément inférieur à  $\varepsilon$ .



**Exercice 3.** Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .

**Solution 3.** Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $[0, 1]$  tels que  $x \leq y$ .

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x \times y} + y \leq x - 2\sqrt{x \times x} + y = y - x.$$

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , on obtient pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ ,  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |x - y|$  puis  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ .

Soit alors  $\alpha = \varepsilon^2$ .  $\alpha$  est un réel strictement positif tel que, pour  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , si  $|x - y| \leq \alpha$ , alors

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{\alpha} = \varepsilon.$$

On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon)$ . Donc, la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .



---

Le théorème suivant est un outil efficace pour prouver qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

**Théorème 10.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si il existe deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  telles que  $x_n - y_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et  $f(x_n) - f(y_n)$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f$  n'est pas uniformément continue sur  $I$ .

**DÉMONSTRATION.** Montrons la contraposée ou encore montrons que si  $f$  est uniformément continue sur  $I$ , alors pour toutes suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  telles que  $x_n - y_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $f(x_n) - f(y_n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soient donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'éléments de  $I$  telles que  $x_n - y_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que, pour  $(x, y) \in I^2$ ,  $|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ . Puisque la suite  $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, il existe un rang  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|x_n - y_n| \leq \alpha$ . Mais alors pour  $n \geq n_0$ , on a  $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$ .

On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon)$ . Donc,  $f(x_n) - f(y_n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . □

**Exercice 4.**

- 1) Montrer que la fonction  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .
- 2) Montrer que la fonction  $x \mapsto \sin(x^2)$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Solution 4.**

1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $x_n = n$  et  $y_n = n + \frac{1}{n}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n$  et  $y_n$  sont des réels positifs et de plus, la suite  $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0. Mais

$$|x_n^2 - y_n^2| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2}$$

ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc la fonction  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$  et  $y_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n$  et  $y_n$  sont des réels positifs et de plus, la suite  $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0 car

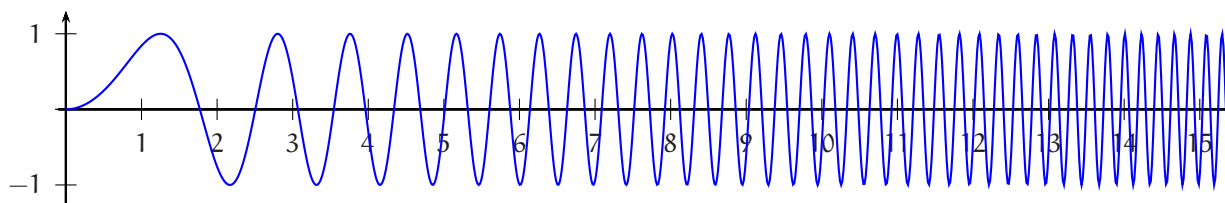
$$|x_n - y_n| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}$$

Mais

$$|\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2)| = |1 - (-1)| = 2$$

et donc  $|\sin(x_n^2) - \sin(y_n^2)|$  ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Donc, la fonction  $x \mapsto \sin(x^2)$  n'est pas uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

Voici le graphe sur  $\mathbb{R}^+$  de la fonction  $x \mapsto \sin(x^2)$  qui est continue sur  $[0, +\infty[$  mais non uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .



## 3.2 Fonctions lipschitziennes

**DÉFINITION 3.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$f$  est **lipschitzienne** sur  $I$  si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Si  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ , on dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. Le nombre  $k$  n'est pas unique car si  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  alors par exemple,  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq (k + 1)|x - y|$ .

Un résultat immédiat est

**Théorème 11.**  $f$  est lipschitzienne sur  $I \Leftrightarrow \text{Sup} \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, (x, y) \in I^2, x \neq y \right\} < +\infty$ .

**Exercice 5.**

1) Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$ .

2) Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .

**Solution 5.**

1) Soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $[1, +\infty[$ .

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}|x - y|.$$

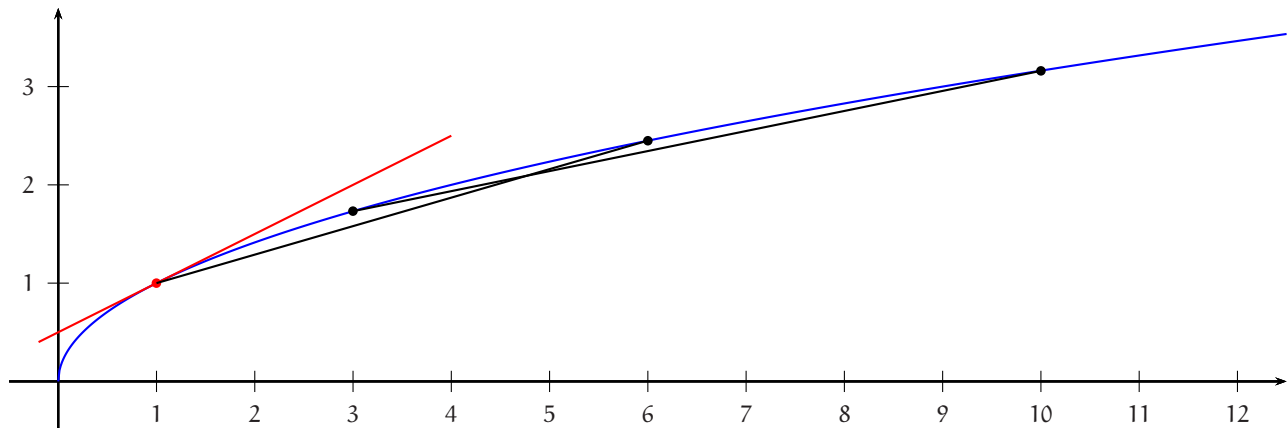
Donc, la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$ .

2) Soit  $M = \text{Sup} \left\{ \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right|, (x, y) \in [0, 1]^2, x \neq y \right\}$ .  $M$  est un élément de  $[0, +\infty[$ .

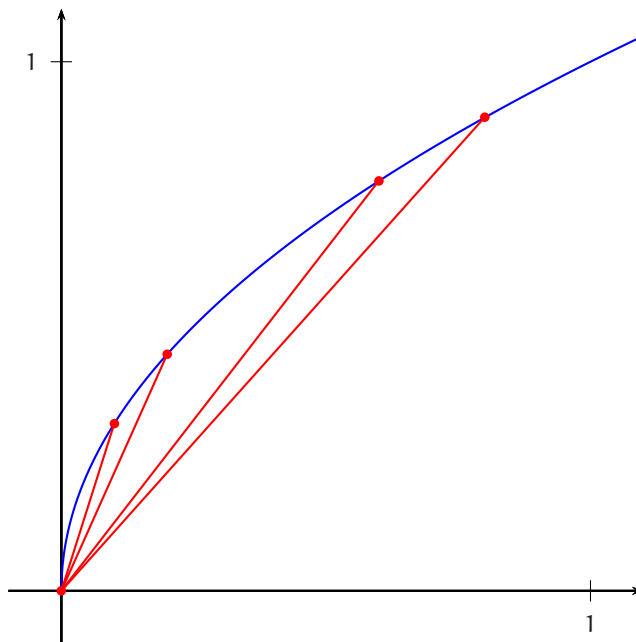
Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $M \geq \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} \right| = \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient  $M \geq +\infty$ . Finalement,

$\text{Sup} \left\{ \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right|, (x, y) \in [0, 1]^2, x \neq y \right\} = +\infty$  et donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .

$\Rightarrow$  **Commentaire.** Une fonction lipschitzienne à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une fonction dont les valeurs absolues des pentes des cordes de son graphe constituent un ensemble majoré. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$  : les pentes des cordes à son graphe sont positives et inférieures ou égales à  $\frac{1}{2}$  qui est la pente de la tangente à son graphe en son point d'abscisse 1.



La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas lipschitzienne sur  $[0, 1]$  car l'ensemble des pentes des cordes de son graphe n'est pas majoré.



**Théorème 12.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $I$  (et en particulier continue sur  $I$ ).

**DÉMONSTRATION.** Supposons  $f$  lipschitzienne sur  $I$ . Il existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall (x, y) \in I^2$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ . Quite à remplacer  $k$  par  $k + 1$ , on peut supposer  $k > 0$  ce que l'on fait.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$ . Soient  $x$  et  $y$  deux réels de  $I$  tels que  $|x - y| \leq \alpha$ . Alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$   $\forall (x, y) \in I^2$ ,  $(|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$ . Donc,  $f$  est uniformément continue sur  $I$ . □

Par exemple, on a vu que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$ . La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est donc uniformément continue sur  $[1, +\infty[$ .

Citons aussi l'exemple de la fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ . Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$ ,

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} - e^{i\theta'}| &= \left| e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \right| \left| e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right| = 2 \left| \sin \left( \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\theta - \theta'}{2} \right| = |\theta - \theta'|. \end{aligned}$$

La fonction  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  et donc uniformément continue puis continue sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.3 Le théorème de HEINE

**Théorème 13 (théorème de HEINE).** Soit  $f$  une fonction définie sur un segment  $[a, b]$  ( $a < b$ ) de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Supposons par l'absurde  $f$  non uniformément continue sur  $[a, b]$ . Donc,  $\exists \varepsilon > 0$   $\forall \alpha > 0$ ,  $\exists (x, y) \in [a, b]^2$  ( $|x - y| \leq \alpha$  et  $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ ).  $\varepsilon$  est ainsi dorénavant fixé.

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe donc  $(x_n, y_n) \in [0, 1]^2$   $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1}$  et  $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ .

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle bornée. On peut en extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers un certain élément  $x$  de  $[a, b]$ . La suite  $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée en tant que suite extraite d'une suite bornée. On peut en extraire une sous-suite  $(y_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

convergeant vers un certain élément  $y$  de  $[a, b]$ . La suite  $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de la suite  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et reste donc convergente de limite  $x$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq \frac{1}{\psi(n) + 1}$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $|x - y| \leq 0$  et donc  $x = y$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et en particulier, la fonction  $f$  est continue en  $x$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\psi(n)}) = f(x)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)}) = f(y)$ . Ensuite, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)})| > \varepsilon$  ce qui fournit par passage à la limite  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon > 0$ . En résumé,  $x = y$  et  $|f(x) - f(y)| > 0$ . Ceci est une contradiction et donc  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . □

### Exercice 6.

- 1) Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .
- 2) Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[1, +\infty[$ .
- 2) Montrer que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

### Solution 6.

- 1) La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc uniformément continue sur  $[0, 1]$  d'après le théorème de HEINE.
- 2) Pour tout  $(x, y) \in [1, +\infty[$ ,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$  et donc uniformément continue sur  $[1, +\infty[$ .

- 3) Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\alpha_1 > 0$  tel que pour tout  $(x, y)$  de  $[0, 1]$ ,  $|x - y| \leq \alpha_1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et il existe  $\alpha_2 > 0$  tel que pour tout  $(x, y)$  de  $[1, +\infty[$ ,  $|x - y| \leq \alpha_2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$ . Soit  $(x, y) \in [0, +\infty[$ .

- Si  $(x, y) \in [0, 1]^2$ ,

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |x - y| \leq \alpha_1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon.$$

- Si  $(x, y) \in [1, +\infty[$ ,

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |x - y| \leq \alpha_2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon.$$

- Si par exemple  $0 \leq x \leq 1 \leq y$ , puisque  $|x - y| = y - x = (y - 1) + (1 - x) = |y - 1| + |x - 1|$ , si  $|x - y| \leq \alpha$ , alors  $|x - 1| \leq |x - y| \leq \alpha \leq \alpha_1$  et  $|y - 1| \leq |x - y| \leq \alpha \leq \alpha_2$  puis

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{y} - \sqrt{1}| + |\sqrt{1} - \sqrt{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout  $(x, y) \in [0, +\infty[$ , si  $|x - y| \leq \alpha$ , alors  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$ .

On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, +\infty[$ ,  $(|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon)$ . Donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .

## 4 Fonctions continues strictement monotones

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Rappelons les principaux résultats déjà énoncés et démontrés.

- si  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , alors  $f$  est injective.
- si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

Si on cumule ces deux résultats, on obtient : si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$ , alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  qui est un intervalle. On rappelle alors que

- si  $f$  est bijective de  $I$  sur  $J$  et strictement monotone sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $J$ , de même sens de variation que  $f$ .

Vérifions que l'intervalle  $J$  est de même nature que l'intervalle  $I$  (ouvert, semi-ouvert, fermé). On suppose que  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$ .

**1er cas.** On suppose que  $I$  est un segment  $[a, b]$  ( $a$  et  $b$  réels tels que  $a \leq b$ ). On sait déjà que  $f(I) = \left[ \underset{x \in I}{\text{Minf}}(x), \underset{x \in I}{\text{Maxf}}(x) \right]$ . Puisque  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , on a  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$  si  $f$  est croissante sur  $I$  et  $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$  si  $f$  est décroissante sur  $I$ . Dans ce cas,  $J$  est un intervalle de même nature que  $I$ .

**2ème cas.** On suppose que  $I$  est un intervalle semi-ouvert  $[a, b[$  ( $a$  réel et  $b$  réel ou infini tels que  $a < b$ ). Supposons de plus  $f$  continue et strictement croissante sur  $[a, b[$ . On sait que  $\forall x \in [a, b[, f(a) \leq f(x) < \lim_{t \rightarrow b} f(t)$ . Plus précisément, on sait que  $f(a) = \underset{I}{\text{Minf}}$  et que  $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = \underset{I}{\text{Supf}}$ . Donc  $f([a, b[) = \left[ \underset{I}{\text{Minf}}, \underset{I}{\text{Supf}} \right[ = \left[ f(a), \lim_{t \rightarrow b} f(t) \right[$ . De même, si  $f$  est strictement décroissante sur  $[a, b[$ ,  $f([a, b[) = \left] \lim_{t \rightarrow b} f(t), f(a) \right]$  et aussi  $f(]a, b[) = \left] \lim_{t \rightarrow a} f(t), f(b) \right]$  si  $f$  est strictement croissante et  $f(]a, b[) = \left[ f(b), \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right[$  si  $f$  est strictement décroissante.

**3ème cas.** On suppose que  $I$  est un intervalle ouvert  $]a, b[$  ( $a$  et  $b$  réels ou infinis tels que  $a < b$ ). Supposons de plus  $f$  continue et strictement croissante sur  $]a, b[$ . On sait que  $\forall x \in ]a, b[, \lim_{t \rightarrow a} f(t) < f(x) < \lim_{t \rightarrow b} f(t)$ . Plus précisément, on sait que  $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \underset{I}{\text{Inff}}$  et que  $\lim_{t \rightarrow b} f(t) = \underset{I}{\text{Supf}}$ . Donc  $f(]a, b[) = \left] \underset{I}{\text{Inff}}, \underset{I}{\text{Supf}} \right[ = \left] \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow b} f(t) \right[$ . De même, si  $f$  est strictement décroissante sur  $]a, b[$ ,  $f(]a, b[) = \left] \lim_{t \rightarrow b} f(t), \lim_{t \rightarrow a} f(t) \right[$ .

On a montré :

**Théorème 14.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  qui est alors un intervalle de même nature que  $I$  (ouvert, semi-ouvert, fermé).

On va maintenant établir que la réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ . On a besoin du lemme suivant :

**Théorème 15.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , strictement monotone sur  $I$ .

$f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f(I)$  est un intervalle.

**DÉMONSTRATION.** On sait déjà que si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

Réciproquement, supposons que  $f(I)$  soit un intervalle que l'on note  $J$ . Quite à remplacer  $f$  par  $-f$  (qui est aussi strictement monotone sur  $I$ ), on supposera que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Soit  $x_0$  un élément de  $I$  qui n'est pas une borne de  $I$ . Montrons que  $f$  est continue en  $x_0$ . Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , on sait que  $f$  admet en  $x_0$  des limites à gauche et à droite que l'on note  $f(x_0^-)$  et  $f(x_0^+)$  respectivement ( $f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  et

$f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ) et que  $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ .

Supposons par l'absurde  $f$  non continue en  $x_0$ . Alors, par exemple,  $f(x_0^-) < f(x_0)$  de sorte que l'intervalle  $]f(x_0^-), f(x_0)[$  n'est pas vide. On sait que pour  $x \in I \cap ]-\infty, x_0[$ ,  $f(x) \leq f(x_0^-)$  et que pour  $x \in I \cap ]x_0, +\infty[$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ . Ainsi,  $f(I) \cap ]-\infty, f(x_0^-)[ \neq \emptyset$  et  $f(I) \cap ]f(x_0), +\infty[ \neq \emptyset$  mais  $f(I) \cap ]f(x_0^-), f(x_0)[ = \emptyset$  ce qui contredit le fait que  $f(I)$  est un intervalle. □

On peut maintenant établir :

**Théorème 16.** Soit  $f$  une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

( $f$  réalise une bijection (encore notée  $f$ ) de  $I$  sur  $J = f(I)$  qui est un intervalle de même nature que  $I$  et) la réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est continue sur  $J$ .

**DÉMONSTRATION.**  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $J$  et  $f^{-1}(J) = I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème 15,  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ . □

⇒ **Commentaire.** La continuité de la réciproque n'a rien d'anecdotique. En deuxième année, on s'intéressera à la continuité d'une application dans une situation beaucoup plus générale que le cadre des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La réciproque d'une bijection ne sera alors pas automatiquement continue.

On peut citer aujourd'hui un exemple de bijection dont la réciproque n'est pas continue. Soit  $f : \begin{matrix} [0, 2\pi[ & \rightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{matrix}$ .  $f$  est une bijection, continue sur  $[0, 2\pi[$  car ses parties réelles et imaginaires le sont. La réciproque de  $f$  est  $f^{-1} : \begin{matrix} \mathbb{U} & \rightarrow & [0, 2\pi[ \\ z & \mapsto & \text{Arg}(z) \end{matrix}$  où  $\text{Arg}(z)$  est l'argument de  $z$  qui appartient à  $[0, 2\pi[$ . Maintenant,  $f^{-1}$  n'est pas continue en 1 car  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \mathbb{U}, \text{Im}(z) < 0}} f^{-1}(z) = 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1)$ .

On termine par un résultat plus fin que le résultat : « si  $f$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective ».

**Théorème 17.** Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $f$  est injective, alors  $f$  est strictement monotone.

**DÉMONSTRATION.** On montre la contraposée : si  $f$  n'est pas strictement monotone sur  $I$ , alors  $f$  n'est pas injective sur  $I$ .

Supposons  $f$  non strictement monotone sur  $I$ . Il existe donc trois réels  $x_1, x_2$  et  $x_3$  de  $I$  tels que  $x_1 < x_2 < x_3$  et ou bien  $f(x_1) \leq f(x_2)$  et  $f(x_3) \leq f(x_2)$ , ou bien  $f(x_1) \geq f(x_2)$  et  $f(x_3) \geq f(x_2)$ . Quite à remplacer  $f$  par  $-f$  (qui est continue et non strictement monotone sur  $I$ ), on peut supposer que  $f(x_1) \leq f(x_2)$  et  $f(x_3) \leq f(x_2)$ .

Si  $f(x_1) = f(x_2)$  ou  $f(x_3) = f(x_2)$ ,  $f$  n'est pas injective et c'est fini. Supposons maintenant que  $f(x_1) < f(x_2)$  et  $f(x_3) < f(x_2)$ . Soit  $\gamma$  un réel de l'intervalle  $] \text{Max}\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2)[$  (qui n'est pas vide). Puisque  $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$  et  $f$  est continue sur  $[x_1, x_2]$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\alpha \in ]x_1, x_2[$  tel que  $f(\alpha) = \gamma$ . De même, il existe  $\beta \in ]x_2, x_3[$  tel que  $f(\beta) = \gamma$ .

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels distincts et éléments de  $I$  tels que  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Donc,  $f$  n'est pas injective.

Par contraposition, si  $f$  est injective et continue sur  $I$ , alors  $f$  est strictement monotone sur  $I$ . □