L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Plan du chapitre

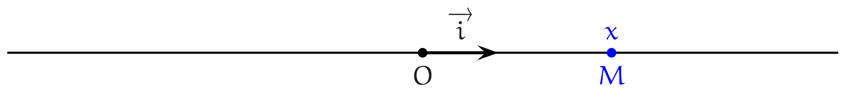
1 L'ensemble des nombres réels

1.1 Description géométrique des réels

Aucune construction de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ n'est au programme des classes préparatoires. On se contente donc d'une vision géométrique intuitive (et suffisante) de ces nombres. On représente traditionnellement l'ensemble des nombres réels par une droite appelée **droite numérique**. Cette droite est munie d'une origine O et d'un vecteur $\overrightarrow{i}$.

- A tout point M de cette droite correspond un unique nombre (réel) x tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i}$.
- A tout nombre (réel) x correspond un point M de cette droite tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i}$.

Ainsi, un nombre réel « est » un point sur une droite. Les nombres à droite de O (les nombres positifs) permettent de mesurer n'importe quelle longueur.



L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ telles que

Théorème 1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

On a déjà expliqué qu'ils existe différents types de nombres réels. Redécrivons les différents ensembles de nombres.

- L'ensemble des entiers naturel $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$. Ce sont les nombres de la forme $\dfrac{n}{10^p}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Ce sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{b}$ où $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On a

$$\mathbb{N} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Z} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{D} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}.$$

1.2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total, la relation d'ordre usuelle $\leqslant$, définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+).$$

Cette relation d'ordre est **compatible** avec l'addition des réels et la multiplication par un réel positif :

- $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c)$.
- $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $(a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc)$.

En effet, si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$, alors

- pour tout réel c, $(b + c) - (a + c) = b - a \geqslant 0$ et donc $a + c \leqslant b + c$
- pour tout réel c positif, $bc - ac = (b - a)c \geqslant 0$ et donc $ac \leqslant bc$.

On dit alors que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif totalement ordonné** (phrase qui signifie entre autres que $\leqslant$ est compatible avec l'addition et la multiplication par un réel positif).

De ces règles de base, on en déduit des règles plus générales :

Théorème 2. On peut additionner membre à membre des inégalités :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ ((a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d).$$

On peut multiplier membre à membre des inégalités entre réels positifs :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ ((0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d) \Rightarrow ac \leqslant bd).$$

Démonstration .

- On déduit le résultat de la compatibilité avec l'addition. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ et si $c \leqslant d$, alors $b + c \leqslant b + d$. Par transitivité, $a + c \leqslant b + d$.
On peut aussi démontrer le résultat directement : $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c) \geqslant 0$ et donc $a + c \leqslant b + d$.

• On déduit le résultat de la compatibilité avec la multiplication par un réel positif. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bc$ et $bc \leqslant bd$. Par transitivité, $ac \leqslant bd$.
On peut aussi démontrer le résultat directement : $bd - ac = bd - bc + bc - ac = b(d - c) + c(b - a) \geqslant 0$ et donc $ac \leqslant bd$.

❏

On ne retranche pas membre à membre des inégalités :

$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \not\Rightarrow a - c \leqslant b - d.$$

La démarche correcte est (par décroissance de la fonction $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$)

$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow a \leqslant b \text{ et } -d \leqslant -c \Rightarrow a - d \leqslant b - c.$$

Dit autrement, pour majorer la différence $a - d$, on majore a et on minore d ou encore on ajoute le plus possible et on retranche le moins possible.

On ne divise pas membre à membre des inégalités :

$$0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 < c \leqslant d \not\Rightarrow \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{d}.$$

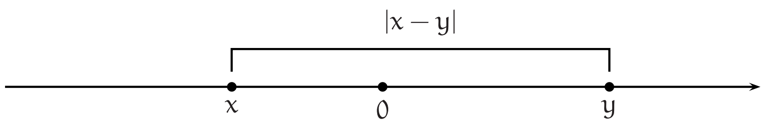
La démarche correcte est (par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)

$$0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 < c \leqslant d \Rightarrow 0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant \frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a}{d} \leqslant \frac{b}{c}.$$

Dit autrement, pour majorer la fraction (de nombres positifs) $\dfrac{a}{d}$, on « majore le haut » et/ou on « minore le bas ».

1.3 Distance entre deux réels. Intervalles de $\mathbb{R}$

La **distance** usuelle entre deux réels x et y est $d(x, y) = |x - y| = \text{Max}\{x, y\} - \text{Min}\{x, y\} = \text{Max}\{y - x, x - y\}$.



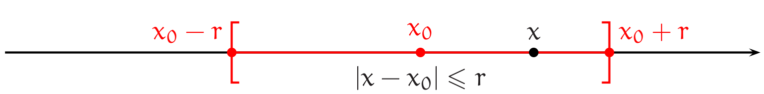
Par exemple, $d(2, 3) = |2 - 3| = 3 - 2 = 1$.

Cette distance possède les propriétés immédiates suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ d(x, 0) = |x| = \text{Max}\{x, -x\}$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x, y) = d(y, x)$.
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ avec égalité si et seulement si z est entre x et y.

Cette distance permet de décrire certains intervalles de $\mathbb{R}$:

- pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 0$, $[x_0 - r, x_0 + r] = \{x \in \mathbb{R}/\ |x - x_0| \leqslant r\}$;
- pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $]x_0 - r, x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R}/\ |x - x_0| < r\}$.



De manière générale, les différents types d'intervalles sont (a et b étant des réels tels que $a \leqslant b$) :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé borné ou segment)
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a \leqslant x < b\}$ (intervalle borné semi-ouvert à droite)
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x \leqslant b\}$ (intervalle borné semi-ouvert à gauche)
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}$ (intervalle borné ouvert)
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\ x \geqslant a\}$ (intervalle minoré et fermé à gauche et non majoré)
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\ x > a\}$ (intervalle minoré et ouvert à gauche et non majoré)
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/\ x < a\}$ (intervalle majoré et fermé à droite et non minoré)
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}/\ x < a\}$ (intervalle majoré et ouvert à droite et non minoré)
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

1.4 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ auquel on adjoint les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ (qui ne sont pas des nombres) avec la convention : $\forall x \in \mathbb{R}\ -\infty < x < +\infty$. On obtient

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty].$$

La notation $\overline{\mathbb{R}}$ pourra s'avérer utile dans un petit nombre de situation. Par exemple, on a le théorème : « toute suite réelle croissante et majorée converge et toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$ ». On pourra alors énoncer de manière plus condensée : « toute suite réelle croissante converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ».

2 Décimaux et rationnels

2.1 Nombres décimaux. Approximation décimale d'un réel

Définition 1. Les **nombres décimaux** sont les nombres de la forme $\dfrac{n}{10^p}$, $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Dit autrement, un nombre réel x est décimal si et seulement si il existe un entier naturel p tel que $10^p x$ soit un entier relatif.

Théorème 3. Soit x un réel. Pour tout entier naturel p, il existe un entier relatif n_p est un seul tel que

$$\frac{n_p}{10^p} \leqslant x < \frac{n_p}{10^p} + \frac{1}{10^p}.$$

Le nombre décimal $d_p = \dfrac{n_p}{10^p}$ est appelé l'**approximation décimale de x à 10^{-p} par défaut** et le nombre décimal $d_p + \dfrac{1}{10^p}$ est l'**approximation décimale de x à 10^{-p} par excès**.

Démonstration. Soit x un réel. Soient p un entier naturel et n un entier relatif.

$$\frac{n}{10^p} \leqslant x < \frac{n}{10^p} + \frac{1}{10^p} \Leftrightarrow n \leqslant 10^p x < n + 1 \Leftrightarrow n = E\left(10^p x\right).$$

❏

Ainsi, l'approximation décimale à 10^{-p} près par défaut de x est $\dfrac{E\left(10^p x\right)}{10^p}$. Par exemple, puisque $3,14159 \leqslant \pi < 3,14160$, l'approximation décimale à 10^{-5} près par défaut de π est $3,14159$.

Une conséquence du théorème 3 est :

Théorème 4. Soit x un réel. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists d \in \mathbb{D} / \ |x - d| \leqslant \varepsilon$. On dit alors que $\mathbb{D}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit p un entier naturel. $\dfrac{1}{10^p} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 10^p \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow p \geqslant \log\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. Soient alors $p_0 = \operatorname{Max}\left\{E\left(\log\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) + 1, 0\right\}$ puis d_{p_0} l'approximation décimale à 10^{-p_0} près par défaut de x. Par définition de d_{p_0}, on a

$$d_{p_0} \leqslant x < d_{p_0} + \frac{1}{10^{p_0}}$$

puis $0 \leqslant x - d_{p_0} < \dfrac{1}{10^{p_0}} \leqslant \varepsilon$ et donc

$$|x - d_{p_0}| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, aussi proche de x qu'on le veut, on peut trouver un nombre décimal. ❏

On peut noter que la suite $\left(d_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ du théorème 3 est une suite de nombres décimaux qui converge vers le nombre réel x car pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|x - d_p| \leqslant \dfrac{1}{10^p}$ avec $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1}{10^p} = 0$. Ainsi, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres décimaux.

2.2 Nombres rationnels

DÉFINITION 2. Les **nombres rationnels** sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{b}$, $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$. Un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel est dit **irrationnel**.

On a déjà démontré que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'était pas un nombre rationnel. On peut démontrer que plus généralement si m est un entier qui n'est pas une puissance n-ème parfaite, le réel $\sqrt[n]{m}$ est un irrationnel. On peut démontrer aussi que des nombres comme e ou π sont des irrationnels (voir planche d'exercices n° 17)

On « rappelle » que

Théorème 5. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif.

En particulier, $\mathbb{Q}$ est une partie de $\mathbb{R}$ stable pour $+$ et pour $\times$ ou encore la somme de deux rationnels est un rationnel et le produit de deux rationnels est un rationnel. Les choses se compliquent avec des irrationnels.

- La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel. En effet, soient $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ puis $z = x + y$. Si $z \in \mathbb{Q}$, alors $y = z - x \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Donc, $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est un irrationnel. En effet, soient $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ puis $z = x \times y$. Si $z \in \mathbb{Q}$, alors $y = \dfrac{z}{x} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Donc, $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel peut être rationnel ou irrationnel. Si $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mais si $x = 0 \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $xy = 0 \in \mathbb{Q}$.
- La somme de deux irrationnels peut être un rationnel (par exemple, $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$) ou un irrationnel (on peut montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$).
- Le produit de deux irrationnels peut être un rationnel (par exemple, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$) ou un irrationnel (on peut montrer que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$).

Le théorème qui suit et sa démonstration ne peuvent être compris que par les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité en terminale. Sinon, il faudra attendre le chapitre « arithmétique ».

Théorème 6. Soient a un entier naturel non nul et b un entier naturel supérieur ou égal à 2 tels que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

Le nombre rationnel $r = \dfrac{a}{b}$ est un nombre décimal si et seulement si la décomposition primaire de b est de la forme $2^\alpha 5^\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $b = 2^\alpha 5^\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Soit $p = \mathrm{Max}\{\alpha, \beta\}$. Alors,

$$10^p r = \frac{a10^p}{2^\alpha 5^\beta} = a \times 2^{p-\alpha} 5^{p-\beta} \in \mathbb{Z} \text{ (car } p - \alpha \in \mathbb{N} \text{ et } p - \beta \in \mathbb{N}).$$

Inversement, supposons que $r \in \mathbb{D}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $10^p \dfrac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$. Puisque r n'est pas un entier (car $b \geqslant 2$ et $a \wedge b = 1$), l'entier p n'est pas nul.
Posons $K = 10^p \dfrac{a}{b}$ de sorte que K est un entier naturel non nul tel que $Kb = 10^p a$. L'entier b doit donc diviser l'entier $10^p a$. Mais l'entier b est premier à l'entier a. D'après le théorème de GAUSS, l'entier b divise $10^p = 2^p 5^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que la décomposition primaire de b est de la forme $2^\alpha 5^\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

❏

Ainsi, $\dfrac{3}{20}$, $\dfrac{1}{25}$ ou $\dfrac{7}{8}$ sont des nombres décimaux alors $\dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{4}{21}$ ne sont pas des nombres décimaux.

Théorème 7. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Soit x un réel. D'après le théorème 4, aussi proche que l'on veut de x, il existe un nombre décimal. Puisque qu'un nombre décimal est un nombre rationnel particulier, ceci montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On peut montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ directement sans avoir fait au préalable le travail pour les nombres décimaux :

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier naturel non nul b tel que $\dfrac{1}{b} \leqslant \varepsilon$ (par exemple, on prend $b = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ de sorte que $b > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ...)

Soit $a = E(bx)$. a est un entier relatif tel que $a \leqslant bx < a + 1$ et donc $\dfrac{a}{b} \leqslant x < \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{a}{b} + \varepsilon$. $r = \dfrac{a}{b}$ est un nombre rationnel tel que $|x - r| \leqslant \varepsilon$. On a montré que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Une conséquence de ce qui précède est qu'entre deux nombres réels distincts, il existe toujours au moins un rationnel.

Vérifions maintenant que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rationnel r_1 entre $\dfrac{x-\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{x-\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}$ et il existe un rationnel r_2 entre $\dfrac{x+\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{x+\varepsilon}{\sqrt{2}}$. r_1 et r_2 sont distincts et donc l'un au moins des deux rationnels r_1 ou r_2 est non nul. On le note plus simplement r.
Considérons le nombre $y=r\sqrt{2}$. Si y était rationnel, on aurait $\sqrt{2}=\dfrac{y}{r}\in\mathbb{Q}$ ce qui n'est pas. Donc $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. D'autre part,

$$\left(\frac{x-\varepsilon}{\sqrt{2}}\leqslant r\leqslant\frac{x-\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}\text{ ou }\frac{x+\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{2}}\leqslant r\leqslant\frac{x+\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow\frac{x-\varepsilon}{\sqrt{2}}\leqslant r\leqslant\frac{x+\varepsilon}{\sqrt{2}}\Rightarrow x-\varepsilon\leqslant r\sqrt{2}\leqslant x+\varepsilon\Rightarrow|x-y|\leqslant\varepsilon.$$

Ainsi, aussi proche qu'on le désire d'un réel donné, on peut trouver un nombre irrationnel ou aussi, entre deux réels distincts, il existe au moins un nombre irrationnel.

❏

3 Majorants, minorants. Maximum, minimum. Borne supérieure, borne inférieure

3.1 Majorants, minorants

Définition 3. Soit A un partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $M\in\mathbb{R}$. M est un **majorant** de A si et seulement si $\forall x\in A,\ x\leqslant M$.
A est **majorée** si et seulement si A admet au moins un majorant ou encore

$$A\text{ est majorée si et seulement si }\exists M\in\mathbb{R}/\ \forall x\in A,\ x\leqslant M.$$

Soit $m\in\mathbb{R}$. M est un **minorant** de A si et seulement si $\forall x\in A,\ x\geqslant m$.
A est **minorée** si et seulement si A admet au moins un minorant ou encore

$$A\text{ est minorée si et seulement si }\exists m\in\mathbb{R}/\ \forall x\in A,\ x\geqslant m.$$

A est **bornée** si et seulement si A est minorée et majorée ou encore

$$A\text{ est bornée si et seulement si }\exists(m,M)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in A,\ m\leqslant x\leqslant M.$$

⇨ **Commentaire** .

◇ *Une partie donnée de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement majorée. C'est par exemple le cas de $\mathbb{R}^+$.*

◇ *Un majorant, s'il existe, n'est pas unique. Par exemple, si M est un majorant d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$, alors $M+1$ est un autre majorant de A. Une partie majorée A de $\mathbb{R}$ admet toujours une infinité de majorants.*

3.2 Maximum, minimum

Définition 4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

A admet un **plus grand élément** (ou un **maximum**) si et seulement si $(\exists M\in\mathbb{R}/\ (M\in A\text{ et }\forall x\in A,\ x\leqslant M)$.
A admet un **plus petit élément** (ou un **minimum**) si et seulement si $(\exists m\in\mathbb{R}/\ (m\in A\text{ et }\forall x\in A,\ x\geqslant m)$.

Un maximum (resp. minimum) de A est donc un majorant (resp. minorant) de A qui appartient à A.

Théorème 8. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Si A admet un maximum, celui-ci est unique.
Si A admet un minimum, celui-ci est unique.

Démonstration . Soient M et M' deux maximums de A (le pluriel de maximum est maximums ou maxima) pas nécessairement distinct. M est un majorant de A et M' est dans A. Donc, $M\geqslant M'$. M' est un majorant de A et M est dans A. Donc, $M'\geqslant M$. Finalement, $M=M'$.

La démonstration est analogue pour les minimums.

❑

On doit donc dire dorénavant **le** maximum ou **le** minimum de A (en cas d'existence). Le maximum de A (resp. minimum de A) se note $\text{Max}(A)$ (resp. $\text{Min}(A)$). Tout ce qui précède peut alors être résumé en

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soient m et M deux réels.

$M = \text{Max}(A) \Leftrightarrow (M \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \leqslant M)$.
$m = \text{Min}(A) \Leftrightarrow (m \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \geqslant m)$.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ même majorée (resp. minorée), A n'admet pas nécessairement de maximum (resp. minimum). Par exemple, l'ensemble $]0, +\infty[$ n'admet pas de minimum ou encore **il n'existe pas de plus petit réel strictement positif** ou encore il n'existe pas de premier réel strictement positif. Démontrons explicitement cette affirmation. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel strictement positif a inférieur ou égal à n'importe quel réel strictement positif. Le réel $x = \dfrac{a}{2}$ est un réel strictement positif vérifiant $0 < x < a$ car $a - x = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} > 0$. Ceci est une contradiction.

Ainsi, une partie non vide de $\mathbb{R}$ ou bien n'admet pas de maximum (resp. minimum) ou bien admet un maximum (resp. minimum) et un seul.

3.3 Borne inférieure, borne inférieure

Définition 5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

• La **borne supérieure** de A est le plus petit des majorants de A. Elle se note $\text{Sup}(A)$.
Ainsi, par définition,

$$\forall M \in \mathbb{R},\ M = \text{Sup}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \leqslant M \\ \qquad \text{et} \\ \forall M' \in \mathbb{R},\ ((\forall x \in A,\ x \leqslant M') \Rightarrow M \leqslant M') \end{array} \right. .$$

• La **borne inférieure** de A est le plus grand des minorants de A. Elle se note $\text{Inf}(A)$.
Ainsi, par définition,

$$\forall m \in \mathbb{R},\ m = \text{Inf}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \geqslant m \\ \qquad \text{et} \\ \forall m' \in \mathbb{R},\ ((\forall x \in A,\ x \geqslant m') \Rightarrow m \geqslant m') \end{array} \right. .$$

Exemple. L'ensemble $[0, 1[$ n'admet pas de maximum. Montrons le explicitement. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel $a \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in [0, 1[,\ x \leqslant a$. Soit $x_0 = \dfrac{1 + a}{2}$. On a déjà $0 \leqslant x_0 < \dfrac{1 + 1}{2} = 1$ et donc x_0 est un réel de $[0, 1[$. Mais d'autre part, $x_0 > \dfrac{a + a}{2} = a$. Donc, x_0 est un élément de $[0, 1[$ qui est strictement plus grand que a. Ceci est une contradiction et donc $[0, 1[$ n'admet pas de maximum.
Montrons que $[0, 1[$ admet une borne supérieure et que cette borne supérieure est égale à 1. Déjà, 1 est un majorant de $[0, 1[$. Montrons que 1 est le plus petit majorant de $[0, 1[$. Soit M un majorant de $[0, 1[$.
Si a est un élément de $[0, 1[$, alors M est supérieur ou égal à $\dfrac{1 + a}{2}$ (car $\dfrac{1 + a}{2} \in [0, 1[$) et donc M est strictement supérieur à a (car $\dfrac{1 + a}{2} > a$). Ainsi, M est un réel strictement supérieur à tout réel de $[0, 1[$. En particulier, M est un réel positif, distinct de tout réel de $[0, 1[$. On en déduit que $M \geqslant 1$.
Finalement, 1 est le plus petit majorant de $[0, 1[$ et donc $\text{Sup}([0, 1[) = 1$.

❑

A priori, une borne supérieure (resp. inférieure) n'existe pas nécessairement mais, si elle existe, elle est unique car c'est le minimum (resp. maximum) de l'ensemble des majorants (resp. minorants).

Le théorème qui suit peut en fait être considéré comme un axiome. Il est appelé **axiome de la borne supérieure**. Il n'a donc pas à être démontré.

Théorème 9.
• Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
• Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

⇨ **Commentaire** . *Il est clair qu'une partie non vide et non majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ n'admet pas de borne supérieure (resp. inférieure) car une borne supérieure (resp. inférieure) est un majorant (resp. minorant). Pour une partie non vide de $\mathbb{R}$, l'existence d'une borne supérieure (resp. inférieure) est donc équivalente au fait que cette partie soit majorée (resp. minorée).*

Quand on découvre la notion de borne supérieure (resp. inférieure), on a tendance à la confondre avec la notion de maximum (resp. minimum). Cela est dû au résultat suivant :

Théorème 10. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A admet un plus grand élément, alors admet une borne supérieure et de plus, $\text{Sup}(A) = \text{Max}(A)$.
- Si A admet un plus petit élément, alors admet une borne inférieure et de plus, $\text{Inf}(A) = \text{Min}(A)$.

Démonstration . Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Supposons que A admette un plus grand élément. Posons $M = \text{Max}(A)$.

- M est un majorant de A.
- Si M' est un majorant de A, alors $M' \geqslant M$ car $M \in A$.

Donc, M est le plus petit des majorants de A. Ceci montre que A admet une borne supérieure et de plus que $\text{Sup}(A) = \text{Max}(A)$.

La démonstration est analogue pour une borne inférieure. ❑

On donne maintenant une caractérisation de la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.

Théorème 11.

- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un réel.

$$M = \text{Sup}(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} M \text{ est un majorant de } A \\ \qquad \text{et} \\ \text{tout réel strictement petit que } M \text{ n'est pas un majorant de } A \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \leqslant M \\ \qquad \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A /\ M - \varepsilon < x_0 \end{array}\right. .$$

- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée de $\mathbb{R}$. Soit m un réel.

$$m = \text{Inf}(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} M \text{ est un minorant de } A \\ \qquad \text{et} \\ \text{tout réel strictement grand que } m \text{ n'est pas un minorant de } A \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \geqslant m \\ \qquad \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A /\ x_0 < m + \varepsilon \end{array}\right. .$$

Démonstration . Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne supérieure M.
M est un majorant de A et tout majorant de A est supérieur ou égal à M. On en déduit que tout réel strictement inférieur à M n'est pas un majorant de A.
Inversement, soit M' un réel tel que M' est un majorant de A et tout réel strictement inférieur à M' n'est pas un majorant de A. Alors, M' est un majorant de A et tout majorant de A est supérieur ou égal à M'. Donc, M' est le plus petit des majorants de A ou encore $M' = \text{Sup}(A)$.

La démonstration est analogue pour la borne inférieure. ❑

Exercice 1. Déterminer $\underset{\alpha \in]0,\pi[}{\text{Inf}} \left(\underset{n \in \mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)|\right)$.

Solution 1.

- Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)| = \underset{n \in \mathbb{N}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)|$.

Soit $\alpha \in]0,\pi[$. $\{|\sin(n\alpha)|,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Donc, $f(\alpha)$ existe dans $\mathbb{R}$. La fonction f est bien définie sur $]0,\pi[$.

- $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|\sin(n(\pi - \alpha))| = |\sin(n\alpha)|$ et donc $\forall \alpha \in]0,\pi[$, $f(\pi - \alpha) = f(\alpha)$.

On en déduit que $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.

• $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{Sup}\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \text{Max}\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Ensuite, si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geqslant |\sin(1\alpha)| = \sin(\alpha) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

• Soit alors $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$. Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
Il existe un unique entier naturel n_1 tel que $n_1\alpha \leqslant \frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha$ à savoir $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$.
Mais alors, $\frac{\pi}{3} < (n_1+1)\,\alpha = n_1\alpha + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et l'entier $n_0 = n_1 + 1$ convient.
Ceci montre que $f(\alpha) \geqslant |\sin(n_0\alpha)| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Finalement $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et donc $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Min}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B = \{a+b,\ (a,b) \in A\times B\}$.

Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure puis que $\text{Sup}(A+B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$.

Solution 2.

• A et B sont des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Donc, les parties A et B admettent toutes deux une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

• $A+B$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car A et B le sont.
Pour tout $(a,b) \in A\times B$, $a \leqslant \text{Sup}(A)$ et $b \leqslant \text{Sup}(B)$. Donc, pour tout $(a,b) \in A\times B$, $a+b \leqslant \text{Sup}(A)+\text{Sup}(B)$. Ainsi, $A+B$ est une partie non vide et majorée (par $\text{Sup}(A)+\text{Sup}(B)$) de $\mathbb{R}$. Donc, $A+B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\varepsilon > 0$. $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif et donc il existe $a_0 \in A$ tel que $a_0 > \text{Sup}(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ et il existe $b_0 \in B$ tel que $b_0 > \text{Sup}(B) - \frac{\varepsilon}{2}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $a_0 + b_0 > \text{Sup}(A)+\text{Sup}(B) - \varepsilon$.

En résumé, $\left\{\begin{array}{l}\forall(a,b)\in A\times B,\ a+b \leqslant \text{Sup}(A)+\text{Sup}(B)\\ \qquad\text{et}\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists(a_0,b_0)\in A\times B/\ a_0+b_0 > \text{Sup}(A)+\text{Sup}(B)-\varepsilon\end{array}\right.$. Donc, $\text{Sup}(A+B) = \text{Sup}(A)+\text{Sup}(B)$.

---

4 Complément : convexes de $\mathbb{R}$

Définition 6. Soit C une partie non vide de $\mathbb{R}$.

C est **convexe** si et seulement si $\forall(a,b) \in C^2$, $[a,b] \subset C$.

Convention. $\varnothing$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

Théorème 12. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration. Il est clair que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit C une partie convexe de $\mathbb{R}$. Montrons que C est un intervalle. Si $C = \varnothing$, alors $C =]0,0[$ est un intervalle. Dorénavant, C est une partie convexe non vide de $\mathbb{R}$.

1er cas. Supposons que C est minorée et majorée. Donc, C admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Posons $a = \text{Inf}(C)$ et $b = \text{Sup}(C)$.

1er sous-cas. Supposons $a \in C$ et $b \in C$ (ou encore $a = \text{Min}(C)$ et $b = \text{Max}(C)$). Pour tout x de C, on a $a \leqslant x \leqslant b$ et donc $C \subset [a,b]$. D'autre part, puisque C est convexe et que $(a,b) \in C^2$, on a $[a,b] \subset C$. Dans ce cas, $C = [a,b]$ est un intervalle.

2ème sous-cas. Supposons $a \in C$ et $b \notin C$. Pour tout x de C, on a $a \leqslant x < b$ et donc $C \subset [a, b[$. Inversement, soit $x \in [a, b[$. En particulier, $x < b$. Soit $\varepsilon = b - x > 0$. Puisque $b = \text{Sup}(C)$, il existe $y \in C$ tel que $x = b - \varepsilon < y \leqslant b$. Puisque C est convexe et que $(a, y) \in C^2$, on a $[a, y] \subset C$. Puisque $x \in [a, y]$, on a $x \in C$. On a montré que tout x de $[a, b[$ est dans C et donc que $[a, b[\subset C$. Dans ce cas, $C = [a, b[$ est un intervalle.

3ème sous-cas. Supposons $a \notin C$ et $b \in C$. Par un raisonnement analogue au cas précédent, $C =]a, b]$.

4ème sous-cas. Supposons $a \notin C$ et $b \notin C$. Par un raisonnement analogue, $C =]a, b[$.

2 ème cas. Supposons que C est minorée et non majorée. C admet une borne inférieure réelle que l'on note a.

1er sous-cas. Supposons $a \in C$. Pour tout x de C, $a \leqslant x$ et donc $C \subset [a, +\infty[$. Inversement, soit $x \in [a, +\infty[$. A n'est pas majorée et donc x n'est pas un majorant de A. Par suite, il existe $y \in C$ tel que $x < y$. Puisque $(a, y) \in C^2$, on a $[a, y] \subset C$ et en particulier, puisque $x \in [a, y]$, on a $x \in C$. Ainsi, tout x de $[a, +\infty[$ est dans C et donc $[a, +\infty[\subset C$. Dans ca cas, $C = [a, +\infty[$. est un intervalle.

2ème sous-cas. Supposons $a \notin C$. Pour tout x de C, $a < x$ et donc $C \subset [a, +\infty[$. Inversement, soit $x \in]a, +\infty[$. Soit $\varepsilon = x - a > 0$. Il existe $y \in C$ tel que $a \leqslant y < a + \varepsilon = x$. D'autre part, x n'est pas un majorant de A et donc il existe $z \in C$ tel que $x < z$. Ainsi, il existe $(y, z) \in C^2$ tel que $y < x < z$. Puisque C est convexe, $x \in [y, z] \subset C$. Tout x de $]a, +\infty[$ appartient donc à C puis $]a, +\infty[\subset C$. Dans ce cas, $C =]a, +\infty[$.

3 ème cas. Supposons que C est non minorée et majorée. Par des raisonnements analogues au cas précédent, on obtient $C =]-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, ou $C =]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$.

4 ème cas. Supposons que C est non minorée et non majorée. Soit $x \in \mathbb{R}$. x n'est ni un minorant, ni un majorant de C. Donc, il existe $(y, z) \in C^2$ tel que $y < x < z$. Puisque $(y, z) \in C^2$, $x \in [y, z] \subset C$. Ceci montre que $\mathbb{R} \subset C$ et donc que $C = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

❏