

Equations différentielles linéaires

Plan du chapitre

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre	page 2
1.1 Présentation du problème	page 2
1.2 Résolution de l'équation $y' + ay = b$ par la méthode de LAGRANGE	page 2
1.3 Structure de l'ensemble des solutions	page 3
1.4 Le théorème de CAUCHY	page 5
1.5 Méthode de variation de la constante	page 6
1.6 Principe de superposition des solutions	page 7
1.7 Prolongement de solutions	page 7
2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	page 9
2.1 Le théorème de CAUCHY	page 9
2.2 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$	page 9
2.2.1 Le cas général où a , b et c sont complexes	page 9
2.2.2 Le cas particulier où a , b et c sont réels	page 11
2.3 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = g(x)$	page 13
2.3.1 Le cas général où g est une fonction continue quelconque	page 13
2.3.2 Quelques situations particulières concernant le second membre	page 13
2.3.2.1 Second membre du type $Ae^{\lambda x}$, $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$	page 13
2.3.2.2 Second membre du type $B \cos(\omega x)$ ou $B \sin(\omega x)$, $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$	page 14
2.3.2.3 Principe de superposition des solutions	page 15

1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Présentation du problème

On se donne deux fonctions a et b définies et continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et on s'intéresse à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + ay = b \quad (E).$$

Résoudre l'équation différentielle (E), c'est trouver **toutes** les fonctions f dérivables sur I vérifiant

$$\forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \quad (*).$$

Une solution de (E) sur I est une fonction dérivable sur I vérifiant (*). Les courbes représentatives des solutions de (E) sur I s'appellent les **courbes intégrales** de l'équation différentielle (E).

b est le **second membre** de l'équation différentielle (E). L'équation différentielle homogène (ou « sans second membre ») associée à l'équation (E) est

$$y' + ay = 0 \quad (E_h).$$

On notera \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}_h) l'ensemble des solutions de (E) (resp. (E_h)) sur I .

1.2 Résolution de l'équation $y' + ay = b$ par la méthode de LAGRANGE

On se donne $a : x \mapsto a(x)$ et $b : x \mapsto b(x)$ deux fonctions **continues** sur un **intervalle** I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Par commodité, dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On veut résoudre sur I l'équation différentielle

$$y' + ay = b \quad (E).$$

Puisque la fonction a est continue sur I , la fonction a admet des primitives sur I . On note A une primitive de la fonction a sur I . Enfin, on fixe un réel x_0 de I .

Soit f une fonction dérivable sur I . Puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{K} ,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = b(x)e^{A(x)} \text{ (car } \forall x \in I, e^{A(x)} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (e^{A(x)}f(x))' = b(x)e^{A(x)} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K} / \forall x \in I, f(x)e^{A(x)} = C + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K} / \forall x \in I, f(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt. \end{aligned}$$

Maintenant, la résolution ci-dessus a été effectuée sous l'hypothèse « soit f une fonction dérivable sur I ». Il reste donc à se préoccuper de la dérivabilité des solutions obtenues puis d'éliminer parmi les solutions obtenues celles qui ne sont pas dérivables sur I .

Puisque la fonction a est continue sur I , la fonction A est définie et dérivable sur I et il en est de même des fonctions $x \mapsto Ce^{-A(x)}$. D'autre part, puisque la fonction b est continue sur I et que la fonction A est continue sur I (car dérivable sur I), la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur I . Mais alors, la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt$ est dérivable sur

I et il en est de même de la fonction $x \mapsto e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt$. Finalement, pour tout $C \in \mathbb{K}$, la fonction $x \mapsto$

$Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt$ est dérivable sur I et par suite solution de (E) sur I .

\Rightarrow **Commentaire**. *Le moment clé de la résolution est le moment où on multiplie les deux membres de l'égalité par $e^{A(x)}$. On fait ainsi apparaître la dérivée du produit $e^{A(x)}f(x)$ ($(e^{A(x)}f(x))' = e^{A(x)}f'(x) + A'(x)e^{A(x)}f(x) = e^{A(x)}f'(x) + ae^{A(x)}f(x)$). On passe ainsi d'une équation où l'inconnue f apparaît deux fois ($f' + af = b$) à une équation où l'inconnue f apparaît une seule fois ($(e^{A(x)}f(x))' = be^{A(x)}$). Il n'y a plus alors qu'à parcourir le chemin en sens inverse pour remonter à f (c'est-à-dire intégrer puis multiplier les deux membres par $e^{-A(x)}$).*

On peut énoncer :

Théorème 1. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}). Soit $x_0 \in I$.

Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (resp. } C \in \mathbb{C}\text{),}$$

où A est une primitive fixée de la fonction a sur I .

En particulier, l'équation $y' + ay = b$ admet au moins une solution sur I .

Exemple 1. Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^x f'(x) + e^x f(x) = e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (\exp \times f)'(x) = e^x \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, e^x f(x) = e^x + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + Ce^{-x}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} est $\mathcal{S} = \{x \mapsto 1 + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 2. Soit (E) l'équation différentielle $2xy' - y = 3x^2$ sur $I =]0, +\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, 2xf'(x) - f(x) = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) - \frac{1}{2x}f(x) = \frac{3}{2}x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}f'(x) - \frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}f(x) = \frac{3}{2}xe^{-\frac{1}{2}\ln(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, \left(e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}f\right)'(x) = \frac{3}{2}x \times \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, \left(\frac{1}{\sqrt{x}}f\right)'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{\sqrt{x}}f(x) = x^{\frac{3}{2}} + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x^2 + C\sqrt{x}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est $\mathcal{S} = \{x \mapsto x^2 + C\sqrt{x}, C \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 3. Soit (E) l'équation différentielle $(\operatorname{ch} x)y' + (\operatorname{sh} x)y = \operatorname{th} x$ sur $I = \mathbb{R}$.

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch} x)f'(x) + (\operatorname{sh} x)f(x) = \operatorname{th} x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{ch} \times f)'(x) = \operatorname{th} x \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} xf(x) = \ln(\operatorname{ch} x) + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + C}{\operatorname{ch} x}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} est $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{\ln(\operatorname{ch} x) + C}{\operatorname{ch} x}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

1.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 2. Soit a une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Les solutions de $(E_h) : y' + ay = 0$, sur I , sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) sur I et $C \in \mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION .

Les solutions de (E) : $y' + ay = b$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt$. Quand b est la fonction nulle, on obtient en particulier le fait que les solutions de $(E_h) : y' + ay = 0$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$. On note que la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$ n'est pas nulle. Donc, si on pose $f_1 = e^{-A}$, f_1 est une solution non nulle de (E_h) sur I et $S_h = \{Cf_1, C \in \mathbb{K}\}$.

Si maintenant, f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) , alors il existe $C_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $f_0 = C_0 f_1$. Mais alors,

$$\{Cf_1, C \in \mathbb{K}\} = \left\{ \frac{C}{C_0} C_0 f_1, C \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \frac{C}{C_0} f_0, C \in \mathbb{K} \right\} \subset \{C'f_0, C' \in \mathbb{K}\}$$

et $\{Cf_0, C \in \mathbb{K}\} = \{CC_0 f_1, C \in \mathbb{K}\} \subset \{C'f_1, C' \in \mathbb{K}\}$. Finalement $S = \{Cf_0, C \in \mathbb{K}\}$. □

Théorème 3. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Les solutions de (E) : $y' + ay = b$ sur I sont les fonctions de la forme $Cf_0 + f_1$ où f_0 est une solution non nulle quelconque de (E_h) sur I (où (E_h) est l'équation homogène associée $y' + ay = 0$), f_1 est une solution particulière de (E) sur I et $C \in \mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION . D'après le théorème 1, l'équation (E) admet au moins une solution sur I. Soit f_1 une solution particulière de (E) sur I. Par construction, la fonction f_1 vérifie $f_1' + af_1 = b$ sur I. On note aussi f_0 une solution non nulle de (E_h) sur I.

Soit alors f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur I} &\Leftrightarrow f' + af = b \Leftrightarrow f' + af = f_1' + af_1 \\ &\Leftrightarrow (f - f_1)' + a(f - f_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow f - f_1 \text{ solution de } (E_h) \text{ sur I} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K} / f - f_1 = Cf_0 \text{ (d'après le théorème 2)} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K} / f = Cf_0 + f_1. \end{aligned}$$

□

On a l'habitude de dire que la *solution générale* de l'équation différentielle (E) est la somme d'une *solution particulière* de l'équation (E) et de la *solution générale* de l'équation homogène associée (E_h) :

$$\begin{aligned} &\text{sol gén de (E)} \\ &= \\ &\text{sol part de (E)} \\ &+ \\ &\text{sol gen de } (E_h). \end{aligned}$$

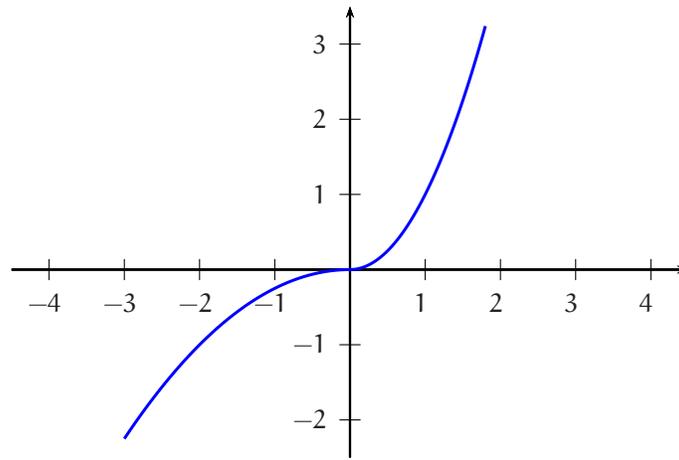
Exemple 1. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $I =]0, +\infty[$. Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Puisque la fonction $a : x \mapsto -\frac{2}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation (E) sur I sont de la forme Cf_0 , $C \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E) sur I. La fonction $f_0 : x \mapsto x^2$ est bien sûr solution de (E) sur I et donc les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. □

Exemple 2. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$. Sur I, l'équation (E) n'est pas du type $y' + ay = 0$ où a est une fonction continue sur I. Le théorème 2 ne s'applique donc plus.

La fonction $f_0 : x \mapsto x^2$ est encore solution de (E) sur I et de manière plus générale, les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, sont **des** solutions de (E) sur I. Mais rien ne permet d'affirmer que l'on a trouvé **toutes** les solutions de (E) sur I.

De fait, la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ n'est pas du type $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, mais on vérifie facilement que cette

fonction est dérivable sur \mathbb{R} (et en particulier en 0) et vérifie pour tout réel x, $xf'(x) - 2f(x) = 0$ ou encore f est solution de (E) sur $I = \mathbb{R}$. Voici le graphe de la fonction f.



Exemple 3. Soit (E) l'équation différentielle $xy' - 2y = 1$ sur $I =]0, +\infty[$. Sur I , l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x}$. Puisque les fonctions $a : x \mapsto -\frac{2}{x}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation (E) sur I sont de la forme $Cf_0 + f_1$, $C \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et f_1 est une solution particulière de (E). La fonction $f_0 : x \mapsto x^2$ est bien sûr solution de (E_h) sur I et la fonction $f_1 : x \mapsto -\frac{1}{2}$ est bien sûr solution de (E) sur I . Donc, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2} + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. \square

1.4 Le théorème de CAUCHY

Théorème 4 (théorème de CAUCHY). Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une solution f de (E) : $y' + ay = b$ sur I et une seule vérifiant $f(x_0) = y_0$.

DÉMONSTRATION. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt$ où A est une primitive donnée de a sur I et $C \in \mathbb{K}$. On choisit pour A la primitive de a sur I qui s'annule en x_0 . Donc, pour tout x de I , $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$.

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ce^{-A(x_0)} + e^{-A(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} b(t)e^{-A(t)} dt = y_0 \Leftrightarrow C = y_0.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'une solution prenant la valeur y_0 en x_0 . \square

Expression de la solution de $y' + ay = b$ prenant la valeur y_0 en x_0 :

$$x \mapsto y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t) e^{A(t)} dt$$

où A est la primitive de a sur I s'annulant en x_0 .

\Rightarrow **Commentaire.** Il ne faut surtout pas croire que l'existence et/ou l'unicité d'une solution vérifiant une « condition initiale » est automatiquement acquise, même pour des équations différentielles très simples.

\diamond L'équation différentielle $(x-1)y' + (x-1)y = 1$ n'admet pas de solution sur \mathbb{R} car si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , $(1-1)f'(1) + (1-1)f(1) = 0 \neq 1$ (cette équation ne peut s'écrire sur \mathbb{R} sous la forme $y' + ay = b$ avec a et b continues sur \mathbb{R}).

\diamond L'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ admet (au moins) deux solutions distinctes s'annulant en 0 à savoir $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ (cette équation ne peut s'écrire sur \mathbb{R} sous la forme $y' + ay = b$ avec a et b continues sur \mathbb{R}).

\diamond L'équation différentielle $y'^2 - y = 0$ admet (au moins) deux solutions distinctes s'annulant en 0 à savoir $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ (cette équation n'est pas linéaire).

Les hypothèses du théorème de CAUCHY sont précises : ... continues ... intervalle ... et le théorème de CAUCHY ne peut être utilisé que quand ces hypothèses sont vérifiées.

Un corollaire important au théorème 4 est :

Théorème 5. Soit a une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Une solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ s'annulant sur I est nécessairement la fonction nulle.
Toute solution sur I de l'équation différentielle $y' + ay = 0$, non nulle sur I , ne s'annule pas sur I .

DÉMONSTRATION. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I , s'annulant en un certain réel x_0 de I (c'est-à-dire prenant la valeur 0 en x_0). La fonction nulle est aussi une solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I , s'annulant en x_0 . Par unicité d'une telle solution, on en déduit que $f = 0$.

Par contraposition, si f est une solution non nulle de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I , f ne s'annule pas sur I . □

⇒ **Commentaire.** On peut obtenir ce résultat directement à partir de l'expression des solutions. Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$, où A est une primitive de a sur I et $C \in \mathbb{K}$. Pour une telle solution, ou bien $C = 0$ et dans ce cas, cette solution est la fonction nulle, ou bien $C \neq 0$, et dans ce cas, cette solution ne s'annule pas sur I (car la fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{C}).

1.5 Méthode de variation de la constante

Dans ce paragraphe, on suppose connue une solution f_0 sur I de l'équation homogène (E_h) , non nulle sur I . Pour résoudre l'équation différentielle (E) sur I , il ne manque plus qu'une solution particulière de (E) sur I . Le théorème suivant fournit un moyen d'en obtenir une.

Théorème 6. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = b$. Soit f_0 une solution sur I , non nulle, de l'équation homogène associée (E_h) .

Il existe une solution particulière de (E) sur I de la forme $f_1 : x \mapsto C(x)f_0(x)$ où C est une fonction dérivable sur I .
De plus, la fonction C vérifie $C' = \frac{b}{f_0}$.

DÉMONSTRATION. Soit C une fonction dérivable sur I puis $f_1 = Cf_0$.

$$\begin{aligned} f_1' + af_1 = b &\Leftrightarrow C'f_0 + Cf_0' + aCf_0 = b \Leftrightarrow C'f_0 + C \times (f_0' + af_0) = b \\ &\Leftrightarrow C'f_0 = b \text{ (car } f_0 \text{ est solution de } y' + ay = 0 \text{ sur } I) \\ &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{f_0} \text{ (car } f_0 \text{ ne s'annule pas sur } I). \end{aligned}$$

Maintenant, les fonctions b et f_0 sont continues sur I (f_0 est continue sur I car dérivable sur I) et la fonction f_0 ne s'annule pas sur I . Donc, la fonction $\frac{b}{f_0}$ est continue sur I . Par suite, la fonction $\frac{b}{f_0}$ admet au moins une primitive sur I . On en déduit l'existence de la fonction C . □

Exemple. Considérons l'équation différentielle $(E) : y' - y = \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$. Les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est la fonction $x \mapsto e^x$ et $C \in \mathbb{R}$.

Déterminons une solution particulière de (E) sur I par la méthode de variation de la constante. Soient C une fonction dérivable sur I puis $f_1 = Cf_0$.

$$f_1 \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = \cos x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, C'(x) = \cos x e^{-x}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \cos x e^{-x} dx &= \operatorname{Re} \left(\int e^{-x} e^{ix} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\int e^{(-1+i)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} \right) + \lambda = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-x}(\cos x + i \sin x)(-1-i)}{2} \right) + \lambda \\ &= \frac{e^{-x}(-\cos x + \sin x)}{2} + \lambda. \end{aligned}$$

La fonction $C : x \mapsto \frac{e^{-x}(-\cos x + \sin x)}{2}$ convient et fournit la solution particulière $f_1 : x \mapsto \frac{-\cos x + \sin x}{2}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^x + \frac{-\cos x + \sin x}{2}$, $C \in \mathbb{R}$. □

1.6 Principe de superposition des solutions

Théorème 7 (principe de superposition des solutions). Soient a , b_1 et b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels ou complexes.

On suppose que f_1 est une solution particulière sur I de l'équation $y' + ay = b_1$ et que f_2 est une solution particulière sur I de l'équation $y' + ay = b_2$. Alors, la fonction $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' + ay = b$ où $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$.

DÉMONSTRATION. f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} f' + af &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + a \times (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 (f_1' + af_1) + \lambda_2 (f_2' + af_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = b. \end{aligned}$$

□

Considérons par exemple l'équation différentielle $y' - y = \cos x + x$. La fonction $x \mapsto \frac{-\cos x + \sin x}{2}$ est solution de $y' - y = \cos x$ sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto -x - 1$ est solution de $y' - y = x$ sur \mathbb{R} . Donc, une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = \cos x + x$ sur \mathbb{R} est la fonction $x \mapsto \frac{-\cos x + \sin x}{2} - x - 1$.

1.7 Prolongement de solutions

Exemple 1. Considérons l'équation différentielle (E) : $xy' - 2y = 0$ sur \mathbb{R} . Sur $I =]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$, (E) est équivalente à $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Puisque la fonction $a : x \mapsto -\frac{2}{x}$ est continue sur I , les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme Cf_0 où f_0 est une solution non nulle de (E) sur I et $C \in \mathbb{R}$. Plus précisément, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.

Passons à l'intervalle $I = \mathbb{R}$. La fonction nulle est solution de (E) sur \mathbb{R} . Plus généralement, les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, sont solutions de (E) sur \mathbb{R} . Déterminons maintenant **toutes** les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} . Nécessairement, $0 \times f'(0) - 2f(0) = 0$ et donc, nécessairement $f(0) = 0$.

D'autre part, la restriction de f à $] -\infty, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$) est solution de (E) sur $] -\infty, 0[$ (resp. $]0, +\infty[$). Donc, il existe **deux** constantes C_1 et C_2 telles que pour $x < 0$, $f(x) = C_1 x^2$ et pour $x > 0$, $f(x) = C_2 x^2$. En résumé, si f est une solution

de (E) sur \mathbb{R} , nécessairement il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} C_1 x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C_2 x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Réciproquement, une telle fonction est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et solution de (E) sur $] -\infty, 0[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et solution de (E) sur $]0, +\infty[$ et enfin, si cette fonction est dérivable en 0, cette fonction vérifie encore l'équation (E) pour $x = 0$. En résumé, une telle fonction est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si cette fonction est dérivable en 0.

Pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{C_1 x^2 - 0}{x - 0} = C_1 x$ et pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{C_2 x^2 - 0}{x - 0} = C_2 x$. Quand x tend vers 0, à droite

ou à gauche, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 ou encore $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. La fonction f est donc dérivable en 0 pour tout choix de C_1 et C_2 puis, la fonction f est solution de (E) sur \mathbb{R} pour tout choix de C_1 et C_2 .

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions f de la forme $x \mapsto \begin{cases} C_1 x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C_2 x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. On peut noter que si on

pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, alors pour tout réel x , $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$

ou encore $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$. Donc, l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} est $\{C_1 f_1 + C_2 f_2, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$. □

Exemple 2. Considérons l'équation différentielle (E) : $xy' + y = 0$ sur \mathbb{R} . Sur $I =]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Une solution de (E) sur $I = \mathbb{R}$ est nécessairement de la forme $x \mapsto \begin{cases} \frac{C_1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{C_2}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, une telle fonction est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si cette fonction est dérivable en 0.

Si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, la fonction f n'a pas une limite réelle en 0 et en particulier, n'est pas dérivable en 0. Si $C_1 = C_2 = 0$, la fonction f est la fonction nulle.

L'équation différentielle (E) admet sur \mathbb{R} une solution et une seule à savoir la fonction nulle. \square

\Rightarrow **Commentaire.** *A ce jour, nous ne pouvons étudier que des exemples très simples car nous manquons d'outils pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point. Ces outils seront exposés dans le chapitre « Comparaison des fonctions en un point ».*

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $|x|y' - (x - 1)y = x^3$

1) sur $]0, +\infty[$,

2) sur $] -\infty, 0[$,

3) sur \mathbb{R} (cette question ne peut pas être résolue si on ne connaît pas le chapitre « Comparaison des fonctions en un point »).

Solution 1. On note (E_h) l'équation différentielle homogène associée $|x|y' + (x - 1)y = 0$.

1) Résolution de (E) sur $]0, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = x^2$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont continues sur $]0, +\infty[$, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont de la forme $x \mapsto \lambda f_0 + f_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur $]0, +\infty[$ et f_1 une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur }]0, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)f(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, e^{x-\ln(x)}f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{x-\ln(x)}f(x) = x^2e^{x-\ln(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x) = xe^x \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, \frac{e^x}{x}f(x) = (x-1)e^x + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x^2 - x + Cxe^{-x}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + Cxe^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2) Résolution de (E) sur $] -\infty, 0[$. Sur $] -\infty, 0[$, l'équation (E) s'écrit $y' + \left(-1 + \frac{1}{x}\right)y = -x^2$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto -1 + \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -x^2$ sont continues sur $] -\infty, 0[$, les solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$ sont de la forme $x \mapsto \lambda f_0 + f_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur $] -\infty, 0[$ et f_1 une solution de (E) sur $] -\infty, 0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $] -\infty, 0[$

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + \left(-1 + \frac{1}{x}\right)f(x) = -x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, e^{-x+\ln(-x)}f'(x) + \left(-1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x+\ln(-x)}f(x) = -x^2e^{-x+\ln(-x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (-xe^{-x}f)'(x) = x^3e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in I, (xe^{-x}f)'(x) = -x^3e^{-x}. \end{aligned}$$

Or, $\int -x^3e^{-x} dx = x^3e^{-x} - 3 \int x^2e^{-x} dx = (x^3 + 3x^2)e^{-x} - 6 \int xe^{-x} dx = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + C$, $C \in \mathbb{R}$ et donc

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur }] -\infty, 0[&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in] -\infty, 0[, xe^{-x}f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in] -\infty, 0[, f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + Ce^x}{x}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + Ce^x}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

3) Résolution de (E) sur \mathbb{R} . Soit f est une éventuelle solution de (E) sur \mathbb{R} . Nécessairement il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - x + C_1 x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + C_2 e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x + C_1 x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6 + C_2 e^x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} . \text{ Réciproquement, une telle}$$

fonction est solution sur \mathbb{R} si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = -x + o(x) + C_1 x(1 + o(1)) = (C_1 - 1)x + o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de C_1 et $f'_d(0) = C_1 - 1$.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = 6 + 3x + o(x) + \frac{6 + C_2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x} = \frac{6 + C_2}{x} + 6 + C_2 + \left(3 + \frac{C_2}{2}\right)x + o(x)$$

Si $C_2 \neq -6$, f n'a pas de limite réelle quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et si $C_2 = -6$, $f(x) = o(x)$. Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $C_2 = -6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = o(x)$ et $f'_g(0) = 0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. Ceci équivaut à $C_2 = -6$ et $C_1 = 1$.

L'équation (E) admet une solution et une seule sur \mathbb{R} à savoir la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{6(1 - e^x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} .$

2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du type (E) : $ay'' + by' + cy = g(x)$ où a, b et c sont trois constantes complexes ($a \neq 0$) et g est une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} . Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (les coefficients du premier membre ne varient pas quand x varie).

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions f , deux fois dérivables sur I à valeurs dans \mathbb{C} , vérifiant :

$$\forall x \in I, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = g(x).$$

L'équation homogène (ou « sans second membre ») associée à l'équation (E) est l'équation (E_h) : $ay'' + by' + cy = 0$.

2.1 Le théorème de CAUCHY

On admet le théorème suivant (dont la démonstration est hors programme et dépasse de toute façon le niveau de maths sup) :

Théorème 8. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et g une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} .

Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, il existe une solution f de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = g$ sur I et une seule vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Intéressons nous maintenant à l'équation homogène.

2.2 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

2.2.1 Le cas général où a, b et c sont complexes

On se donne trois nombres complexes a, b et c , a étant non nul. On veut résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ (E_h), c'est-à-dire on veut trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} , vérifiant pour tout réel x , $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$.

Découvrons le résultat. Par analogie avec le premier ordre, cherchons des solutions f de la forme $x \mapsto e^{zx}$, $z \in \mathbb{C}$. f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = az^2 e^{zx} + bze^{zx} + ce^{zx} = (az^2 + bz + c) e^{zx}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (az^2 + bz + c) e^{zx} \\ &\Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0 \text{ (car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{zx} \neq 0). \end{aligned}$$

L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, d'inconnue une fonction f , s'est « transformée » en une équation algébrique d'inconnue un nombre complexe z .

DÉFINITION 1. Soient a , b et c trois nombres complexes, a étant non nul. Soit (E_h) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

L'équation caractéristique de l'équation (E_h) est l'équation (E_c) :

$$az^2 + bz + c = 0,$$

d'inconnue un nombre complexe z .

On sait que deux cas de figure se présentent :

1er cas. Si $b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation (E_c) admet dans \mathbb{C} deux solutions distinctes r_1 et r_2 . D'après le travail fait plus haut, les deux fonctions $f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E_h) sur \mathbb{R} . On obtient alors beaucoup d'autres solutions : les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, sont des solutions de (E_h) sur \mathbb{R} . En effet,

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'' + b(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + c(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 (af_1'' + bf_1' + cf_1) + \lambda_2 (af_2'' + bf_2' + cf_2) \\ &= \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\} \subset \mathcal{S}_h$. On va maintenant démontrer que l'on a obtenu toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} ou encore on va démontrer que $\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\} = \mathcal{S}_h$.

Soit f une solution de (E_h) sur \mathbb{R} . Posons $y_0 = f(0)$ et $z_0 = f'(0)$. Pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ et $x \in \mathbb{R}$, posons encore $g(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(0) = y_0 \\ g'(0) = z_0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = y_0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = y_0 - \lambda_1 \\ \lambda_1 r_1 + (y_0 - \lambda_1) r_2 = z_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (r_1 - r_2) \lambda_1 = z_0 - y_0 r_2 \\ \lambda_2 = y_0 - \lambda_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{z_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \\ \lambda_2 = y_0 - \frac{z_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \end{cases} \text{ (car } r_1 \neq r_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{z_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} \\ \lambda_2 = \frac{y_0 r_1 - z_0}{r_1 - r_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit alors g la fonction $x \mapsto \frac{z_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 x} + \frac{y_0 r_1 - z_0}{r_1 - r_2} e^{r_2 x}$. La fonction g est solution de (E_h) sur \mathbb{R} et de plus, $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. Par unicité d'une telle solution (théorème de CAUCHY), on a $g = f$ et donc f est de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. On a ainsi montré que $\mathcal{S}_h = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$ où f_1 est la fonction $x \mapsto e^{r_1 x}$ et f_2 est la fonction $x \mapsto e^{r_2 x}$.

2ème cas. Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation (E_c) admet dans \mathbb{C} une solution double $r = -\frac{b}{2a}$. La fonction $f_1 : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_h) sur \mathbb{R} . Vérifions que la fonction $f_2 : x \mapsto xe^{rx}$ est aussi solution de (E_h) sur \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = e^{rx} + rxe^{rx}$ puis $f_2''(x) = re^{rx} + re^{rx} + r^2 xe^{rx} = 2e^{rx} + r^2 xe^{rx}$ puis

$$\begin{aligned} af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x) &= a(2e^{rx} + r^2 xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (ar^2 + br + c) xe^{rx} + (2ar + b) e^{rx} \\ &= 0 \times xe^{rx} + 0 \times e^{rx} \text{ (car } r = -\frac{b}{2a}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions f_1 et f_2 sont solutions de (E_h) sur \mathbb{R} et plus généralement, comme dans le premier cas, les fonctions de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, sont solutions de (E_h) sur \mathbb{R} .

Réciproquement, soient f une solution de (E_h) sur \mathbb{R} puis $y_0 = f(0)$ et $z_0 = f'(0)$.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ puis $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. Pour tout réel x , $g(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 x e^{r_2 x} = (\lambda_1 + x \lambda_2) e^{r_1 x}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(0) = y_0 \\ g'(0) = z_0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = y_0 \\ r \lambda_1 + \lambda_2 = z_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = y_0 \\ \lambda_2 = z_0 - r y_0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Soit alors g la fonction $x \mapsto y_0 e^{r_1 x} + (z_0 - r y_0) x e^{r_1 x}$. La fonction g est solution de (E_h) sur \mathbb{R} et de plus, $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. Par unicité d'une telle solution, on a $g = f$ et donc f est de la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. On a ainsi montré que $S_h = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$ où f_1 est la fonction $x \mapsto e^{r_1 x}$ et f_2 est la fonction $x \mapsto x e^{r_1 x}$.

On peut énoncer :

Théorème 9. Soient a , b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$ puis (E_h) l'équation différentielle

$$a y'' + b y' + c y = 0.$$

On note $(E_c) : a z^2 + b z + c = 0$, l'équation caractéristique associée.

- Si (E_c) a deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- Si (E_c) a une solution double r dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

2.2.2 Le cas particulier où a , b et c sont réels

On se place maintenant dans le cas particulier où a , b et c sont réels. Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique est donc un réel. Trois cas de figure se présentent.

1er cas. On suppose que $b^2 - 4ac > 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (E_c) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 . Les solutions complexes de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On va déterminer parmi ces solutions celles qui sont réelles.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ puis $f : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \overline{f(x)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} = \overline{\lambda} e^{r_1 x} + \overline{\mu} e^{r_2 x} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \overline{\lambda} + \overline{\mu} & \text{(I)} \\ \lambda e^{r_1} + \mu e^{r_2} = \overline{\lambda} e^{r_1} + \overline{\mu} e^{r_2} & \text{(II)} \end{cases} \quad (\text{obtenu pour } x = 0 \text{ et } x = 1) \\ &\Rightarrow \begin{cases} (e^{r_2} - e^{r_1}) \lambda = (e^{r_2} - e^{r_1}) \overline{\lambda} \\ (e^{r_1} - e^{r_2}) \mu = (e^{r_1} - e^{r_2}) \overline{\mu} \end{cases} \quad (e^{r_2} \text{(I)} - \text{(II)} \text{ et } e^{r_1} \text{(I)} - \text{(II)}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \overline{\lambda} \\ \mu = \overline{\mu} \end{cases} \quad (\text{car } e^{r_1} \neq e^{r_2} \text{ puisque } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont réels et distincts}) \\ &\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si λ et μ sont réels, alors f est à valeurs dans \mathbb{R} . Ceci montre que les solutions réelles de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2ème cas. On suppose que $b^2 - 4ac = 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (E_c) admet une solution réelle double r . Les solutions complexes de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ puis $f : x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r x}$.

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (\lambda + \mu x) e^{rx} = (\bar{\lambda} + \bar{\mu}x) e^{rx} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \bar{\lambda} \\ (\lambda + \mu) e^r = (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) e^r \end{cases} \quad (\text{obtenu pour } x = 0 \text{ et } x = 1) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \bar{\lambda} \\ \mu = \bar{\mu} \end{cases} \\
&\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si λ et μ sont réels, alors f est à valeurs dans \mathbb{R} . Ceci montre que les solutions réelles de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3ème cas. On suppose que $b^2 - 4ac < 0$. Dans ce cas, l'équation caractéristique (E_c) admet deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Les solutions complexes de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{(u+iv)x} + \mu e^{(u-iv)x} = e^{ux} (\lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ puis $f : x \mapsto e^{ux} (\lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx})$.

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{ux} (\lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx}) = e^{ux} (\bar{\lambda} e^{-ivx} + \bar{\mu} e^{ivx}) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^{ivx} + \mu e^{-ivx} = \bar{\lambda} e^{-ivx} + \bar{\mu} e^{ivx} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \bar{\lambda} + \bar{\mu} \\ i\lambda - i\mu = -i\bar{\lambda} + i\bar{\mu} \end{cases} \quad (\text{obtenu pour } x = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{2v}) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \bar{\lambda} + \bar{\mu} \\ \lambda - \mu = -\bar{\lambda} + \bar{\mu} \end{cases} \\
&\Rightarrow \mu = \bar{\lambda}((I) - (II))/2.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $\mu = \bar{\lambda}$, alors pour tout réel x , $f(x) = e^{ux} (\lambda e^{ivx} + \bar{\lambda} e^{-ivx}) = e^{ux} \text{Re}(\lambda e^{ivx})$. f est donc à valeurs dans \mathbb{R} . Ceci montre que les solutions réelles de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux} \text{Re}(\lambda e^{ivx})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

En posant $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on obtient le fait que les solutions réelles de (E_h) sur \mathbb{R} , sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux} (\alpha \cos(vx) - \beta \sin(vx))$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Enfin, β décrit \mathbb{R} si et seulement si $-\beta$ décrit \mathbb{R} et donc les solutions réelles de (E_h) sur \mathbb{R} , sont aussi les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux} (\alpha \cos(vx) + \beta \sin(vx))$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On peut énoncer

Théorème 10. Soient a , b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ puis (E_h) l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

On note $(E_c) : az^2 + bz + c = 0$, l'équation caractéristique associée et Δ le discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta > 0$, (E_c) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 . Les solutions réelles de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0$, (E_c) a une solution double réelle r . Les solutions réelles de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{rx}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$, (E_c) a deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$ où $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Les solutions réelles de l'équation (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ux} (\lambda \cos(vx) + \mu \sin(vx))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples.

- Les solutions réelles sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $z^2 - 4z + 3 = 0$).
- Les solutions réelles sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-\frac{x}{2}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $4z^2 + 4z + 1 = 0$).
- Les solutions réelles sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x (\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $z^2 - 2z + 2 = 0$ et a pour solutions $1 + i$ et $1 - i$).
- Soit ω un réel strictement positif. Les solutions réelles sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (l'équation caractéristique associée est $z^2 + \omega^2 = 0$ et a pour solutions $i\omega$ et $-i\omega$). \square

2.3 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = g(x)$

2.3.1 Le cas général où g est une fonction continue

Théorème 11. Soient a , b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et g une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} puis (E) l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = g \quad (\text{E}).$$

La solution générale de l'équation (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) sur I et de la solution générale sur I de l'équation différentielle homogène associée $ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{E}_h)$.

DÉMONSTRATION . Le théorème 8 appliqué avec x_0 réel fixé de I et $y_0 = z_0 = 0$ montre que l'équation (E) admet au moins une solution f_0 sur I . Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow af'' + bf' + cf = g \Leftrightarrow af'' + bf' + cf = af_0'' + bf_0' + cf_0 \\ &\Leftrightarrow a(f - f_0)'' + b(f - f_0)' + c(f - f_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f - f_0 \text{ solution de } (\text{E}_h) \text{ sur } I \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } f_1 \text{ solution de } (\text{E}_h) \text{ sur } I \text{ telle que } f - f_0 = f_1 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } f_1 \text{ solution de } (\text{E}_h) \text{ sur } I \text{ telle que } f = f_0 + f_1. \end{aligned}$$

Une solution quelconque de (E) sur I est donc la somme d'une solution particulière de (E) sur I et d'une solution quelconque de (E_h) sur I . \square

2.3.2 Quelques exemples avec un second membre particulier

On doit savoir déterminer sans aide une solution particulière de (E) sur I dans quelques cas particuliers concernant le second membre.

2.3.2.1 Second membre du type $Ae^{\lambda x}$, $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$

L'équation différentielle (E) s'écrit donc $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda x}$. Cherchons une solution particulière de la forme $f : x \mapsto A'e^{\lambda x}$, $A' \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x , on a

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = A'(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x},$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = Ae^{\lambda x} \Leftrightarrow A'(a\lambda^2 + b\lambda + c) = A.$$

Si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ ou encore si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c) , la fonction $x \mapsto \frac{A}{a\lambda^2 + b\lambda + c}e^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R} .

• Si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ou encore si λ est racine de l'équation caractéristique (E_c) , cherchons une solution particulière de (E) de la forme $f : x \mapsto A'xe^{\lambda x}$, $A' \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x , on a $f'(x) = A'(1 + \lambda x)e^{\lambda x}$ puis $f''(x) = A'(\lambda + \lambda(1 + \lambda x))e^{\lambda x} = A'(\lambda^2 x + 2\lambda)e^{\lambda x}$ puis

$$\begin{aligned} af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= A'(a(\lambda^2 x + 2\lambda) + b(1 + \lambda x) + cx)e^{\lambda x} \\ &= A'((a\lambda^2 + b\lambda + c)x + (2a\lambda + b))e^{\lambda x} \\ &= A'(2a\lambda + b)e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = Ae^{\lambda x} \Leftrightarrow A'(2a\lambda + b) = A.$$

Si $2a\lambda + b \neq 0$ ou encore si $\lambda \neq -\frac{b}{2a}$ ou encore si λ est racine de (E_c) sans être racine double de (E_c) , alors la fonction $x \mapsto \frac{A}{2a\lambda + b}xe^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R} .

• Si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b = 0$ ou encore si λ est racine double de l'équation caractéristique (E_c) , cherchons une solution particulière de (E) de la forme $f : x \mapsto A'x^2e^{\lambda x}$, $A' \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x , on a $f'(x) = A'(2x + \lambda x^2)e^{\lambda x}$ puis $f''(x) = A'(2 + 2\lambda x + \lambda(\lambda x^2 + 2x))e^{\lambda x} = A'(\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 2)e^{\lambda x}$ puis

$$\begin{aligned} af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= A' (a(\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 2) + b(\lambda x^2 + 2x) + cx^2) e^{\lambda x} \\ &= A' ((a\lambda^2 + b\lambda + c)x^2 + 2(2a\lambda + b)x + 2a) e^{\lambda x} \\ &= 2A' a e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, af''(x) + bf'(x) + cf(x) = Ae^{\lambda x} \Leftrightarrow 2A'a = A.$$

Dans ce cas, la fonction $x \mapsto \frac{A}{2a}x^2 e^{\lambda x}$ est solution de l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R} . On a montré que :

Théorème 12. Soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = Ae^{\lambda x}$ où a, b, c, A et λ sont des nombres complexes, a étant non nul.

- Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$, il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto A'e^{\lambda x}$ où A' est un nombre complexe.
- Si λ est racine de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ mais pas racine double, il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto A'xe^{\lambda x}$ où A' est un nombre complexe.
- Si λ est racine double de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$, il existe une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $x \mapsto A'x^2 e^{\lambda x}$ où A' est un nombre complexe.

2.3.2.2 Second membre du type $B \cos(\omega x)$ ou $B \sin(\omega x)$, $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$

L'équation différentielle (E) s'écrit donc $ay'' + by' + cy = B \cos(\omega x)$ avec $B \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

Si a, b et c sont réels (et $a \neq 0$) et si f est une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = Be^{i\omega x}$ alors, pour tout réel x ,

$$B \cos(\omega x) = \operatorname{Re}(Be^{i\omega x}) = \operatorname{Re}(af''(x) + bf'(x) + cf(x)) = a(\operatorname{Re}(f))''(x) + b(\operatorname{Re}(f))'(x) + c(\operatorname{Re}(f))(x),$$

et donc $\operatorname{Re}(f)$ est une solution de l'équation (E). De même, $\operatorname{Im}(f)$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = B \sin(\omega x)$.

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \cos x$. Déterminons une solution particulière de l'équation (E') : $y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$. Le nombre i n'est pas racine de l'équation caractéristique $z^2 - 3z + 2 = 0$. Donc, il existe une solution de (E) sur \mathbb{R} de la forme $f : x \mapsto Ae^{ix}$, $A \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x ,

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = A(-1 - 3i + 2)e^{ix} = A(1 - 3i)e^{ix}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = e^{ix} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, A(1 - 3i)e^{ix} = e^{ix} \\ &\Leftrightarrow A(1 - 3i) = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1 + 3i}{10}. \end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1 + 3i}{10}e^{ix}$ est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$. La partie réelle de f est alors solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \cos x$. Pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{1}{10}(1 + 3i)(\cos x + i \sin x) = \frac{1}{10}((\cos x - 3 \sin x) + i(3 \cos x + \sin x)),$$

et donc une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} est la fonction $x \mapsto \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x)$. On en déduit encore que les solutions réelles de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. □

On peut aussi chercher à priori les solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = B \cos(\omega x)$ sous la forme $x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ (mais ça ne marche pas si $i\omega$ est racine de l'équation caractéristique).

Exemple. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 10 \cos(2x)$. Cherchons une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} de la forme $f : x \mapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) &= (-4\alpha \cos(2x) - 4\beta \sin(2x)) + 2(-2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)) + 2(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)) \\ &= (-2\alpha + 4\beta) \cos(2x) + (-4\alpha - 2\beta) \sin(2x). \end{aligned}$$

On choisit alors α et β tels que $\begin{cases} -2\alpha + 4\beta = 10 \\ -4\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$ ou encore on prend $\alpha = -1$ et $\beta = 2$. La fonction $x \mapsto -\cos x + 2 \sin x$ est une solution particulière de (E) sur \mathbb{R} . \square

2.3.2.3 Principe de superposition des solutions

Théorème 13. Soient a, b, c trois nombres complexes, a étant non nul. Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Si f_1 est une solution particulière sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = g_1$ et f_2 est une solution particulière sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = g_2$, alors pour tous nombres λ_1 et λ_2 , la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$.

DÉMONSTRATION. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'' + b(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' + c(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 (af_1'' + bf_1' + cf_1) + \lambda_2 (af_2'' + bf_2' + cf_2) \\ &= \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2. \end{aligned}$$

\square

Exercice 2.

- 1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$ (E).
- 2) Trouver la solution f de (E) sur \mathbb{R} vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$.

Solution 2.

1) L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_h) est $z^2 + 2z + 2 = 0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i$. On sait que les solutions réelles de (E_h) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour tout réel x , $\cos(x) \operatorname{ch}(x) = \operatorname{Re}(e^{ix} \operatorname{ch}(x)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x})$. Notons (E_1) l'équation $y'' + 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f_1 + f_2)$ est une solution de (E) sur \mathbb{R} d'après le principe de superposition des solutions.

• (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1 : x \mapsto ae^{(1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x ,

$$f_1''(x) + 2f_1'(x) + 2f_1(x) = a((1+i)^2 + 2(1+i) + 2)e^{(1+i)x} = a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

et f_1 est solution de (E_1) sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{4+4i} = \frac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x) = \frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.

• (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2 : x \mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a \in \mathbb{C}$. Pour tout réel x , $f_2'(x) = a(1 + (-1+i)x)e^{(-1+i)x}$ puis $f_2''(x) = a(-1+i + (-1+i)(1 + (-1+i)x))e^{(-1+i)x} = (-2+2i-2ix)$ et donc

$$f_2''(x) + 2f_2'(x) + 2f_2(x) = a(-2+2i-2ix + 2(1 + (-1+i)x) + 2x)e^{(-1+i)x} = 2iae^{(-1+i)x}$$

et f_2 est solution de (E_2) sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{2i}$ ou encore $a = -\frac{i}{2}$. On obtient $f_2(x) = -\frac{i}{2}xe^{(-1+i)x}$.

• Une solution particulière f_0 de (E) sur \mathbb{R} est donc définie pour tout réel x par

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1-i}{8} e^{(1+i)x} - \frac{i}{2} x e^{(-1+i)x} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{8} (1-i)(\cos(x) + i \sin(x)) e^x - \frac{i}{2} x (\cos(x) + i \sin(x)) e^{-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} (\cos(x) + \sin(x)) e^x + \frac{1}{2} x \sin(x) e^{-x} \right) \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{16}(\cos(x) + \sin(x))e^x + \frac{1}{4}x \sin(x)e^{-x} + (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2) Soit f une telle fonction. $f(0) = \frac{1}{16} + \lambda$ et donc $f(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{16}$. λ est ainsi dorénavant fixé.

Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{16}(-\sin x + \cos x)e^x + \frac{1}{16}(\cos x + \sin x)e^x + \frac{1}{4}(\sin x + x \cos x)e^{-x} - \frac{1}{4}x \sin x e^{-x} + (-\lambda \sin x + \mu \cos x)e^{-x} - (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{-x}$ puis $f'(0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \mu - \lambda = \mu + \frac{3}{16}$ et donc $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{16}$.

La solution de (E) sur \mathbb{R} vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{16}(\cos(x) + \sin(x))e^x + \frac{1}{4}x \sin(x)e^{-x} + \frac{1}{16}(\cos(x) + 3 \sin(x))e^{-x}$.
