# Trigonométrie

On rappelle ici et on complète les résultats énoncés au lycée. L'objectif à viser est la technicité. Pour cela, il faut :
① connaître par cœur les différentes formules de trigonométrie,
② savoir à quel moment s'en servir.

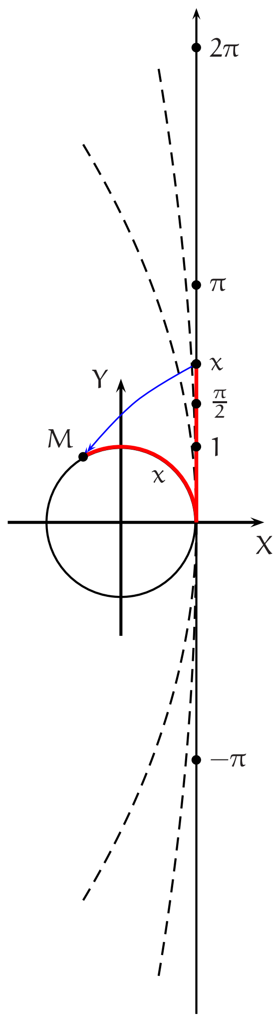
En ce qui concerne le premier point (①), au cours de l'année de mathématiques supérieures, on doit apprendre quatre formulaires : un formulaire de trigonométrie circulaire, un formulaire de dérivées, un formulaire de primitives, un formulaire de développements limités.

Il est clair que l'on n'utilise pas en permanence une formule de trigonométrie ou une formule de dérivée. Cela se produit dans certaines périodes uniquement. Dans ces moments-là, on doit alors être capable de mobiliser la formule exacte, et en particulier on doit l'avoir mémorisée. On peut donner sur le sujet deux conseils. Premièrement, chaque fois au cours de l'année, que vous vous retrouverez face à une formule de trigonométrie (ou de dérivée, ...) que vous ignorez (à la suite d'une colle, d'un devoir, ...), profitez-en pour prendre immédiatement dix minutes de votre temps pour **réapprendre la totalité du formulaire**. Deuxièmement, **affichez vos formulaires** sur vos murs, et ceci en plusieurs exemplaires dans des endroits stratégiques de votre habitation. Si vous suivez ces deux conseils, vous sortirez de mathématiques supérieures en connaîssant vos formules, ce qui est un objectif essentiel à atteindre.

En ce qui concerne le deuxième point (②), vous trouverez dans un certain nombre d'exercices de ce chapitre des raisons qui poussent à utiliser telle ou telle formule de trigonométrie plutôt que telle autre.

## Plan du chapitre

# 1 Mesures en radian d'un angle orienté




Le plan est rapporté à un repère orthormé direct $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ ou encore $(OXY)$. Au lycée, vous avez appris à « enrouler » l'axe réel sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre $O$ et de rayon $1$, orienté dans le sens direct.

A chaque réel $x$ correspond un et un seul point du cercle trigonométrique.
Si $x$ est positif, le point $M$ associé à $x$ est le point du cercle obtenu en parcourant une longueur $x$ sur ce cercle, dans le sens direct, à partir du point de coordonnées $(1, 0)$.
Si $x$ est négatif, on parcourt sur le cercle une longueur $|x| = -x$ dans le sens indirect.

Ainsi, tout réel est associé à un et un seul angle et si $M$ est le point associé au réel $x$ alors $x$ s'appelle **UNE mesure** en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{OM}\right)$. Ici, l'unité de mesure est la longueur du rayon du cercle trigonométrique, à savoir $1$ et $|x|$ est le nombre de rayons qui constituent l'arc de cercle qui va de $O$ à $M$, d'où le mot *radian*.

Inversement, puisque le tour complet a une longueur égale à $2\pi$, deux réels mesurent un même angle si et seulement si leur différence est un multiple entier (relatif) de $2\pi$. Tout angle admet donc une infinité de mesures et

si $\alpha$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{OM})$,
l'ensemble des mesures de l'angle $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{OM})$
est l'ensemble des nombres de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Cet ensemble se note $\alpha + 2\pi\mathbb{Z}$.
$\alpha + 2\pi\mathbb{Z} = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi, des réels différents peuvent mesurer un même angle. Par exemple, les réels $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ **sont des réels différents** ($\frac{\pi}{2} = 1,57\ldots$ et $\frac{5\pi}{2} = 7,85\ldots$) mais ces deux réels sont deux mesures distintes d'un même angle. Dit autrement, le réel $\frac{\pi}{2}$ n'est pas un angle mais le réel $\frac{\pi}{2}$ est une mesure parmi tant d'autres d'un certain angle orienté, le quart de tour direct. L'ensemble des mesures de cet angle est $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\ldots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\right\}$.

**Théorème 1.** Tout angle orienté admet une et une seule mesure dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, appelée **mesure principale** de l'angle orienté.

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en est une et une seule qui appartient à $[0, 2\pi[$. Cette mesure est la **mesure principale** de cet angle orienté. Quand on dispose d'une mesure d'un angle orienté, on peut trouver sa mesure principale de manière systématique grâce à la fonction « partie entière » (voir le chapitre « fonctions de référence »). Pour l'instant, contentons nous de « bricolages ».

**Exercice 1.** Trouver la mesure principale d'un angle de mesure **1)** $\frac{71\pi}{4}$, **2)** $-\frac{17\pi}{3}$.

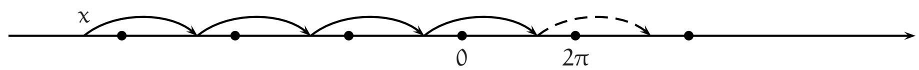
**Solution 1.**

**1)** $0 \leqslant \frac{71\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{71\pi}{4} \leqslant 2k\pi < -\frac{71\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow -\frac{71}{8} \leqslant k < -\frac{71}{8} + 1 \Leftrightarrow k = -8$.
Puisque $\frac{71\pi}{4} - 8 \times 2\pi = \frac{7\pi}{4}$, la mesure principale d'un angle de mesure $\frac{71\pi}{4}$ est $\frac{7\pi}{4}$.

**2)** $0 \leqslant -\frac{17\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{17\pi}{3} \leqslant 2k\pi < \frac{17\pi}{3} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{17}{6} \leqslant k < \frac{17}{6} + 1 \Leftrightarrow k = 3$.
Puisque $-\frac{17\pi}{3} + 3 \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$, la mesure principale d'un angle de mesure $-\frac{17\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$.

⇨ **Commentaire** .

◇ *L'existence et l'unicité de la mesure pricipale d'un angle de mesure* $x$ *peut se comprendre sur le schéma suivant :*




*On part de* $x$ *et on se dirige vers l'intervalle* $[0, 2\pi[$ *en faisant des pas de longueur* $2\pi$. *Quand on arrive juste en dessous de* $0$ *(ou juste au-dessus de* $2\pi$ *si on est parti d'un* $x \geqslant 2\pi$*), le pas suivant est suffisamment long pour nous faire dépasser* $0$*, mais trop court pour nous faire dépasser* $2\pi$ *et on tombe donc dans l'intervalle* $[0, 2\pi[$*. Puis, si on effectue encore un pas, on ressort forcément de cet intervalle.*

◇ *Pour trouver la mesure principale d'un angle de mesure* $\frac{71\pi}{4}$*, nous avons cherché un nombre de tours à retrancher à* $\frac{71\pi}{4}$ *pour tomber dans l'intervalle* $]0, 2\pi[$ *(*$\frac{71\pi}{4}$ *n'étant clairement pas un nombre entier de tours). Puisque* $\frac{\pi}{4}$ *est un huitième de tours ou encore, puisque* $2\pi = 8 \times \frac{\pi}{4}$*, nous avons cherché « le plus grand multiple de* $8$ *qui rentrait dans* $71$ *». En clair, nous avons effectué la division euclidienne de* $71$ *par* $8$ *:* $71 = 64 + 7 = 8 \times 8 + 7$*, et en retranchant* $8$ *tours à* $\frac{71\pi}{4}$*, la mesure obtenue est dans* $]0, 2\pi[$*.*

◇ *Les considérations précédentes montrent que le travail à effectuer nécessite des connaissances en arithmétique (ou des connaissances sur la partie entière d'un réel) et nous attendrons donc de les avoir pour mettre ce travail définitivement au point.*

◇ *La notion de mesure principale est subjective. Il n'y a à priori aucune raison de distinguer telle mesure plutôt que telle autre. Nous avons choisi de privilégier la mesure élément de* $[0, 2\pi[$*, parce que cette mesure donne systématiquement la longueur de l'arc de cercle correspondant. Nous aurions tout aussi bien pu choisir comme mesure principale, celle des mesures qui est dans* $]-\pi, \pi]$*, en ayant cette fois-ci en ligne de mire la parité des fonctions sinus et cosinus.*

## 2 Les lignes trigonométriques

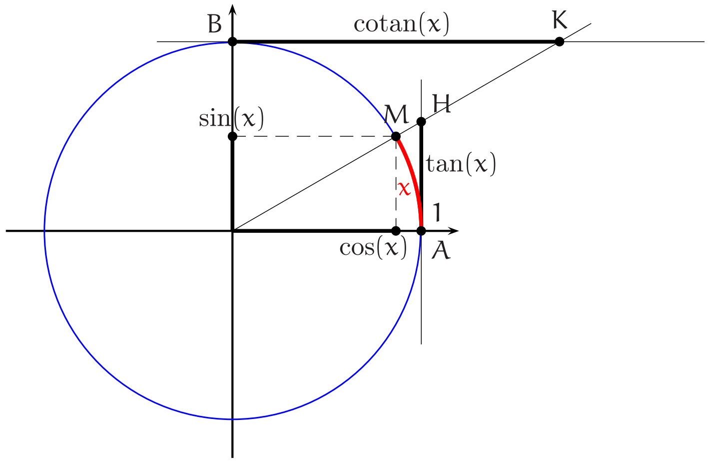
Pour mesurer un angle, on a mesuré une longueur sur un cercle. Mesurer des « longueurs courbes » est difficile, et on préfère de loin mesurer des lignes droites, les différentes **lignes trigonométriques** : le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente*.

Le mot *sinus* peut prêter à confusion. Nous avons effectivement dans la partie supérieure de notre nez deux sinus. Ce sinus là vient du latin et a la même étymologie que le mot *sein* par exemple. Il signifie « pli (d'un vêtement) » ou « renflement » ou « courbure » ou « bosse »... Ce *sinus* est apparu au moyen-âge peu de temps avant le mot sinus de la trigonométrie.
Le mot *sinus* de la trigonométrie a une longue histoire. Il s'est appelé **jiva** en sanscrit (en 500 ap.JC environ), ce qui signifie *corde d'arc*. Il est passé à l'arabe sous la forme **jîba**, mot qui n'a pas d'autre signification en arabe, et ceci grâce au mathématicien Al-Fazzari (8ème siècle). Mais quand Gérard de Crémone (1114-1187) traduit Al-Fazzari en latin, celui-ci commet une erreur de transcription et donc de traduction en transformant le mot **jîba** en **jaîb**, mot qui cette fois-ci veut dire « pli (d'un vêtement) » ou « renflement »... Il traduit donc ce mot par *sinus*. C'est enfin Regiomontanus (1436-1476) qui systématise l'emploi du mot au sens où nous le connaissons aujourd'hui et entérine ainsi l'erreur de traduction. d'Alembert (1717-1783) dans son encyclopédie donne la définition suivante du mot sinus : « ligne droite tirée d'une extrémité d'un arc perpendiculairement au rayon qui passe par l'autre extrémité ». Le sinus de la trigonométrie n'a donc aucun rapport avec les sinus qui se trouvent dans la partie supérieure de notre nez.

Pour construire le mot *cosinus*, on a apposé au mot sinus le préfixe *co* qui vient de la préposition latine *cum* signifiant *avec*. Le cosinus est donc une ligne trigonométrique qui va avec le sinus ou encore qui est associée au sinus.

Signalons enfin l'étymologie du mot *trigonométrie* : du grec *tria* (trois) *gonia* (angles) *metron* (mesure) ou encore **mesure des trois angles** (d'un triangle).

## 2.1 Définition des lignes trigonométriques




$\cos(x) =$ abscisse de $M$

$\sin(x) =$ ordonnée de $M$

$\tan(x) = \overline{AH}$

$\text{cotan}(x) = \overline{BK}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On appelle *cercle trigonométrique* le cercle de centre $O$ et de rayon $1$ orienté dans le sens direct.
On se donne un réel $x$. On note $M$ le point du cercle trigonométrique tel que $x$ soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Le *cosinus* du réel $x$ est l'abscisse du point $M$ et le *sinus* du réel $x$ est l'ordonnée du point $M$.
Ensuite, on note $(T)$ (resp. $(T')$) la tangente au cercle de centre $O$ et de rayon $1$ au point $A(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). Si $x$ n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (resp. $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), la droite $(OM)$ n'est pas parallèle à $(T)$ (resp. $(T')$). Elle coupe donc $(T)$ (resp. $(T')$) en un point $H$ (resp. $K$). Par définition, la *tangente* (resp. la *cotangente*) du réel $x$ est la mesure algébrique $\overline{AH}$ (resp. $\overline{BK}$) c'est-à-dire la longueur $AH$ (resp. la longueur $BK$) affectée d'un signe $+$ ou $-$ suivant que $H$ soit au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses (resp. $K$ soit à droite ou à gauche de l'axe des ordonnées).

Le théorème de Thales montre immédiatement que

**Théorème 2.**

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \notin \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \forall x \notin \pi\mathbb{Z},\ \text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \forall x \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z},\ \text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} \end{array}}$$

Ensuite, d'après le théorème de Pythagore,

**Théorème 3.** Pour tout réel $x$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

⇨ **Commentaire** . *Ce théorème fondamental permet en particulier de calculer l'une des deux lignes trigonométriques quand on connaît son signe et la valeur de l'autre ligne :* $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$ *ou* $\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

**Théorème 4.** $\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)| \leqslant 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant 1$.

**Démonstration .** $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leqslant 1$, et donc $|\cos(x)| = \sqrt{\cos^2(x)} \leqslant \sqrt{1} = 1$, et de même pour $|\sin(x)|$. ❏

**Théorème 5.** Soient $a$ et $b$ deux réels. $(\exists \theta \in \mathbb{R}/\ a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

**Démonstration .** Soient $a$ et $b$ deux réels. S'il existe $\theta$ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$, le théorème 3 montre que $a^2 + b^2 = 1$.
Réciproquement, si $a^2 + b^2 = 1$, le point $M(a, b)$ est un point du cercle trigonométrique. Soit $\theta = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$). On sait que le point $M$ a pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et donc que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. ❏

**Théorème 6.**

❶ Pour tout réel $x$ n'appartenant pas à $\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$.

❷ Pour tout réel $x$ n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1+\text{cotan}^2(x)$.

**Démonstration .**

Pour $x \notin \dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$.

Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1+\text{cotan}^2(x)$. ❑

⇨ **Commentaire** . *Ces égalités jointes aux théorèmes 2 et 3 et permettent de calculer les quatre lignes trigonométriques d'un angle quand on connaît leurs signes et l'une de ces quatre lignes. Par exemple, on sait maintenant exprimer* $\cos(x)$ *en fonction de* $\sin(x)$ *(*$\pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$*), ou en fonction de* $\tan(x)$ *(*$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$*), ou en fonction de* $\text{cotan}(x)$ *(*$\pm\sqrt{1-\sin^2(x)} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{1+\text{cotan}^2(x)}} = \ldots$*).*

**Exercice 2.**

**1)** On suppose que $x$ est un réel élément de $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ tel que $\cos(x) = -\dfrac{4}{5}$. Calculer $\sin(x)$, $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$.

**2)** On suppose que $x$ est un réel élément de $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\tan(x) = \dfrac{1}{3}$. Calculer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\text{cotan}(x)$.

**Solution 2.**

**1)** Puisque $x \in \left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$, $\tan(x) \leqslant 0$ et $\text{cotan}(x) \leqslant 0$.

Puisque $\sin(x) \geqslant 0$, $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$.

Puis $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{3}{4}$ et $\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = -\dfrac{4}{3}$.

**2)** Puisque $x \in \left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \leqslant 0$, $\sin(x) \leqslant 0$ et $\text{cotan}(x) \geqslant 0$.

Puisque $\cos(x) \leqslant 0$, $\cos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{9}}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Puis $\sin(x) = \tan(x)\cos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = 3$.

## 2.2 Valeurs usuelles

| angle en radian | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **angle en degré** | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
| **sinus** | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| **cosinus** | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| **tangente** | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |
| **cotangente** | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

On note que la ligne des sinus s'écrit

$$\frac{\sqrt{0}}{2},\ \frac{\sqrt{1}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Les autres lignes s'en déduisent.

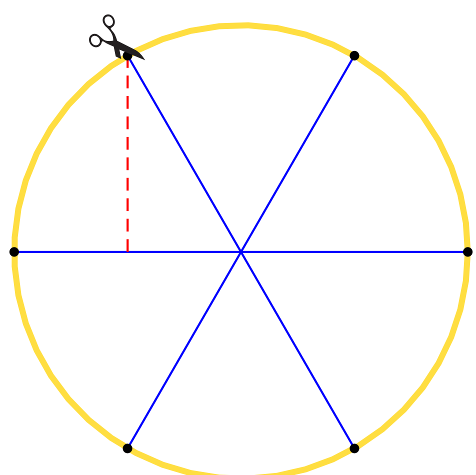
D'autre part, il est important d'avoir en tête les valeurs numériques usuelles. Un formulaire complet des valeurs numériques usuelles à connaître a déjà été fourni. Ici, on doit savoir que :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707\ldots,\ \sqrt{2} = 1,414\ldots,\ \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866\ldots,\ \sqrt{3} = 1,732\ldots,\ \text{et}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577\ldots}$$

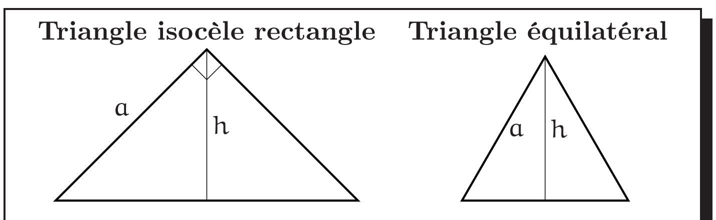
Rappelons le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Ces nombres sont positifs et égaux. Donc, $1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Puis, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Notons que l'emploi de la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est très fréquemment meilleur (sans l'être systématiquement) que l'emploi de la valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$, car la première expression est simplifiée (par exemple, le carré de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\frac{1}{2}$ alors que le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\frac{2}{4}$).

Rappelons aussi le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Dans ce cas, le triangle $(OAM)$ de la page 4 est équilatéral et la hauteur issue de $M$ est encore la médiatrice du segment $[O, A]$. L'abscisse de $M$, à savoir $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, est donc $\frac{1}{2}$. Ensuite, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ce résultat est utile pour découper une pizza en six parties égales. On visualise le **milieu** d'un rayon et on remonte perpendiculairement à ce rayon au bord de la pizza, c'est-à-dire à la croûte...(nous verrons plus tard comment découper une pizza en 5).



Profitons-en enfin pour rappeler les liens entre hauteurs et côtés dans un triangle isocèle rectangle (ou encore un demi carré) et un triangle équilatéral.




$h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $a = h\sqrt{2}$ $\qquad$ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, la diagonale d'un carré est $\sqrt{2}$ fois son côté, et inversement le côté d'un carré est sa diagonale divisée par $\sqrt{2}$.

## 2.3 La notation $e^{ix}$

Pour tout réel $x$, on pose

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

(où $i$ est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$). $e^{ix}$ n'est autre que l'affixe du point $M$ du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$ (le plan étant toujours rapporté à un repère orthonormé direct). Cet objet va devenir rapidement **l'outil fondamental de la trigonométrie**. On doit déjà en connaître des valeurs usuelles :

$$\boxed{e^0 = 1,\ e^{i\pi/2} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{-i\pi/2} = -i,\ \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i.}$$

On doit ensuite en connaître les premières propriétés :

**Théorème 7.**

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in \mathbb{R},\ |e^{ix}| = 1 \text{ et en particulier, } \forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} \neq 0.\\ \forall x \in \mathbb{R},\ \overline{(e^{ix})} = e^{-ix} = \dfrac{1}{e^{ix}}.\end{array}}$$

**Démonstration .** $\left|e^{ix}\right| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$. D'autre part, $\overline{e^{ix}} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}$. Mais alors, $e^{ix}e^{-ix} = e^{ix}\overline{e^{ix}} = \left|e^{ix}\right|^2 = 1$ et donc $\dfrac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$. ❑

On doit aussi connaître les expressions de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$ en fonction de $e^{ix}$ :

**Théorème 8 (formules d'Euler).**

**Formules d'Euler**

❶ $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \text{Re}\left(e^{ix}\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \text{Im}\left(e^{ix}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

❷ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \tan(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ \text{cotan}(x) = \dfrac{i(e^{ix} + e^{-ix})}{e^{ix} - e^{-ix}}$.

# 3 Formulaire de trigonométrie circulaire

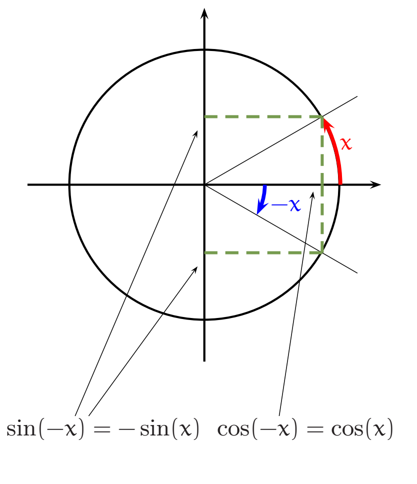
## 3.1 Comparaison de lignes trigonométriques

| | **Tour complet** | |
|---|---|---|
| | $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$<br>$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$<br>$\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$<br>$\text{cotan}(x + 2\pi) = \text{cotan}(x)$ | |
| **Angle opposé** | **Demi-tour** | **Quart de tour direct** |
| $\cos(-x) = \cos(x)$<br>$\sin(-x) = -\sin(x)$<br>$\tan(-x) = -\tan(x)$<br>$\text{cotan}(-x) = -\text{cotan}(x)$ | $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$<br>$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$<br>$\tan(x + \pi) = \tan(x)$<br>$\text{cotan}(x + \pi) = \text{cotan}(x)$ | $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$<br>$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$<br>$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotan}(x)$<br>$\text{cotan}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x)$ |
| **Quart de tour indirect** | **Angle supplémentaire** | **Angle complémentaire** |
| $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$<br>$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$<br>$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotan}(x)$<br>$\text{cotan}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x)$ | $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$<br>$\sin(\pi - x) = \sin(x)$<br>$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$<br>$\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}(x)$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$<br>$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$<br>$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}(x)$<br>$\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$ |

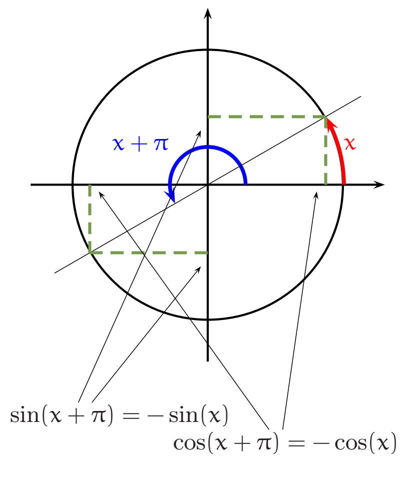
⇨ **Commentaire** .

◇ *Toutes ces formules s'obtiennent par lecture directe d'un graphique et par exemple, il n'est pas question d'obtenir la formule* $\cos(x+\pi) = \cos(x)$ *à partir des formules d'addition refournies plus loin :* $\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$.

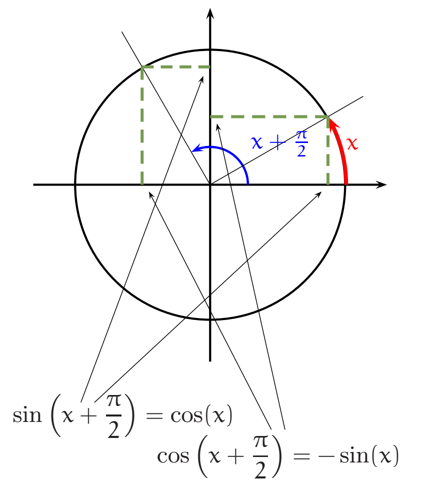
***Angle opposé***



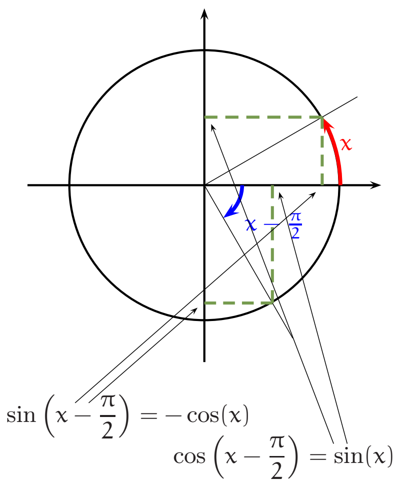

***Demi-tour***



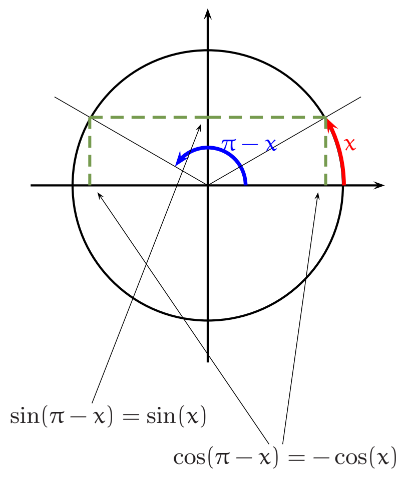

***Quart de tour direct***



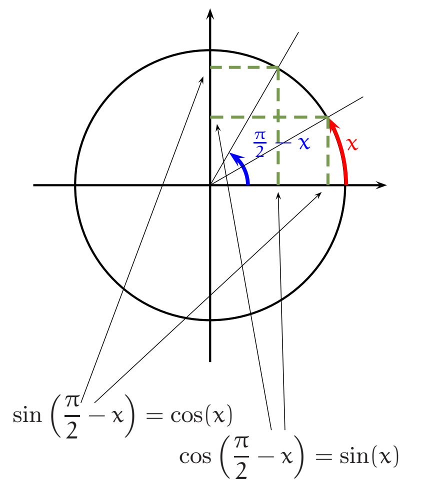

***Quart de tour indirect***




***Angle supplémentaire***




***Angle complémentaire***




◇ *Aucune des formules ci-dessus n'a été fournie avec ses conditions de validité et* ***c'est un tort****. Les formules en sinus et cosinus sont valables pour tout réel* $x$*. Les formules n'utilisant que la tangente sont valables pour* $x$ *n'appartenant pas à* $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$*, celles n'utilisant que la cotangente sont valables pour* $x$ *n'appartenant pas à* $\pi\mathbb{Z}$ *et celles utilisant à la fois la tangente et la cotangente sont valables pour* $x$ *n'appartenant pas à* $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

**Exercice 3.** Calculer **1)** $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, **2)** $\tan\left(\frac{14\pi}{3}\right)$, **3)** $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$.

**Solution 3.**

**1)** $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**2)** $\tan\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}+5\pi\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

**3)** $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}-6\pi\right) = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

**Exercice 4.** Pour $x$ réel et $n$ entier relatif, simplifier **1)** $\cos(x+n\pi)$, **2)** $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$, **3)** $\tan(x+n\pi)$.

**Solution 4.**

**1)** On ajoute (ou on retranche) $n$ (ou $-n$) demi-tours. Si $n$ est pair, le cosinus est inchangé et si $n$ est impair, le cosinus est changé en son opposé. Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x)$.

**2)** On ajoute (ou on retranche) $n$ (ou $-n$) quarts de tours.
• Si $n$ un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours et le sinus est inchangé.
• Si $n$ est 1 de plus qu'un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours plus un quart de tour direct et dans ce cas, $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.
• Si $n$ est 2 de plus qu'un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours plus un demi-tour et dans ce cas, $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi) = -\sin(x)$.
• Si $n$ est 3 de plus qu'un multiple de 4, on a effectué un nombre entier de tours plus trois quarts de tour direct et dans ce cas, $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos(x)$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin(x) \text{ si } n \in 4\mathbb{Z} \\ \cos(x) \text{ si } n \in 1+4\mathbb{Z} \\ -\sin(x) \text{ si } n \in 2+4\mathbb{Z} \\ -\cos(x) \text{ si } n \in 3+4\mathbb{Z}. \end{cases}$.

**3)** $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \tan(x+n\pi) = \tan(x)$.

---

⇨ **Commentaire** .

◇ *On doit mémoriser certains des résultats ci-dessus :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x),\ \sin(x+n\pi) = (-1)^n\sin(x),\ \cos(n\pi) = (-1)^n,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n.$$

◇ *L'expression explicite de* $\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ *est aussi la dérivée* $n$*-ème de la fonction sinus.*

## 3.2 Formules d'addition et de duplication

**Théorème 9 (formules d'addition et de duplication).**

| Formules d'addition | Formules de duplication |
|---|---|
| $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$<br>$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ | $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$ |
| $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$<br>$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ | $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ |
| $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$<br>$\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ | $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ |

Les formules d'addition pour sinus et cosinus sont démontrées en 1ère S. Rappelons-en brièvement les idées. On suppose acquise l'expression du produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormal.

On se donne deux réels $a$ et $b$. On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ($\overrightarrow{u}$ est donc le vecteur de norme 1 tel que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right) = a\ [2\pi]$) et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$ ($\overrightarrow{v}$ est donc le vecteur de norme 1 tel que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}\right) = b\ [2\pi]$), alors

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Mais on a aussi $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right) - \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}\right) = a - b\ [2\pi]$ et donc

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \cos\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) = \cos(a-b).$$

Finalement, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Pour $\cos(a+b)$, on remplace $b$ par $-b$ dans la formule précédente. Pour $\sin(a+b)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(a + \left(b - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(a)\cos\left(b - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)\sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).\end{aligned}$$

Les formules de duplication (exprimant le cosinus et le sinus du double d'un angle en fonction du cosinus et du sinus de cet angle) s'en déduisent en égalant $a$ et $b$. On a effectivement trois expressions différentes de $\cos(2x)$ et on doit connaître les trois. Par exemple, la dernière donne l'expression de $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement et permet ainsi, sachant que $\sin(x) = \dfrac{3}{5}$, de fournir $\cos(2x) = 1 - 2 \times \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25}$ sans pour autant connaître $x$. Démontrons maintenant les formules concernant la tangente :

**Démonstration .** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \notin \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $b \notin \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et $a+b \notin \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a alors $\cos(a) \neq 0$, $\cos(b) \neq 0$ et donc $\cos(a)\cos(b) \neq 0$. Par suite, on peut écrire :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))/(\cos(a)\cos(b))}{(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))/(\cos(a)\cos(b))} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Pour $\tan(a-b)$, on remplace alors $b$ par $-b$ dans la formule précédente, et pour $\tan(2x)$, on pose $a = b = x$ dans la formule précédente. ❏

⇨ **Commentaire** . *On doit noter que dans la formule* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ *le signe + en numérateur provient de la formule en sinus et le signe − en dénominateur provient de la formule en cosinus.*

Il est maintenant essentiel d'associer aux formules précédentes les formules en $e^{ix}$ et il ne faut plus penser ces différentes formules dans des chapitres séparés.

**Théorème 10.**

❶ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$,
❷ $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{i(a-b)} = e^{ia}/e^{ib}$,
❸ $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-ia} = \dfrac{1}{e^{ia}} = \overline{e^{ia}}$,
❹ $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{ina} = (e^{ia})^n$ (formule de Moivre).

**Démonstration .** Soit $a$ et $b$ deux réels.

❶ $\begin{aligned}e^{ia} \times e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)}.\end{aligned}$

❷ $e^{i(a-b)} \times e^{ib} = e^{i(a+b-b)} = e^{ia}$, et puisque $e^{ib} \neq 0$, $e^{i(a-b)} = \frac{e^{ia}}{e^{ib}}$.

❸ Déjà vu.

❹ C'est clair pour $n = 0$. Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout réel $a$, $(e^{ia})^n = e^{ina}$. Alors,

$$(e^{ia})^{n+1} = (e^{ia})^n \times (e^{ia}) = e^{ina} \times e^{ia} = e^{i(n+1)a}.$$

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ (e^{ia})^n = e^{ina}$.
Si maintenant, $n \leqslant 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et $(e^{ia})^n = ((e^{ia})^{-n})^{-1} = 1/e^{-ina} = e^{ina}$.

❏

A l'aide de l'expression $e^{ix}$, on peut retrouver toutes les formules de trigonométrie. Par exemple, considérons les deux formules $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$. Il n'est pas toujours évident de mémoriser celle des deux qui comporte un signe − (mais on doit savoir le lire du premier coup d'œil sur un cercle trigonométrique). Ces deux formules sont contenues dans l'unique égalité $e^{i(x+\pi/2)} = e^{i\pi/2}e^{ix}$ qui se détaille en :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = e^{i(x+\pi/2)} = e^{i\pi/2}e^{ix} = i(\cos(x) + i\sin(x)) = -\sin(x) + i\cos(x).$$

Ainsi, le signe − de l'égalité $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ n'est autre que le signe − de l'égalité $i^2 = -1$.

**Exercice 5.**

**1)** Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
**2)** Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.
**3)** Exprimer $\tan(3x)$ en fonction de $\tan(x)$ uniquement.

**Solution 5.**

**1)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

**Première solution** (mauvaise).

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = (2\cos^2(x)-1)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\ &= (2\cos^2(x)-1)\cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

**Deuxième solution** (bonne).

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}\left(e^{3ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)\\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).\end{aligned}$$

Ensuite, $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x)-1)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$, ou aussi

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \mathrm{Re}\left(e^{4ix}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^4\right) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)\\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.\end{aligned}$$

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(3x) = \mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^3) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

**3)** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(3x) = 0$ équivaut $x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right)$. Comme cet ensemble contient $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $\tan(x)$ et $\tan(3x)$ existent (ou encore $\cos(x)$ et $\cos(3x)$ sont non nuls) si et seulement si $x \notin \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right)$. Pour un tel $x$,

$$\begin{aligned}\tan(3x) &= \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \frac{\mathrm{Im}((\cos(x)+i\sin(x))^3)}{\mathrm{Re}((\cos(x)+i\sin(x))^3} = \frac{3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)}{\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)}\\ &= \frac{(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))/\cos^3(x)}{(\cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x))/\cos^3(x)} = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}.\end{aligned}$$

---

⇨ **Commentaire** .

◇ *Les formules obtenues pour* $\cos(3x)$ *et* $\sin(3x)$ *doivent être mémorisée :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x),\ \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).}$$

◇ *La première technique utilisée* $(\cos(3x) = \cos(2x+x))$ *est mauvaise selon différents points de vue. Il peut paraître bizarre et inesthétique de passer par l'« angle double* $2x$ *» alors que l'on voudrait voir une bonne fois pour toutes l'« angle* $x$ *». On sent bien d'autre part que si le nombre était un peu plus grand, les calculs deviendraient rapidement pénibles. Par exemple* $\cos(7x) = \cos(4x+3x) = \ldots$ *L'outil fondamental pour ces calculs est* $e^{ix}$ *et la merveilleuse formule de* Moivre *(jointe à la formule du binôme de* Newton *qui sera exposée dans le chapitre sur le symbole* $\Sigma$*) que l'on détaillera dans le chapitre suivant* $e^{3ix} = (e^{ix})^3$ *où l'on passe directement de l'« angle* $x$ *» à l'« angle triple* $3x$ *».*

◇ *C'est encore plus criant avec* $\tan(3x)$*. L'angle* $2x$ *n'a rien à faire au milieu des calculs et par exemple,* $\tan(2x)$ *n'existe pas pour* $x = \dfrac{\pi}{4}$ *alors que* $\tan(x)$ *et* $\tan(3x)$ *existent.*

**Exercice 6.** Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

**Solution 6.**

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

⇨ **Commentaire** .

◇ *Les valeurs obtenues sont si possible à mémoriser :*

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\text{ et }\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

◇ *L'idée* $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ *(ou aussi* $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$*) apparaît beaucoup plus clairement si on pense en degrés :* $\frac{\pi}{3}$ *correspond à* $60$ *degrés,* $\frac{\pi}{4}$ *à* $45$ *et* $\frac{\pi}{12}$ *à* $15$ *(et* $60-45=15\dots$*)*

## 3.3 Résolution d'équations trigonométriques

| **Résolution d'équations trigonométriques** | |
|---|---|
| $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cos(a)=\cos(b)$ | $\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=a+2k\pi)$ ou $(\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=-a+2k\pi)$ <br> $\Leftrightarrow(b\in a+2\pi\mathbb{Z})$ ou $(b\in -a+2\pi\mathbb{Z})$ |
| $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \sin(a)=\sin(b)$ | $\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=a+2k\pi)$ ou $(\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=\pi-a+2k\pi)$ <br> $\Leftrightarrow(b\in a+2\pi\mathbb{Z})$ ou $(b\in \pi-a+2\pi\mathbb{Z})$ |
| $\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\right)^2,\ \tan(a)=\tan(b)$ | $\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=a+k\pi)$ <br> $\Leftrightarrow(b\in a+\pi\mathbb{Z})$ |
| $\forall(a,b)\in(\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z})^2,\ \mathrm{cotan}(a)=\mathrm{cotan}(b)$ | $\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=a+k\pi)$ <br> $\Leftrightarrow(b\in a+\pi\mathbb{Z})$ |
| $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ e^{ia}=e^{ib}$ <br><br> $\forall a\in\mathbb{R},\ e^{ia}=1$ | $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ b=a+2k\pi$ <br> $\Leftrightarrow b\in a+2\pi\mathbb{Z}$ <br> $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ a=2k\pi$ <br> $\Leftrightarrow a\in 2\pi\mathbb{Z}.$ |

⇨ **Commentaire** . *Pour chacun des six types d'équation envisagés, une simple lecture du cercle trigonométrique suffit pour se convaincre du résultat.*

**Exercice 7.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1)** $\sin(x)=0$, **2)** $\sin(x)=1$, **3)** $\sin(x)=-1$, **4)** $\cos(x)=1$ **5)** $\cos(x)=-1$, **6)** $\cos(x)=0$,
**7)** $\tan(x)=0$, **8)** $\mathrm{cotan}(x)=0$.

**Solution 7.**

| | |
|---|---|
| **1)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \sin(x)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \sin(x)=0\Leftrightarrow x\in\pi\mathbb{Z}.$ |
| **2)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \sin(x)=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(x)=1\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}.$ |
| **3)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \sin(x)=-1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \sin(x)=-1\Leftrightarrow x\in-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}.$ |
| **4)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \cos(x)=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=2k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \cos(x)=1\Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}.$ |
| **5)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \cos(x)=-1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\pi+2k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \cos(x)=-1\Leftrightarrow x\in\pi+2\pi\mathbb{Z}.$ |
| **6)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \cos(x)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \cos(x)=0\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}.$ |
| **7)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \tan(x)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \tan(x)=0\Leftrightarrow x\in\pi\mathbb{Z}.$ |
| **8)** $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \mathrm{cotan}(x)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ | $(\forall x\in\mathbb{R}),\ \mathrm{cotan}(x)=0\Leftrightarrow x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}.$ |

⇨ **Commentaire** .

◇ *Pour chaque résolution, on a donné deux rédactions possibles. La deuxième est plus performante et la première est plus compréhensible et plus facile à maîtriser.*

$\diamond$ *Chacune de ces équations peut être résolue grâce à l'encadré précédent. Par exemple,* $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(0) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = 0 + 2k\pi)$ *ou* $(\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi - 0 + 2k\pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = k\pi)$*. Néanmoins, ce n'est pas ainsi que l'on a pensé la résolution. On a placé sur un cercle trigonométrique (au brouillon) tous les « points solutions », c'est-à-dire les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée vaut* $0$*. Puis, on a fourni toutes les mesures des angles correspondants et obtenu l'ensemble* $2\pi\mathbb{Z} \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$*. Cet ensemble est en fait l'ensemble des multiples de* $\pi$*, le demi-tour, ou encore l'ensemble* $\pi\mathbb{Z}$*.*

$\diamond$ *Vous devez considérer toutes les équations précédentes comme du cours à connaître par cœur.*

$\diamond$ *Une équation du type* $\tan(x) = a$ *(ou* $\text{cotan}(x) = a$*) est bien plus simple à résoudre qu'une équation du type* $\cos(x) = a$ *ou* $\sin(x) = a$*. L'équation* $\tan(x) = a$ *a toujours une infinité de solutions et si* $x_0$ *est l'une d'entre elles, alors l'ensemble des solutions est* $x_0 + \pi\mathbb{Z}$*. Plus précisément, l'équation* $\tan(x) = a$ *admet une et une seule solution dans tout intervalle de longueur* $\pi$ *fermé à gauche et ouvert à droite.*

**Exercice 8.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1)** $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$, **2)** $\cos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **3)** $\tan(x) = 1$, **4)** $\text{cotan}(x) = -\sqrt{3}$, **5)** $e^{ix} = i$, **6)** $e^{ix} = -1$.

**Solution 8.**

**1)** $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \sin(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

**2)** $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \cos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

**3)** $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \tan(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

**4)** $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \text{cotan}(x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

**5)** $(\forall x \in \mathbb{R}),\ e^{ix} = i \Leftrightarrow e^{ix} = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

**6)** $(\forall x \in \mathbb{R}),\ e^{ix} = -1 \Leftrightarrow e^{ix} = e^{i\pi} \Leftrightarrow x \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.

---

**Exercice 9.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1)** $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, **2)** $\sin(2x) = \sin(3x)$, **3)** $\sin(2x) = \cos(3x)$, **4)** $\cos(2x) = \cos^2(x)$, **5)** $e^{2ix} = e^{-ix}$.

**Solution 9.** On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

**1)** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Donc, $\mathcal{S} = \left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

**2)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \sin(3x) &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \pi - 2x + 2k\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}).\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right)$.

**3)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \cos(3x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x) &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}).\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi}{5}\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

**4)** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(2x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$.
Donc, $\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z}$.

**5)** Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2ix} = e^{-ix} \Leftrightarrow e^{3ix} = 1 \Leftrightarrow 3x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$.

Donc, $\mathcal{S} = \dfrac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$.

---

⇨ **Commentaire**.

◇ *En 3), il fallait se ramener à l'une des deux situations de base* $\sin(a) = \sin(b)$ *ou* $\cos(a) = \cos(b)$. *Nous avons choisi la deuxième. Il fallait donc « transformer un sinus en cosinus ». La manière la plus naturelle d'agir est le passage au complémentaire* $X \mapsto \dfrac{\pi}{2} - X$ *qui échange les rôles de sinus et cosinus sans problèmes de signes.*

◇ *En 4), nous avions deux possibilités, « tout écrire en* $2x$ *», ce que nous avons fait, ou tout écrire en* $x$ *:* $\cos(2x) = \cos^2(x) \Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow |\cos(x)| = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$.

## 3.4 Formules de linéarisation

| **Formules de linéarisation** | |
|---|---|
| $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ | $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ |
| $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ | $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ |
| $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ | $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$ |
| $\sin(b)\cos(a) = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$ | |

**Démonstration.** On a $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. En additionnant membre à membre ces égalités on obtient $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$ et en retranchant on obtient $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.
De même, les égalités $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ fournissent $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ et $2\sin(b)\cos(a) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$. ❏

**Exercice 10.** Dériver quatre fois les fonctions
**1)** $f_1 : x \mapsto \cos^2(x)\sin(x)$, **2)** $f_2 : x \mapsto \cos^4(x)$, **3)** $f_3 : x \mapsto \cos^4(x) + \sin^4(x)$.

**Solution 10.**

**1)** Pour $x$ réel, $\cos^2(x)\sin(x) = \cos(x)\cos(x)\sin(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}(\sin(3x) + \sin(x))$.

Par suite, $f_1$ est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x$ réel, $f_1^{(4)}(x) = \dfrac{1}{4}(81\sin(3x) + \sin(x))$.

**2)** Pour $x$ réel,

$$\begin{aligned}\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2 &= \frac{1}{4}(1+\cos(2x))^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos(2x) + \frac{1}{2}(1+\cos(4x))\right) \\ &= \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)).\end{aligned}$$

Par suite, $f_2$ est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x$ réel, $f_2^{(4)}(x) = \dfrac{1}{2^3}(2^6\cos(2x) + 2^8\cos(4x)) = 8\cos(2x) + 32\cos(4x)$.

**3)** $\cos^4(x) + \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 - 2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 - 2\left(\dfrac{\sin(2x)}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\cos(4x)}{2} = \dfrac{1}{4}(3 + \cos(4x))$.

Par suite, $f_3$ est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x$ réel, $f_3^{(4)}(x) = \dfrac{1}{2^2}(2^8\cos(4x)) = 64\cos(4x)$.

---

$\Rightarrow$ **Commentaire** .

$\diamond$ *Il est beaucoup plus facile de dériver (ou d'intégrer) des sommes que des produits. Quand on doit dériver de nombreuses fois un produit, on le transforme d'abord en une somme ou encore on* ***linéarise*** *à l'aide de formules de... linéarisation.*

$\diamond$ *Dériver une fois les fonctions sinus ou cosinus consiste à « effectuer un quart de tour direct » (voir le chapitre « fonctions de référence ») et donc, quand on dérive* 4 *fois, on est revenu au point de départ :*

$$\boxed{\cos^{(4)} = \cos \text{ et } \sin^{(4)} = \sin.}$$

$\diamond$ *En 1), on pouvait aussi écrire* $\cos^2(x)\sin(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\sin(x) = \frac{1}{2}(\sin(x)+\sin(x)\cos(2x)) = \frac{1}{2}(\sin(x)+\frac{1}{2}(\sin(3x)-\sin(x)) = \frac{1}{4}(\sin(3x)+\sin(x))$.

$\diamond$ *Pour linéariser les expressions ci-dessus, on a utilisé les formules de linéarisation pour les cosinus et les sinus. Les calculs n'étaient pas trop compliqués car* $x$ *était multiplié par un petit nombre (*$2x$, $3x$ *ou* $4x$*). Cependant, les formules de linéarisation deviennent très vite pénibles à utiliser et il faut à terme les remplacer par la formule*

$$\boxed{e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}.}$$

*Le symbole* $\times$ *a disparu de manière remarquablement simple et c'est bien ce que l'on voulait. Nous reviendrons sur les linéarisations dans le chapitre « Nombres complexes ».*

## 3.5 Formules de factorisation

| **Formules de factorisation** | |
|---|---|
| $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ | $1+\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ | $1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ | |
| $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ | |

**Démonstration .** On inverse les formules de linéarisation en changeant de plus les notations. On pose $p = a+b$ et $q = a-b$ de sorte que $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ (obtenu en ajoutant et en retranchant membre à membre les deux égalités). L'égalité $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$ s'écrit alors $\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et l'égalité $\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$ s'écrit $\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$. On fait de même pour les sinus. ❏

**Exercice 11.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = 0$.

**Solution 11.** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x)+\sin(3x) = 2\sin(2x)\cos(x)$ et donc

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = 2\sin(2x)\cos(x)+\sin(2x) = \sin(2x)(2\cos(x)+1).$$

Par suite,

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = 0 \Leftrightarrow (\sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \cup \left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}\right).$$

---

$\Rightarrow$ **Commentaire** .

$\diamond$ *Pour résoudre des équations dont le second membre est* 0 *ou étudier des signes, on doit la plupart du temps factoriser et donc utiliser ... des formules de factorisation.*

$\diamond$ *D'autre part, dans une suite arithmétique ayant un nombre impair de termes (ici* $x$ $2x$ $3x$*), il est toujours préférable de privilégier le terme médian (ici* $2x$*). Regrouper* $\sin(x)$ *et* $\sin(3x)$ *en laissant* $\sin(2x)$ *tout seul était donc sûrement plus prometteur que de regrouper* $\sin(x)$ *et* $\sin(2x)$ *par exemple.*

### 3.6 Expressions de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Pour $x$ réel n'appartenant pas à $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

**Théorème 11.**

❶ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}),\ \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

❷ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z}),\ \sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$,

❸ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z}),\ \tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$,

Démonstration .

❶ Pour $x \notin (\pi+2\pi\mathbb{Z})$, $\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

❷ Pour $x \notin (\pi+2\pi\mathbb{Z})$, $\sin(x) = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) / \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

❸ Pour $x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup (\pi+2\pi\mathbb{Z})$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

❑

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans la pratique de maths sup, ces formules ne servent pas avant le chapitre « calculs d'intégrales ». Le moment venu, elles permettront d'effectuer des changements de variables intéressants dans certaines intégrales.*

◇ *Néanmoins, si on doit faire face à une équation où apparaissent les expressions* $\cos(x)$, $\sin(x)$ *et* $\tan(x)$, *expressions qui peuvent être vécues comme trois inconnues différentes, une idée de résolution peut être de « tout passer en* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ *», de sorte qu'il n'y a plus qu'une inconnue : le réel* $t$.

### 3.7 Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$

On se donne deux réels $a$ et $b$, l'un au moins de ces deux réels étant non nul. On considère l'expression $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. Dans cette expression, la variable apparaît deux fois ce qui rend délicat la résolution de l'équation $f(x) = 0$ ou l'étude des variations. On veut trouver une écriture de $f(x)$ où la variable n'apparaît qu'une fois. On a en ligne de mire la formule

$$\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B) = \cos(A - B).$$

On fait apparaître devant $\cos(x)$ et $\sin(x)$ le cosinus et le sinus d'un angle en se servant du théorème 5 page 4. Les deux nombres $a$ et $b$ n'ont aucune raison d'être le cosinus et le sinus d'un angle. Mais si on norme le vecteur $\overrightarrow{u}(a, b)$ en le divisant par sa norme $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$, les deux nombres obtenus $a' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $b' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ vérifient bien sûr

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Le théorème 5 page 4 permet alors d'affirmer l'existence d'un réel $\theta$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pour $x$ réel, on peut écrire

$$\begin{aligned} a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \sin(x)\right) = \sqrt{a^2+b^2}(\cos(x)\cos(\theta) + \sin(x)\sin(\theta)) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \theta). \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } (a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.\\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta),\\ \text{où } \theta \text{ est un réel tel que } \cos(\theta)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\theta)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{array}}$$

**Exercice 11.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations **1)** $\cos(x)+\sin(x)=1$, **2)** $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=3$.

**Solution 11.**

**1)** Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x)=1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\mathbb{Z}\right)\right) \text{ ou } \left(x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi\mathbb{Z}\right)\right)\Leftrightarrow x\in 2\pi\mathbb{Z}\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\right).\end{aligned}$$

**2)** Soit $x\in\mathbb{R}$. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=3\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\dfrac{1}{2}\sin(x)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$.

Cette équation n'a pas de solution car $\dfrac{3}{2}>1$.

---

⇨ **Commentaire** . *Il était tout aussi valable d'écrire* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ *ou aussi* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\dfrac{1}{2}\sin(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

**Exercice 12.** Trouver le minimum et le maximum de la fonction $x\mapsto 3\cos(x)+4\sin(x)$.

**Solution 12.** Soit $\theta$ le réel élément de $[0,2\pi]$ tel que $\cos(\theta)=\dfrac{3}{5}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{4}{5}$ ($\theta$ existe car $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1$). Alors, pour tout réel $x$, $3\cos(x)+4\sin(x)=5(\cos(x)\cos(\theta)+\sin(x)\sin(\theta))=5\cos(x-\theta)$. Le maximum cherché vaut donc 5, atteint par exemple pour $x=\theta$. De même, le minimum vaut $-5$, minimum atteint pour $x=\theta+\pi$.

---

## 3.8 Le nombre j

Par définition, $j=e^{2i\pi/3}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ce nombre sera beaucoup utilisé au cours de l'année de maths sup et de l'année de maths spé. En physique, le nombre complexe $i$ est noté $j$ (lettre qui suit $i$ dans l'alphabet) car la lettre $i$ est utilisée autrement, celle-ci désignant l'initiale du mot *intensité*. La lettre $j$ en physique n'a donc pas la même signification qu'en mathématiques.

Le nombre $j$ vérifie $j^3=\left(e^{2i\pi/3}\right)^3=e^{2i\pi}=1$. Par suite, $j^2\times j=1$ et donc, $\dfrac{1}{j^2}=j$ et $\dfrac{1}{j}=j^2$. On a aussi $j^2=e^{4i\pi/3}=e^{-2i\pi/3}=\bar{j}$. On aurait aussi pu constater que puisque $|j|=\left|e^{2i\pi/3}\right|=1$, on a $j\bar{j}=1$ et donc $\dfrac{1}{j}=\bar{j}$.

Ensuite, $j^3=1\Rightarrow j^3-1=0\Rightarrow(j-1)\left(j^2+j+1\right)=0\Rightarrow 1+j+j^2=0$ (car $j\neq 1$). Mais alors, $j^2+j=-1$ et aussi, $1+j=-j^2$ ou $1+j^2=-j$.

$$\boxed{\begin{array}{c}j=e^{2i\pi/3}=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ j^2=e^{4i\pi/3}=\bar{j}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ j^3=1,\ \dfrac{1}{j}=j^2=\bar{j} \text{ et } \dfrac{1}{j^2}=j=\overline{j^2}\\ 1+j+j^2=0, \text{ et donc } j+j^2=-1,\ 1+j=-j^2,\ 1+j^2=-j\\ \forall n\in\mathbb{Z},\ j^{3n}=1,\ j^{3n+1}=j \text{ et } j^{3n+2}=j^2.\end{array}}$$