# Ensembles, relations, applications

## Plan du chapitre


**1 Ensembles** ..... **page 2**
- **1.1** Introduction ..... page 2
- **1.2** Vocabulaire et notations usuelles ..... page 2
- **1.3** Produit cartésien ..... page 3
  - 1.3.1 Couples, $n$-uplets ..... page 3
  - 1.3.2 Produit cartésien ..... page 3
- **1.4** Ensembles : inclusion et égalité ..... page 4
- **1.5** Résolutions d'équations ou de systèmes d'équations ..... page 7
  - 1.5.1 Résolutions d'équations ..... page 7
  - 1.5.2 Résolutions de systèmes d'équations ..... page 11
- **1.6** Ensemble des parties d'un ensemble ..... page 14
  - 1.6.1 Définition de $\mathcal{P}(E)$ ..... page 14
  - 1.6.2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$ ..... page 15
    - 1.6.2.a Complémentaire d'une partie ..... page 15
    - 1.6.2.b Intersection et réunion de deux parties ..... page 15
    - 1.6.2.c Différence de deux parties ..... page 16

**2 Relations binaires** ..... **page 17**
- **2.1** Définition et propriétés ..... page 17
- **2.2** Relations d'équivalence ..... page 18
- **2.3** Relations d'ordre ..... page 20

**3 Fonctions et applications** ..... **page 21**
- **3.1** Fonctions ..... page 21
  - 3.1.1 Définitions ..... page 21
  - 3.1.2 Restrictions et prolongements ..... page 23
- **3.2** Applications ..... page 23
  - 3.2.1 Définition ..... page 23
  - 3.2.2 Composition des applications ..... page 24
  - 3.2.3 Fonction indicatrice (ou caractéristique) d'une partie ..... page 25
- **3.3** Image directe, image réciproque d'une partie par une application ..... page 25
  - 3.3.1 Image directe ..... page 25
  - 3.3.2 Image réciproque ..... page 27
- **3.4** Injections, surjections, bijections ..... page 29
  - 3.4.1 Injections ..... page 29
  - 3.4.2 Surjections ..... page 31
  - 3.4.3 Bijections, réciproque d'une bijection ..... page 32
- **3.5** Familles d'éléments, familles de parties ..... page 36

**4 L'ensemble $\mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence** ..... **page 36**
- **4.1** L'axiome de récurrence ..... page 36
- **4.2** Propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$ ..... page 40

# 1 Ensembles

## 1.1 Introduction

En mathématiques, on travaille à l'intérieur de différents ensembles : l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ (en arithmétique), l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$, des rationnels $\mathbb{Q}$, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$ (en analyse ou en géométrie), l'ensemble des points du plan, l'ensemble des isométries laissant invariant un dodécaèdre, l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou celui des polynômes ou des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions d'une équation...
Pour chaque définition ou résultat qui sera énoncé dans ce chapitre, il faudra toujours essayer d'imaginer de nombreuses situations concrètes dans chacun des ensembles précédents (et dans d'autres. . . ).

L'étude de la **théorie des ensembles** (ainsi que l'étude de la logique mathématique) s'est développée à la fin du XIXe siècle et au début du XXe et les notations que l'on utilise aujourd'hui ($A \cap B$, $x \in E$, $P \Rightarrow Q$...) datent la plupart du temps de cette époque. Ce sont, dans un premier temps, les progrès réalisés dans la théorie de l'intégration qui ont conduit la communauté mathématique à s'intéresser à ces notions. Les deux grands noms de l'étude de la théorie des ensembles et de la logique mathématique sont (Georg Ferdinand Ludwig Philipp) Cantor (1845-1918) pour les ensembles et (Kurt) Gödel (1906-1978) pour la logique.

En mathématiques supérieures, nous avons besoin d'un vocabulaire simple mais efficace, des notations de base ainsi que d'un certain nombre de raisonnements types qui seront ensuite utilisés dans tous les autres chapitres.

## 1.2 Vocabulaire et notations usuelles

Il est pratiquement impossible de donner une définition sympathique de la notion d'ensemble. On peut essayer

Définition 1. Un ensemble est une collection d'objets.

mais il est clair que cette définition « tourne en rond » : qu'est ce qu'une collection ? Nous nous en contenterons néanmoins.

Un ensemble peut être décrit par une ou plusieurs lettres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensembles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites réelles) ... Dans ce cas, une définition précise du contenu de l'ensemble doit être donnée quelque part dans un cours de mathématiques.

Un ensemble peut être donné **en extension** : $E = \{1, 2, 3\}$ est l'ensemble contenant les trois éléments $1$, $2$ et $3$ (on a donné explicitement tous les éléments de l'ensemble). Il faut noter que pour écrire un ensemble, on utilise conventionnellement des accolades et pas des parenthèses.
Dans ce cas, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance ($\{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$). D'autre part, répéter un même élément plusieurs fois ne sert à rien : $\{1; 2, 7; 2, 7\} = \{1; 2, 7\}$.
S'il n'y a pas d'ambiguïté, la virgule est préférable au point-virgule pour séparer chaque élément, car simplifier les notations en toute circonstance rend plus simple la lecture et la compréhension.

Un ensemble peut aussi être donné **en compréhension**, les éléments de l'ensemble étant décrits par une phrase. Par exemple, l'ensemble $E$ des réels supérieurs ou égaux à 1 peut s'écrire $E = \{x \in \mathbb{R}/\ x \geqslant 1\}$ ou aussi $E = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1\}$.
Ainsi, la lecture s'effectue de la façon suivante :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | $=$ | $\{$ | $x \in \mathbb{R}$ | , | $x \geqslant 1$ | $\}$ |
| $E$ | est | l'ensemble des | réels $x$ | tels que | $x$ est supérieur ou égal à 1 | |

Une fois l'accolade ouverte, on a écrit la nature des éléments considérés - ce sont des réels- ($x \in \mathbb{R}$), puis une propriété les caractérisant ($x \geqslant 1$). L'ensemble ci-dessus est $[1, +\infty[$.

L'ensemble $\left\{a^2 + b^2 + 1,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ se lit différemment. C'est l'ensemble des réels de la forme $a^2 + b^2 + 1$ où le couple $(a, b)$ décrit $\mathbb{R}^2$ (ici, la virgule ne se lit donc pas « tel que »). On n'a pas donné une propriété caractérisant les éléments de l'ensemble mais on a donné directement tous les éléments de cet ensemble. On est revenu à une description en extension. On peut noter qu'il s'agit de nouveau de l'ensemble précédent : $[1, +\infty[$.

**Appartenance.** Quand un objet appartient à un ensemble, on dit que cet objet est **élément** de cet ensemble. Si $x$ est élément d'un ensemble $E$, on écrit $x \in E$. Par exemple, si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, $7 \in \mathcal{P}$.

*Attention, dans la définition ci-dessus, l'ensemble $E$ n'est pas forcément un ensemble de nombres. Si $E$ est $\mathbb{R}$, la lettre $x$ désigne un nombre réel, mais si $E$ est l'ensemble des suites réelles, la lettre $x$ utilisée ci-dessus désigne alors une suite réelle ou si $E$ est l'ensemble des points du plan, la lettre $x$ désigne un point du plan...*

La théorie des ensembles est pleine de paradoxes. Par exemple, l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. Dans le cas contraire, il se contiendrait en tant qu'élément, ce qui pose problème.

**Ensemble vide.** C'est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il se note $\varnothing$, ou aussi $\{\ \}$ mais ne se note pas $\{\varnothing\}$. En effet, l'ensemble $\{\varnothing\}$ n'est pas vide puisqu'il contient un élément, à savoir l'ensemble vide. Bizarrement, l'ensemble vide est contenu dans n'importe quel ensemble, que ce soit l'ensemble des décimaux ou l'ensemble des points du plan...

**Singletons, paires.** Un ensemble qui contient un et un seul élément s'appelle un **singleton**. Un ensemble qui contient deux éléments (distincts) s'appelle une **paire**. La paire $\{a, b\}$ est la paire $\{b, a\}$.

## 1.3 Produit cartésien

### 1.3.1 Couples, $n$-uplets

Si $E$ est un ensemble non vide, un **couple** d'éléments de $E$ est une suite ordonnée de deux éléments de $E$. On note un couple entre parenthèses : $(x, y)$. Dans le couple $(x, y)$, l'ordre dans lequel sont écrits $x$ et $y$ importe alors qu'il n'importe pas dans la paire $\{x, y\}$. En général, $(x, y) \neq (y, x)$ alors que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Par exemple, le point de coordonnées $(2, 3)$ n'est pas le point de coordonnées $(3, 2)$ alors que l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet pour ensemble de solutions $\{2, 3\} = \{3, 2\}$. Enfin, dans le couple $(x, y)$, $x$ et $y$ peuvent être égaux.
De même, une suite ordonnée $(x, y, z)$ de trois éléments de $E$ s'appelle un **triplet** d'éléments de $E$ et plus généralement, si $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2, une suite ordonnée de $n$ éléments de $E$ $(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle un **n-uplet** d'éléments de $E$. Dans un $n$-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $E$, certains des éléments $x_1, \ldots, x_n$ peuvent être égaux entre eux.
On peut généraliser davantage encore. Par exemple, un couple de coordonnées polaires d'un point $M$ distinct de l'origine est un couple $(r, \theta)$ où $r$ est élément de $]0, +\infty[$ et $\theta$ est élément de $[0, 2\pi[$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\left(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}\right)$. Cette fois-ci l'ensemble $E_1 = ]0, +\infty[$ n'est pas l'ensemble $E_2 = [0, 2\pi[$. De manière générale, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont $n$ ensembles non vides, on peut définir les $n$-uplets d'éléments de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ comme étant les suites ordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où le premier élément $x_1$ est dans $E_1$, le deuxième $x_2$ est dans $E_2$, ... et le $n$-ème est dans $E_n$.

### 1.3.2 Produit cartésien

DÉFINITION 2. Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Le **produit cartésien** des deux ensembles $E$ et $F$ est l'ensemble des couples d'un élément de $E$ et d'un élément de $F$. Il est noté $E \times F$.
Plus généralement, si $n$ est un entier supérieur ou égal à 2 et si $E_1, \ldots, E_n$ sont $n$ ensembles non vides, le produit cartésien des ensembles $E_1, \ldots, E_n$ est l'ensemble des $n$-uplets d'un élément de $E_1$, d'un élément de $E_2$, ... et d'un élément de $E_n$. Il est noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ ou aussi $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k$.
Quand $E = F$, $E \times F$ est noté plus simplement $E^2$ et plus généralement, quand $E_1 = E_2 = \ldots = E_n$, $E_1 \times E_2 \ldots \times E_n$ est noté plus simplement $E^n$.

$$E \times F = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in F\} \text{ et } E^2 = \{(x, y),\ x \in E,\ y \in E\}.$$
$$E_1 \times E_2 \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\} \text{ et } E^n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ x_1 \in E, \ldots, x_n \in E\}.$$

Ainsi, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels, $\mathbb{R}^4$ l'ensemble des quadruplets de réels, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des $n$-uplets de réels, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2)^2 = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)),\ (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4\}$ est l'ensemble des couples de couples de réels, $(\mathcal{P}(E))^2$ est l'ensemble des couples $(A, B)$ où $A$ et $B$ sont deux parties de $E$ ($\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de l'ensemble $E$ et sera étudié plus loin), $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi[$ est l'ensemble des triplets $(r, \theta, \varphi)$ où $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi[$ ...

La notation $E \times F$, utilisant le signe $\times$, vient du cas particulier où les ensembles $E$ et $F$ ont un nombre fini d'éléments. Supposons par exemple que $E = \{a, b, c\}$ et que $F = \{1, 2, 3, 4\}$. L'ensemble des couples d'un élément de $E$ et d'un élément de $F$ peut être représenté dans un tableau à double entrée :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $(a, 1)$ | $(a, 2)$ | $(a, 3)$ | $(a, 4)$ |
| $b$ | $(b, 1)$ | $(b, 2)$ | $(b, 3)$ | $(b, 4)$ |
| $c$ | $(c, 1)$ | $(c, 2)$ | $(c, 3)$ | $(c, 4)$ |

On voit alors que le produit cartésien de $E$ et de $F$ prend l'allure d'un rectangle dont le nombre d'éléments est $3 \times 4 =$ (nombre d'éléments de $E$) $\times$ (nombre d'éléments de $F$) $= 12$. Ceci pousse à appeler *produit* des ensembles $E$ et $F$ et à noter $E \times F$, l'ensemble des couples d'un élément de $E$ et d'un élément de $F$. L'adjectif *cartésien* apposé au nom *produit* est une référence à DESCARTES et son système de coordonnées (cartésiennes).

## 1.4 Ensembles : inclusion et égalité

**Inclusion.** Quand tous les éléments d'un ensemble $F$ appartiennent encore à un ensemble $E$, on dit que $F$ est **inclus** dans $E$ ou encore que $F$ est une **partie** (ou aussi un **sous-ensemble**) de $E$ et on écrit $F \subset E$. L'inclusion $F \subset E$ est en particulier vraie quand $F = E$ ($E \subset E$).

*On prendra garde à ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$. On écrira $\boxed{2 \in \mathbb{N}}$ et non pas $2 \subset \mathbb{N}$. Inversement, on écrira $\boxed{\{2\} \subset \mathbb{N}}$ et non pas $\{2\} \in \mathbb{N}$. De part et d'autre du symbole $\subset$, on trouve des objets de même nature, ce qui n'est pas le cas du symbole $\in$.*

$A \subset B$ signifie « $A$ est strictement inclus dans $B$ ou $A$ est égal à $B$ ». C'est l'équivalent pour les ensembles du $\leqslant$ pour les nombres. Si on veut écrire que $A$ est strictement inclus dans $B$, on doit écrire $\underset{\neq}{\subset}$. Par exemple, $]0,1] \underset{\neq}{\subset} [0,1]$ mais $[0,1] \subset [0,1]$.

**Ensemble des parties d'un ensemble.** L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble donné $E$ se note $\mathcal{P}(E)$.
Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E)$ contient $8$ éléménts : il y a la partie à $0$ élément, trois singletons, trois paires et l'ensemble à 3 éléments $E$, ou encore, $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Notons encore que si $E = \varnothing$, $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$ et donc $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide.
Si $E = \mathbb{R}$, il est impossible de donner l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ en extension. Mais on peut constater que $\left\{1, \pi, \sqrt{2}\right\}$, $2\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers pairs), $2\pi\mathbb{Z}$ (l'ensemble des multiples entiers de $2\pi$) ou $[-1, +\infty[$ sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

**Egalité de deux ensembles.** Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils sont constitués des mêmes éléments.
L'inclusion $\subset$ d'un ensemble dans un autre est directement associée à l'implication $\Rightarrow$ (et l'inclusion $\supset$ à l'implication $\Leftarrow$), et l'égalité de deux ensembles est directement associée à l'équivalence $\Leftrightarrow$ de la façon suivante : pour toutes parties $A$ et $B$ d'un ensemble $E$,

$$\boxed{\begin{array}{c} A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in A \Rightarrow x \in B). \\ A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B). \end{array}}$$

Ces résultats évidents et simples d'énoncés sont très importants dans la pratique, car il fournissent une démarche systématique pour montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles.

*Ici, on trouve une erreur courante de raisonnement. Au sortir du lycée, on fait souvent une confusion entre $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, et de même, on confond souvent $\subset$ et $=$.*

Analysons un premier exemple sur le sujet. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère l'ensemble $E = \left\{M(x, y) /\ \exists t \in \mathbb{R} /\ x = \dfrac{1}{1+t^2} \text{ et } y = \dfrac{t^2}{1+t^2}\right\}$ ($E$ peut aussi s'écrire plus simplement : $E = \left\{\left(\dfrac{1}{1+t^2}, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$).

Si $M(x, y)$ est un point de $E$, il existe un réel $t$ tel que $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Mais alors, $x + y = 1$. En résumé,

$$M(x, y) \in (E) \Rightarrow x + y = 1, \text{ ou encore, } E \text{ est } \textbf{contenu} \text{ dans la droite } (D) \text{ d'équation } x + y = 1.$$

$E$ n'a cependant aucune raison (pour l'instant) d'être la droite $(D)$ toute entière. Nous ne nous sommes pas encore intéressés à l'implication « de droite à gauche » : $M \in (D) \Rightarrow M \in E$. Faisons-le.

$M(x, y)$ étant un point de la droite $D$, nous devons nous demander s'il existe un réel $t$ tel que $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, en ayant conscience que montrer l'existence d'un réel $t$ tel que $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ équivaut à montrer que l'équation $x = \dfrac{1}{1+t^2}$, de paramètre $x$ et d'inconnue $t$, a au moins une solution. Et, comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre précédent, pour montrer que l'équation $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ d'inconnue $t$ a au moins une solution, une manière d'agir (mais il y en a d'autres) est de fournir explicitement une telle solution. C'est ce que nous allons faire ci-dessous.
Déjà, l'équation $x = \dfrac{1}{1+t^2}$ $(*)$ d'inconnue $t$ n'a pas de solution quand $x = 0$, et si $x \neq 0$,

$$x = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1-x}{x}.$$

Si $x \in ]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, alors $\dfrac{1-x}{x} < 0$ et l'équation $(*)$ n'a pas de solution, ou encore le point $M$ n'est pas dans $E$ (ceci montre déjà que $E \underset{\neq}{\subset} D$).

Si $x \in ]0,1]$, l'équation $(*)$ a au moins une solution à savoir $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. Ainsi, si $M(x,y) \in D$ et $x \in ]0,1]$, alors $x+y=1$ et il existe un réel $t$ tel que $x = \dfrac{1}{1+t^2}$. Mais alors, $y = 1-x = 1-\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et le point $M$ est dans $E$.
En résumé, $E = \{M(x,y) /\ x+y=1 \text{ et } 0 < x \leqslant 1\}$. C'est l'intervalle $]A,B]$ où $A$ et $B$ ont pour coordonnées respectives $(0,1)$ et $(1,0)$.
On peut noter que tout ce qui précède aurait pu être allégé en constatant que si $f$ est la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, alors $f(]-\infty,+\infty[) = ]0,1]$ (par exemple grâce à l'étude de $f$).
Ainsi, pour résoudre le problème précédent, il a fallu ne pas oublier d'**analyser la réciproque**.

**Exercice 1.** Déterminer et construire $\mathcal{E} = \left\{\left(\dfrac{2t+4}{t^2+2t+5}, \dfrac{-t^2+4t+7}{t^2+2t+5}\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

**Solution 1.** Le plan est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, $t^2+2t+5 = (t+1)^2+4 \geqslant 4 > 0$. Par suite, $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2+2t+5 \neq 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{-t^2+4t+7}{t^2+2t+5} = \frac{-t^2-2t-5+6t+12}{t^2+2t+5} = \frac{-t^2-2t-5}{t^2+2t+5} + \frac{6t+12}{t^2+2t+5} = -1+3\frac{2t+4}{t^2+2t+5}.$$

Par suite,

$$M(x,y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2t+4}{t^2+2t+5} \\ y = \dfrac{-t^2+4t+7}{t^2+2t+5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2t+4}{t^2+2t+5} \\ y = 3x-1 \end{array}\right. \Rightarrow y = 3x-1.$$

$\mathcal{E}$ est donc contenu dans la droite $(D)$ d'équation $y = 3x-1$.

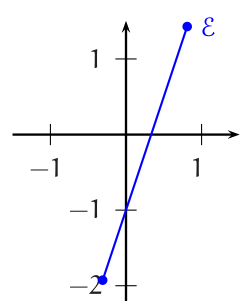
Réciproquement, un point $M(x,y)$ de $(D)$ est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe un réel $t$ tel que $x = \dfrac{2t+4}{t^2+2t+5}$, ou encore si et seulement si l'abscisse $x$ du point $M$ est une valeur prise par la fonction $t \mapsto \dfrac{2t+4}{t^2+2t+5}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons donc $f(t) = \dfrac{2t+4}{t^2+2t+5}$. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = 2\frac{(t^2+2t+5)-(t+2)(2t+2)}{(t^2+2t+5)^2} = \frac{-2(t^2+4t-1)}{(t^2+2t+5)^2}.$$

$f$ est donc décroissante sur $\left]-\infty, -2-\sqrt{5}\right]$, croissante sur $\left[-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}\right]$ et décroissante sur $\left[-2+\sqrt{5}, +\infty\right[$. De plus, $f$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par suite, $f$ admet un minimum en $\alpha = -2-\sqrt{5}$ et un maximum en $\beta = -2+\sqrt{5}$. Puisque $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que l'ensemble des valeurs prises par $f$ est $[f(\alpha), f(\beta)]$. Calculons alors $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{2\left(-2-\sqrt{5}\right)+4}{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2+2\left(-2-\sqrt{5}\right)+5} = \frac{-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}\left(10-2\sqrt{5}\right)}{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{20-20\sqrt{5}}{80} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Puis, par un calcul conjugué, on obtient $f(\beta) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Finalement, l'ensemble des valeurs prises par $f$ est l'intervalle $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right]$ et $\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 3x-1 \text{ et } \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.



⇨ **Commentaire** .

⋄ *Dans la solution ci-dessus, il ne faut pas se laisser détourner du but en se dispersant dans les différents calculs. Le moment crucial de la solution est :*

$$\exists t \in \mathbb{R}/ \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2t+4}{t^2+2t+5} \\ y = 3x-1 \end{array} \right. \Rightarrow y = 3x-1.$$

*Une implication est écrite et pas une équivalence. On a donc établi une inclusion d'un ensemble dans un autre et pas une égalité. C'est ce qu'analysait l'exercice précédent.*

⋄ *Si l'on ne se sent pas capable d'effectuer la petite transformation* $\frac{-t^2+4t+7}{t^2+2t+5} = \frac{-t^2-2t-5+6t+12}{t^2+2t+5} = \dots$*, l'exercice devient très pénible car il faut de toute façon éliminer le paramètre* $t$*. On doit alors écrire* $x = \frac{2t+4}{t^2+2t+5} \Leftrightarrow xt^2 + (2x-2)t + 5x - 4 = 0$*. On doit ensuite discuter suivant que* $x = 0$ *qui fournit* $t = -2$ *et aussi* $x \neq 0$*, qui fournit des valeurs de* $t$ *suivant le signe de* $\Delta = 4(-4x^2 + 2x + 1)$ *puis reporter les valeurs de* $t$ *obtenue dans* $y$*...*
*L'exercice s'est compliqué de manière absurde et il vaut mieux dans ce cas ne pas le traiter du tout. Néanmoins, on redit qu'ici ce n'est pas l'aspect calcul qui était analysé, mais simplement les liens entre* $\Rightarrow$*,* $\Leftarrow$ *et* $\subset$*,* $\supset$*.*

⋄ *Dans la solution, nous avons employé l'expression « par un calcul conjugué, nous obtenons* $f(\beta) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ *». Pour calculer* $f(\beta)$*, il s'agit de refaire tout le calcul en remplaçant au début* $\sqrt{5}$ *par* $-\sqrt{5}$*. Mais si on effectue ce remplacement au début, on doit également l'effectuer dans tous les intermédiaires de calcul et donc aussi* ***en fin*** *de calcul. La valeur de* $f(\beta)$ *s'obtient donc mécaniquement en remplaçant* $\sqrt{5}$ *par* $-\sqrt{5}$ *dans la valeur de* $f(\alpha)$*. Un tel calcul est appelé* ***calcul conjugué****. Il est de même nature que les calculs sur les nombres complexes où l'on remplace le nombre* $i$ *par le nombre* $-i$*.*

**Exercice 2.** Déterminer l'ensemble $(E) = \left\{ \dfrac{1+ix}{1-ix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ (où $i^2 = -1$).

**Solution 2.** Notons $U$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Soient $x \in \mathbb{R}$, puis $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. Alors, puisque $x$ est réel, $\mathrm{Re}(1-ix) = 1 \neq 0$ et donc $1 - ix \neq 0$. Ainsi, $z$ est défini et de plus, $|z| = \dfrac{|1+ix|}{|1-ix|} = 1$. Donc, $z \in U$.

Inversement, soit $z \in U$. Il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Si $z \neq -1$ ce qui revient à dire $\theta \neq \pi$, alors $\dfrac{\theta}{2} \in [0, \pi[ \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ et donc, $\cos\dfrac{\theta}{2} \neq 0$. On peut alors écrire

$$z = \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \frac{1 + i\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}{1 - i\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} = \frac{1 + i\tan(\theta/2)}{1 - i\tan(\theta/2)} = \frac{1+ix}{1-ix} \text{ avec } x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, $z \in (E)$.

Si $z = -1$, alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$z = \frac{1+ix}{1-ix} \Leftrightarrow \frac{1+ix}{1-ix} = -1 \Leftrightarrow 1 + ix = -(1-ix) \Leftrightarrow 0 \times x = 2.$$

Cette dernière équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc, $-1 \notin (E)$. Finalement, $(E) = U \setminus \{-1\}$ (c'est-à-dire $U$ auquel on a retiré l'élément $-1$).

⇨ **Commentaire** . *Encore une fois, ce sont les deux inclusions* $(E) \subset U\setminus\{-1\}$ *et* $U\setminus\{-1\} \subset (E)$ *qui sont analysées ainsi que le fait que* $\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right| = 1$ *montre que* $(E) \subset U$ *mais pas que* $(E) = U$*. Néanmoins, on peut détailler ce qui a donné l'idée d'écrire* $z = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}$*. On voulait écrire un nombre complexe* $z$ *de module* $1$ *comme le quotient de deux nombres conjugués (*$1+ix$ *et* $1-ix$*). Il nous fallait donc écrire une expression* ***explicite*** *d'un complexe de module* $1$ *sur laquelle on pouvait calculer, à savoir* $e^{i\theta}$ *(on ne peut pas calculer sur des mots : « complexe de module 1 ») puis écrire* $e^{i\theta} = \frac{?}{?}$ *et on n'était plus très loin de l'égalité* $e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}$*.*

Pour montrer l'égalité de deux sous-ensembles $A$ et $B$ d'un ensemble $E$,
1) ou bien, on montre que $\forall x \in E,\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$,
2) ou bien, on se partage le travail en deux étapes en montrant que $A \subset B$ et $B \subset A$,
c'est-à-dire en montrant que $\forall x \in E,\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$ et $\forall x \in E,\ (x \in B \Rightarrow x \in A)$.

Le problème de l'égalité de deux ensembles est encore analysé au paragraphe suivant : résolutions d'équations et de systèmes d'équations.

Nous donnons maintenant les propriétés usuelles de l'inclusion.

**Théorème 1.** Soit $E$ un ensemble.

❶ $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset A$ (on dit que l'inclusion est **réflexive**).

❷ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ (A \subset B$ et $B \subset A) \Rightarrow A = B$ (on dit que l'inclusion est **anti-symétrique**).

❸ $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3,\ (A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (on dit que l'inclusion est **transitive**).

**Démonstration .**

❶ Soit $A$ une partie de $E$.

Soit $x \in E$. On a $x \in A \Rightarrow x \in A$. Ainsi, $\forall x \in E,\ (x \in A \Rightarrow x \in A)$ et donc $A \subset A$.

On a montré que : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset A$.

❷ Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \subset B$ et $B \subset A$.

Soit $x \in E$. On a $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$. Par suite, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Ainsi, $\forall x \in E,\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ et donc $A = B$.

On a montré que $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ (A \subset B$ et $B \subset A) \Rightarrow A = B$.

❸ Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tel que $A \subset B$ et $B \subset C$.

Soit $x \in E$. On a $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in C$ et donc $x \in A \Rightarrow x \in C$. Ainsi, $\forall x \in E,\ (x \in A \Rightarrow x \in C)$ et donc $A \subset C$.

On a montré que $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3,\ (A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

❑

⇨ **Commentaire** . *On est en droit de trouver que la démonstration ci-dessus n'a aucun intérêt car elle montre des résultats pouvant être perçus comme évidents. Vous devez néanmoins considérer comme très important pour la suite, le schéma de cette démonstration. En ❶ par exemple, on voulait prouver qu'une propriété était vraie* ***pour tout élément*** $A$ *de* $\mathcal{P}(E)$*. On s'est donc* ***donné un élément quelconque*** $A$ *de* $\mathcal{P}(E)$ *par la phrase :*

*soit* $A \in \mathcal{P}(E)$,

*On a ensuite fait une démonstration (très brève) avec cette partie* $A$ *fixée mais quelconque en établissant que la propriété à démontrer était vraie pour cette partie* $A$.

*Soit* $A \in \mathcal{P}(E)$. $\dots A \subset A$.

$A$ *étant quelconque, nous avons donc pu en conclure ce qu'il fallait établir* ***pour tout élément*** $A$ *de* $\mathcal{P}(E)$ *:*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset A.$$

## 1.5 Résolutions d'équations ou de systèmes d'équations

### 1.5.1 Résolutions d'équations

Définition 3. Deux équations sont équivalentes si et seulement si elles ont le même ensemble de solutions.

A partir d'ici, nous allons préciser la rédaction correcte de la résolution de toute équation. Pour cela considérons l'équation $2x + 1 = 0$ ou plutôt, considérons l'énoncé : « résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x + 1 = 0$ $(E)$ ». Cette résolution doit être rédigée comme suit :

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(E)$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\right)$. Par suite, $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Il s'agit alors de bien analyser les différentes étapes de la résolution. Elle démarre avec « soit $x \in \mathbb{R}$ ». Ce faisant, on dit simplement que l'on cherche un ou plusieurs réels ce que nous demandait l'énoncé avec la phrase « résoudre dans $\mathbb{R}$ ». Voici un autre énoncé : « résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $2n+1=0$ $(E)$ ». La résolution de cette équation s'écrit :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}.\ 2n+1>0 \text{ et en particulier } 2n+1 \neq 0. \text{ Donc, } \forall n \in \mathbb{N},\ 2n+1 \neq 0 \text{ et } \mathcal{S}=\varnothing.$$

Ainsi, la résolution d'une équation dépend de l'ensemble dans lequel on la résout, ou plutôt, il nous faut **décrire la nature de l'inconnue** ce que l'on fait par la phrase « soit $x \in \mathbb{R}$ ».

La phrase « soit $x \in \mathbb{R}$ » était suivie de $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1$. Ceci ne signifie pas du tout que pour tout réel $x$, on a $2x+1=0$ mais signifie que, pour tout réel $x$, il est équivalent de dire $2x+1=0$ et $2x=-1$ ou encore que, pour tout réel $x$, les égalités $2x+1=0$ et $2x=-1$ sont **simultanément fausses et simultanément vraies** ou encore que les équations $2x+1=0$ et $2x=-1$ ont le même ensemble de solutions ou enfin que les équations $2x+1=0$ et $2x=-1$ sont des équations équivalentes. La dernière égalité $x=-\frac{1}{2}$ est aussi une équation. Il ne peut pas en être autrement car nous avons écrit des symboles $\Leftrightarrow$ entre des objets de même nature à savoir des équations. Mais bien sûr, cette dernière équation est très simple à résoudre : elle admet pour unique solution le nombre $x_0=-\frac{1}{2}$.

En fin de parcours, nous résumons le travail effectué par la phrase $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\right)$ et non plus « soit $x \in \mathbb{R},\ 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ », car nous avons effectivement montré que pour chaque réel $x$, les égalités $2x+1=0$ et $x=-\frac{1}{2}$ étaient simultanément vraies et simultanément fausses.

Passons à un autre exemple. « Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{-4x+1}=2x+1$ ».
On peut élever au carré et obtenir $-4x+1=(2x+1)^2$ puis $4x^2+8x=0$ ou encore $4x(x+2)=0$ et finalement $x=0$ ou $x=-2$. Mais en vérifiant le travail effectué, un problème se présente. Pour $x=0$, on a effectivement $\sqrt{-4\times 0+1}=1=2\times 0+1$, mais pour $x=-2$, on a $\sqrt{-4(-2)+1}=3\neq -3=2(-2)+1$. Ceci doit déjà convaincre que l'on ne peut définitivement plus résoudre une équation sans que soit systématiquement précisé un symbole $\Leftrightarrow$ ou $\Rightarrow$ ou même $\Leftarrow$. Ici, l'ensemble des solutions de $(E)\ :\ \sqrt{-4x+1}=2x+1$ est strictement contenu dans l'ensemble des solutions de $(E')\ :\ -4x+1=(2x+1)^2$ ou encore,

$$\text{pour tout réel } x,\ \sqrt{-4x+1}=2x+1 \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\ -4x+1=(2x+1)^2.$$

De manière générale, comme nous l'avons exposé au paragraphe précédent, inclusion ou égalité d'ensembles sont des notions directement liées à l'implication ou à l'équivalence. Pour des équations, cela donne :

$$\boxed{\begin{array}{l}(E)\Rightarrow(E') \text{ signifie } \mathcal{S}_{(E)}\subset\mathcal{S}_{(E')},\\ (E)\Leftarrow(E') \text{ signifie } \mathcal{S}_{(E)}\supset\mathcal{S}_{(E')},\\ (E)\Leftrightarrow(E') \text{ signifie } \mathcal{S}_{(E)}=\mathcal{S}_{(E')}.\end{array}}$$

Revenons à l'équation $(E)\ :\ \sqrt{-4x+1}=2x+1$. Elle est du type $\sqrt{A}=B$ ou $A$ et $B$ sont deux réels. Cherchons à supprimer la racine carrée. Si $\sqrt{A}=B$, on a nécessairement $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$ et $A=B^2$ après élévation des deux membres au carré. Maintenant l'égalité $A=B^2$ implique quant à elle $A\geqslant 0$ et $B=\sqrt{A}$ ou $B=-\sqrt{A}$. Ainsi, l'égalité $A=B^2$ contient toujours l'information $A\geqslant 0$ mais ne contient plus l'information $B\geqslant 0$. En résumé

$$\sqrt{A}=B \Leftrightarrow A=B^2 \text{ et } B\geqslant 0.$$

On peut maintenant résoudre correctement l'équation $\sqrt{-4x+1}=2x+1$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{-4x+1}=2x+1$.

**Solution 3.** Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-4x+1} = 2x+1 &\Leftrightarrow -4x+1 = (2x+1)^2 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow -4x+1 = 4x^2+4x+1 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow 4x^2+8x = 0 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow 4x(x+2) = 0 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ ou } x=-2) \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (x=0 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0) \text{ ou } (x=-2 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0)\\
&\Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}
$$

En résumé : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt{-4x+1} = 2x+1 \Leftrightarrow x = 0)$ et donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0\}.}$$

---

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans la solution ci-dessus, nous n'avons jamais résolu l'inéquation $-4x+1 \geqslant 0$ ou encore nous n'avons jamais cherché « le domaine de définition de l'équation ». En fait,* ***la notion de domaine de définition d'une équation ou d'une inéquation n'a aucun sens****. Le premier membre de l'inéquation $\sqrt{-4x+1} = 2x+1$ a bien un domaine de définition à savoir $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$. Mais que dire de l'équation elle-même ? Les $x$ qui ne sont pas dans ce « domaine de définition » sont peut-être les $x$ qui ne « peuvent pas être solution » comme $1$ ou $17$. Mais un $x$ comme $-3$ non plus n'est pas solution. Alors ? Non, décidément l'expression « domaine d'une équation » ne veut rien dire. Ici, quand nous avons écrit $-4x+1 = (2x+1)^2$, nous avons en particulier affirmé que nous cherchions des $x$ tels que $-4x+1 \geqslant 0$ et les deux valeurs obtenues à l'avant dernière étape de la résolution à savoir $-2$ et $0$ vérifient automatiquement l'inégalité $-4x+1 \geqslant 0$.*

◇ *Le bon démarrage est donc « soit $x \in \mathbb{R}$ » pour dire que nous cherchons un réel et non pas « soit $x \leqslant \frac{1}{4}$ ».*

◇ *Nous n'avons jamais résolu non plus l'inéquation $2x+1 \geqslant 0$ mais nous l'avons gardée jusqu'à la fin sous forme de test que nous avons appliqué aux éventuelles solutions $-2$ et $0$ en fin de parcours. Seul le nombre $0$ a franchi cet ultime test. Ce qui précède s'applique à l'équation $\sqrt{(x^8-253x^5+x^2-1)^2+x} = x^8-253x^5+x^2-1$. La résolution de l'inéquation $x^8-253x^5+x^2-1 \geqslant 0$ est hors de portée mais ce n'est pas un problème. L'équation $(x^8-253x^5+x^2-1)^2+x = (x^8-253x^5+x^2-1)^2$ admet pour solution $x=0$ et on constate aisément que $0$ ne vérifie pas $x^8-253x^5+x^2-1 \geqslant 0$. Donc $\mathcal{S} = \varnothing$.*

◇ *On peut rédiger autrement en écrivant au démarrage $\sqrt{-4x+1} = 2x+1$ $(E) \Rightarrow -4x+1 = (2x+1)^2$ $(E') \Rightarrow \ldots \Rightarrow x=-2$ ou $x=0$ (et non pas $\sqrt{-4x+1} = 2x+1 \Leftrightarrow -4x+1 = (2x+1)^2$). D'après la remarque faite plus haut, l'implication écrite signifie que l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est* ***contenu*** *dans l'ensemble des solutions de l'équation $(E')$ ou encore $\mathcal{S} \subset \{-2, 0\}$. Avec cette manière de rédiger, on doit écrire en fin de parcours :* ***Réciproquement****, si $x=-2$... ça ne marche pas ($\sqrt{-4(-2)+1} = 3 \neq -3 = 2(-2)+1$) et si $x=0$... ça marche. Donc $\mathcal{S} = \{0\}$.*

◇ *Dans la résolution faite plus haut, on s'aperçoit qu'il n'est pas inutile de savoir que l'on peut « distribuer et sur ou ».*

Nous regroupons maintenant dans un tableau quelques situations usuelles ($A$ et $B$ désignent des expressions complexes mais quand on parle de racines carrées ou de racines cubiques, $A$ et $B$ désignent des expressions réelles) :

| |
|---|
| $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $B \neq 0$.<br>$\frac{A}{B} = 1 \Leftrightarrow A = B$ et $B \neq 0$.<br>$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} \Leftrightarrow A = B$ et $A \neq 0$. |
| $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ et $B \geqslant 0$.<br>$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow A = B$ et $A \geqslant 0$. |
| $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$.<br>$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A = B$. |

Résolvons alors quelques équations. Dans ce qui suit, ce n'est pas l'aspect calcul qui importe mais l'aspect logique et éventuellement la démarche.

**Exercice 4.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z-1+i}{z+2i} = 1-3i$.

**Solution 4.** Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation proposée. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\frac{z-1+i}{z+2i} = 1-3i &\Leftrightarrow z-1+i = (1-3i)(z+2i) \text{ et } z+2i \neq 0 \\
&\Leftrightarrow z-1+i = (1-3i)(z+2i) \text{ (car } z-1+i \text{ et } z+2i \text{ ne sont pas simultanément nuls)} \\
&\Leftrightarrow z-1+i = (1-3i)z+2i+6 \Leftrightarrow 3iz = 7+i \Leftrightarrow z = \frac{7+i}{3i} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{7}{3i} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}i.
\end{aligned}$$

En résumé : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{z-1+i}{z+2i} = 1-3i \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3}i$ et donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3} - \frac{7}{3}i\right\}.}$$

---

⇨ **Commentaire** . *La deuxième équivalence doit être détaillée. Si* $z-1+i = (1-3i)(z+2i)$ *et* $z+2i \neq 0$*, il est clair que* $z-1+i = (1-3i)(z+2i)$*. Donc,* $\Rightarrow$ *est vraie. Pour* $\Leftarrow$*, le seul problème qui peut se poser est qu'une solution de l'équation* $z-1+i = (1-3i)(z+2i)$ *annule* $z+2i$ *ou encore que les deux membres de cette équation soient simultanément nuls. Ceci n'est pas possible et donc* $\Leftarrow$ *est vraie.*

**Exercice 5.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x}{x} = 1$.

**Solution 5.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x}{x} = 1 \Leftrightarrow x = x \text{ et } x \neq 0 \Leftrightarrow 0 \times x = 0 \text{ et } x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}^*$.

---

⇨ **Commentaire** . *Il y a le même problème que dans l'exemple 1 à la différence près qu'ici les deux membres de l'équation* $x = x$ *s'annulent simultanément pour* $x = 0$*.*

**Exercice 6.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^7-x-1} = 0$.

**Solution 6.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{x^2-4x+3}{2x^7-x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \text{ et } 2x^7-x-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 3) \text{ et } 2x^7-x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Donc $\mathcal{S} = \{3\}$.

---

⇨ **Commentaire** . *Comme suggéré plus haut, on n'a pas besoin de connaître les réels qui annulent* $2x^7-x-1$ *ou encore on n'a pas à résoudre l'équation* $2x^7-x-1 = 0$*. On doit simplement se demander si les valeurs qui annulent le numérateur, à savoir* $1$ *et* $3$*, annulent ou non le dénominateur. Comme* $2 \times 3^7 - 3 - 1 \neq 0$ *et que* $2 \times 1^7 - 1 - 1 = 0$*, seul le nombre* $3$ *est solution de l'équation proposée.*

### 1.5.2 Résolution de systèmes d'équations

Dans ce paragraphe, on se préoccupe de la résolution des systèmes d'équations du point de vue logique (équivalence de deux systèmes) mais aussi déjà du point de vue technique car savoir résoudre des systèmes de petit format, linéaire ou pas, est une compétence à acquérir le plus tôt possible dans l'année, que ce soit en maths ou en physique.

**Définition 4.** Deux systèmes d'équations sont équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions.

Cette définition est très simple et pourtant elle est pleine de pièges. Analysons un premier exemple.

Considérons le système $(S_1)$ $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=1 \\ z+x=1 \end{array}\right.$. Si on retranche membre à membre les deux premières équations, on obtient l'équation $x-z=0$. De même, si on retranche membre à membre les deux dernières équations, on obtient $y-x=0$ et si on retranche membre à membre la troisième et la première, on obtient l'équation $y-z=0$. En effectuant ces trois opérations en même temps, on obtient le système $(S_2)$ $\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{array}\right.$ qui s'écrit encore $x=y=z$. Le système $(S_2)$ admet par exemple la solution $(x,y,z)=(1,1,1)$. Mais malheureusement, ce triplet de nombres n'est pas solution du système $(S_1)$ car $1+1\neq 1$. Les systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$ n'ont donc pas le même ensemble de solutions ou encore les systèmes $(S_1)$ et $(S_2)$ **ne sont pas des systèmes équivalents**.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=1 \\ z+x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{array}\right. \text{ mais } \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=1 \\ z+x=1 \end{array}\right. \not\Leftarrow \left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{array}\right. .$$

Dit autrement, tout triplet solution du système $(S_1)$ est solution du système $(S_2)$ mais il y a des triplets de réels qui sont solutions du système $(S_2)$ et pas du système $(S_1)$. Comme dans le paragraphe précédent, l'implication $(S_1)\Rightarrow(S_2)$ se traduit par l'inclusion $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{S}_2$ entre les ensembles de solutions, mais puisque $(S_1)\not\Leftarrow(S_2)$, on a $\mathcal{S}_1\neq\mathcal{S}_2$.
Pourtant, les transformations effectuées avaient l'air correctes et on pouvait facilement se laisser piéger et penser que les deux systèmes écrits étaient équivalents. D'où vient l'erreur ?

Il faut analyser **une après l'autre** les différentes opérations effectuées. Le premier système $(S_1)$ s'écrit $\left\{\begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}\right.$. On peut le transformer en le système $(S_1')$ $\left\{\begin{array}{l} (E_1)-(E_2) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}\right.$ et on obtient un système équivalent. En effet, si les trois équations de $(S_1)$ sont vérifiées alors les trois équations de $(S_1')$ sont vérifiées. **Réciproquement**, si les trois équations $(E_1')$, $(E_2')$ et $(E_3')$ de $(S_1')$ sont vérifiées alors en ajoutant membre à membre les équations $(E_1')$ et $(E_2')$, on réobtient l'équation $(E_1)$ et d'autre part, on a toujours les équations $(E_2)$ et $(E_3)$. Donc les systèmes $(S_1)$ et $(S_1')$ sont équivalents. Recommençons avec les deux dernières équations de $(S_1')$. On obtient de nouveau un système équivalent, le système $(S_1'')$ $\left\{\begin{array}{l} (E_1)-(E_2) \\ (E_2)-(E_3) \\ (E_3) \end{array}\right.$.
Le problème apparaît maintenant clairement. On ne peut plus obtenir l'équation $(E_3)-(E_1)$ car l'équation initiale $(E_1)$ **n'existe plus**. Elle a disparu après la première opération. Plus précisément, on a constaté plus haut que les systèmes $\left\{\begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} (E_1)-(E_2) \\ (E_2)-(E_3) \\ (E_3)-(E_1) \end{array}\right.$ ne sont pas des systèmes équivalents.

Il n'est pas question ici d'énoncer une à une toutes les erreurs de raisonnement que l'on peut commettre et de dresser la liste de toutes les transformations auxquelles on n'a pas droit. L'exemple précédent doit par contre convaincre qu'il est essentiel de connaître quelques transformations sur les équations d'un système auxquelles on a droit car ces transformations remplacent un système donné par un système équivalent.
On résume dans un tableau ces quelques transformations. Dans ce tableau, on utilise la notation $(E)+(E')$. Elle signifie que l'on a additionné membre à membre les équations $(E)$ et $(E')$. De même, la notation $k\times(E)$ signifie que l'on a multiplié les deux membres de l'équation $(E)$ par le nombre $k$.

**Quelques opérations transformant un système en un système équivalent.**
Echanger deux équations.
Supprimer une équation quand celle-ci est écrite deux fois.
Remplacer l'équation $(E)$ par l'équation $k\times(E)$ où $k$ est un nombre non nul.
Remplacer l'équation $(E)$ par l'équation $(E)+(E')$.
Remplacer les équations $(E)$ et $(E')$ par les équations $(E)+(E')$ et $(E)-(E)'$.

Seule la dernière affirmation mérite d'être prouvée. Si les deux équations $(E)$ et $(E')$ sont vérifiées, alors en additionnant membre à membre, les équations $(E)+(E')$ et $(E)-(E')$ sont vérifiées. Inversement, si les équations $(E)+(E')$ et $(E)-(E')$ sont vérifiées, alors les équations $\frac{1}{2}((E)+(E'))$ et $\frac{1}{2}((E)-(E'))$ sont vérifiées puis en additionnant membre ou en retranchant membre à membre ces deux dernières équations, les équations $(E)$ et $(E')$ sont vérifiées. En résumé, les systèmes $\left\{\begin{array}{l}(E)\\(E')\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}(E)+(E')\\(E)-(E')\end{array}\right.$ sont des systèmes équivalents.

Quelle méthode doit-on alors mettre en œuvre pour résoudre un système d'équations ? Il en existe beaucoup. En « Algèbre linéaire », on analysera le cas particulier des systèmes d'équations linéaires (c'est-à-dire des systèmes où les inconnues $x$, $y$... apparaissent à « l'exposant 1 » comme dans $2x-3y+z=1$ mais où n'apparaissent pas des expressions comme $x^2$, $\frac{1}{x}$, $xy$, $e^{x+y}$...) et on décrira différentes méthodes de résolution. Néanmoins, en ce début d'année, il y a déjà besoin d'une méthode de résolution efficace et sûre. Cette méthode est la

Méthode par substitution :
dans une équation, on exprime une inconnue en fonction des autres inconnues
et on reporte cette expression dans toutes les autres équations.
Les autres équations constituent un sous-système ayant une inconnue de moins et une équation de moins.
On recommence sur ce sous-système ...

**Exercice 7.** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l}2x-y+3z=-9\\4x+7y-2z=24\\-3x+2y+3z=-8\end{array}\right.$.

**Solution 7.** Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x-y+3z=-9\\4x+7y-2z=24\\-3x+2y+3z=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x+3z+9\\4x+7(2x+3z+9)-2z=24\\-3x+2(2x+3z+9)+3z=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x+3z+9\\18x+19z=-39\\x+9z=-26\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x+3z+9\\x=-9z-26\\18(-9z-26)+19z=-39\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-143z=429\\x=-9z-26\\y=2x+3z+9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=-3\\x=1\\y=2\end{array}\right..$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(1,2,-3)\}.}$$

---

⇨ **Commentaire** .

◇ *A la deuxième étape, nous avons exprimé $y$ en fonction de $x$ et $z$ dans la première équation. C'était le meilleur choix car il évitait de faire apparaître des fractions. De manière générale, chaque fois que vous le pourrez et en toutes circonstances (algèbre, analyse, géométrie), cherchez à **faire disparaître toute fraction** et en tout cas, n'en faites pas apparaître. Le nombre de situations où la bonne voie est de faire apparaître des fractions est excessivement réduit.*

◇ *On a écrit des équivalences entre des systèmes de **trois** équations à trois inconnues. C'est la seule bonne façon de procéder même si c'est un peu fastidieux et il n'est pas question de laisser tomber une équation même momentanément. La plupart des systèmes linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues admettent une et une seule solution. C'est le cas ici et le dernier système écrit dans la résolution est du type* $\left\{\begin{array}{l}z=\ldots\\x=\ldots\\y=\ldots\end{array}\right.$ *et comporte toujours trois équations. On n'avait aucune chance de parvenir à un tel résultat si on avait laissé tomber une équation en cours de route. Si vous ne voulez pas faire d'erreurs de raisonnement, rédigez toujours comme ci-dessus vos résolutions de systèmes et ne supprimez une équation que dans la situation où une même équation est écrite plusieurs fois.*

◇ *Revenons également sur la technique de la méthode par substitutions même si dans le chapitre en cours, seule devrait nous préoccuper l'équivalence entre deux systèmes. A la deuxième étape de la résolution, $y$ a été exprimé en fonction de $x$ et $z$ dans une équation puis on a substitué l'expression obtenue dans les deux autres équations. Les deux dernières équations constituent alors un système avec **une équation de moins et une inconnue de moins**. Dans ce sous-système, la lettre $y$ ne doit plus jamais réapparaître car sinon la résolution tournera en rond et n'aboutira jamais.*

La méthode par substitution est à privilégier à plusieurs titres. Tout d'abord en début d'année, si on tente des combinaisons linéaires, on commet souvent par manque de pratique des erreurs de raisonnements et on obtient des systèmes qui ne sont pas équivalents. D'autre part, la méthode par substitution s'utilise aussi pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires :

**Exercice 8.** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{l} x^2 = y \\ y^2 = x \end{array}\right.$.

**Solution 8.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 = y \\ y^2 = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ \left(x^2\right)^2 = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x^3 - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right..$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1)\}.}$$

---

On donne maintenant des formules bien pratiques pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux équations et deux inconnues. Il s'agit des formules de Cramer. Ces formules seront analysées plus tard dans l'année dans le cas général des systèmes de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues.

**Théorème 2 (formules de Cramer).** Soient $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ et $c'$ trois nombres complexes tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. On note $(S)$ le système

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right..$$

Le système $(S)$ admet un couple solution et un seul si et seulement si le **déterminant** de ce système

$$\Delta = \left|\begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array}\right| = ab' - ba'$$

n'est pas nul. On dit dans ce cas que le système $(S)$ est un système de Cramer ou encore un système **cramérien** et l'unique couple solution du système $(S)$ est donné par les formules

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{\Delta} \times \left|\begin{array}{cc} c & b \\ c' & b' \end{array}\right| = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \text{ et } y_0 = \frac{1}{\Delta} \times \left|\begin{array}{cc} a & c \\ a' & c' \end{array}\right| = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.}$$

**Remarque.** Dans ces formules, le déterminant associé à $x$ a été obtenu mécaniquement en remplaçant les coefficients $a$ et $a'$ de $x$ par les coefficients du second membre $c$ et $c'$ et le déterminant associé à $y$ a été obtenu en remplaçant les coefficients $b$ et $b'$ de $y$ par les coefficients du second membre $c$ et $c'$.

Démonstration .

• Supposons $ab' - a'b \neq 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = cb' - bc' \\ -a'(ax + by) + a(a'x + b'y) = -ca' + ac' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (ab' - ba')x = cb' - bc' \\ (ab' - ba')y = ac' - ca' \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{array}\right..$$

Ceci montre déjà l'unicité de la solution. Réciproquement, si on pose $x_0 = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ et $y_0 = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, alors

$$ax_0 + by_0 = a\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} + b\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{ab'c - ba'c}{ab' - ba'} = c$$

et

$$a'x_0 + b'y_0 = a'\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} + b'\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{ab'c' - ba'c'}{ab' - ba'} = c'.$$

Donc, le couple $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}\right)$ est bien solution du système considéré.

• Supposons $ab' - a'b = 0$.

- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, l'égalité $ab' - a'b = 0$ s'écrit encore $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}$. Posons $k = \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}$. On a $k \neq 0$ car sinon $a' = b' = 0$ ce qui n'est pas. De plus, $a' = ka$ et $b' = kb$. Le système considéré s'écrit alors $\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ ax + by = \dfrac{c'}{k} \end{array}\right.$. Si $\dfrac{c'}{k} \neq c$ ou encore si $c' \neq kc$, le système n'a pas de solution. Si $c' = kc$, le système se réduit à l'unique équation $ax + by = c$ et admet une infinité de couples solutions à savoir tous les couples de la forme $\left(x, -\dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$ où $x$ est un complexe quelconque.

- Si $a = 0$ alors $b \neq 0$ puis $a' = 0$ et donc $b' \neq 0$. Dans ce cas, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{c}{b} \\ y = \dfrac{c'}{b'} \end{array}\right.$. Dans ce cas aussi, ou bien le système admet une infinité de couples solutions ou bien n'admet pas de solution. Il en est de même si $a \neq 0$ et $b = 0$.

❏

**Exercice 9.**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{l} (2m-1)x + (m-2)y = 4 \\ (m+1)x + (m-3)y = 8 \end{array}\right.$ en discutant en fonction du paramètre réel $m$.

**Solution 9.** Le déterminant de ce système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m-1 & m-2 \\ m+1 & m-3 \end{vmatrix} = (2m-1)(m-3) - (m+1)(m-2) = m^2 - 6m + 5 = (m-1)(m-5).$$

**1er cas.** Si $m \notin \{1, 5\}$, le système proposé est un système de Cramer. Les formules de Cramer fournissent alors

$$x = \frac{1}{(m-1)(m-5)} \begin{vmatrix} 4 & m-2 \\ 8 & m-3 \end{vmatrix} = \frac{4(m-3) - 8(m-2)}{(m-1)(m-5)} = \frac{-4m+4}{(m-1)(m-5)} = -\frac{4}{m-5}$$

et

$$y = \frac{1}{(m-1)(m-5)} \begin{vmatrix} 2m-1 & 4 \\ m+1 & 8 \end{vmatrix} = \frac{8(2m-1) - 4(m+1)}{(m-1)(m-5)} = \frac{12m-12}{(m-1)(m-5)} = \frac{12}{m-5}.$$

Donc, si $m \notin \{1, 5\}$, $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{4}{m-5}, \dfrac{12}{m-5}\right)\right\}$.

**2ème cas.** Si $m = 1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{array}\right.$. Il est équivalent à l'unique équation $x - y = 4$ ou encore $y = x - 4$. Dans le cas où $m = 1$, $\mathcal{S} = \{(x, x-4),\ x \in \mathbb{R}\}$.

**3ème cas.** Si $m = 5$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} 9x + 3y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} 3x + y = \dfrac{4}{3} \\ 3x + y = 4 \end{array}\right.$. Dans ce cas, $\mathcal{S} = \varnothing$.

---

⇨ **Commentaire** . *Dans cet exercice, seule l'utilisation des formules de* Cramer *fournit les vrais cas particuliers* $m = 1$ *et* $m = 5$*. Toute autre méthode nous amènerait à étudier de faux cas particuliers comme* $m = 2$ *ou* $m = 3$*.*

## 1.6 Ensemble des parties d'un ensemble

### 1.6.1 Définition de $\mathcal{P}(E)$

Définition 5. Soit $E$ un ensemble. L'ensemble des parties de $E$ se note $\mathcal{P}(E)$.

L'apparition de cette nouvelle notion ($\mathcal{P}(E)$) dans le cours de mathématiques a souvent pour effet de créer la confusion entre deux symboles : $\in$ et $\subset$. A partir de maintenant, un sous-ensemble $A$ de $E$ a deux statuts : $A$ est à la fois une **partie** de $E$ (ce qui s'écrit $A \subset E$) et un **élément** de $\mathcal{P}(E)$ ($A \in \mathcal{P}(E)$). En particulier, si $x$ est un élément de $E$ (ce qui s'écrit $x \in E$), le singleton $\{x\}$ est inclus dans $E$ (ce qui s'écrit $\{x\} \subset E$) ou aussi le singleton $\{x\}$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$ (ce qui s'écrit $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$).

On doit mémoriser

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in E \Leftrightarrow \{x\} \subset E \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(E) \\ A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E. \end{array}}$$

**Remarque 1.** L'ensemble des parties de l'ensemble vide n'est pas vide mais est un singleton à savoir $\{\varnothing\}$. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
**Remarque 2.** Si $E$ est un ensemble non vide, $\mathcal{P}(E)$ contient au moins deux éléments distincts à savoir $\varnothing$ et $E$. $\varnothing$ et $E$ sont les deux sous-ensembles **triviaux** de $E$.

**Exercice 10.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.

**Solution 10.** Si $E = F$, alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$. Comme $E \in \mathcal{P}(E)$, on a aussi $E \in \mathcal{P}(F)$ ce qui s'écrit encore $E \subset F$.
Par symétrie des rôles de $E$ et $F$, on a aussi $F \subset E$. Finalement, $E = F$.

---

### 1.6.2 Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

#### 1.6.2.a Complémentaire d'une partie

Définition 6 (complémentaire d'une partie).

Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$. Le complémentaire dans l'ensemble $E$ de la partie $A$, noté $C_E(A)$ ou aussi $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$.

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c} C_E(A) = \{x \in E / \ x \notin A\} \\ \forall x \in E, \ (x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A) \end{array}}$$

On a immédiatement

**Théorème 3.**

❶ $C_E(\varnothing) = E$ et $C_E(E) = \varnothing$.

❷ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ (A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A))$.

❸ $\forall A \in \mathcal{P}(E), \ C_E(C_E(A)) = A$.

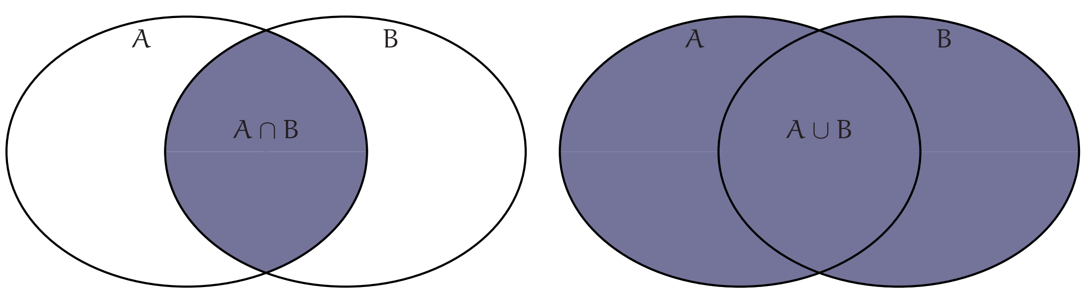
#### 1.6.2.b Intersection et réunion de deux parties

Définition 7 (intersection et réunion de deux parties).

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$.
L'**intersection** des parties $A$ et $B$, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans $A$ et dans $B$ et la **réunion** de $A$ et de $B$, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans $A$ ou dans $B$.

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c} A \cap B = \{x \in E / \ x \in A \text{ et } x \in B\} \\ \forall x \in E, \ (x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B) \\ \hline A \cup B = \{x \in E / \ x \in A \text{ ou } x \in B\} \\ \forall x \in E, \ (x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } \ x \in B). \end{array}}$$




**Théorème 4.**

| | |
|---|---|
| $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ A \cap B = B \cap A$ | $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ A \cup B = B \cup A$ |
| $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $\forall A \in \mathcal{P}(E), \ A \cap \varnothing = \varnothing$ et $A \cap E = A$ | $\forall A \in \mathcal{P}(E), \ A \cup \varnothing = A$ et $A \cup E = E$ |
| $\forall A \in \mathcal{P}(E), \ A \cap C_E(A) = \varnothing$ | $\forall A \in \mathcal{P}(E), \ A \cup C_E(A) = E$ |
| $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$ | $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$ |

**Démonstration .** Les différentes propriétés du théorème 4 sont toutes des conséquences des propriétés usuelles des connecteurs logique « et » et « ou ». On en démontre explicitement deux pour fournir un modèle de démonstration d'égalités ensemblistes.

• Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrons que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ et } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall x \in E,\ (x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C))$. Donc, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

• Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$. Montrons que $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \overline{x \in A \cap B} \Leftrightarrow \overline{x \in A \text{ et } x \in B} \\ &\Leftrightarrow \overline{x \in A} \text{ ou } \overline{x \in B} \text{ (d'après les lois de De Morgan)} \\ &\Leftrightarrow x \in C_E(A) \text{ ou } x \in C_E(B) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cup C_E(B). \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall x \in E,\ (x \in C_E(A \cap B) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cup C_E(B))$. Donc, $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.

❑

**Théorème 5.**

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3,\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \text{ et } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Comme le théorème 4, le théorème 5 est une conséquence immédiate des propriétés usuelles des connecteurs logiques « et » et « ou » exposés dans le chapitre « Logique » aux pages 3 et 4 : on sait que le « et » est distributif sur le « ou » et que le « ou » est distributif sur le « et » et donc l'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection.

### 1.6.2.c Différence de deux parties

Définition 8. (différence de deux parties).

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$. La différence de $A$ et $B$, notée $A \setminus B$ (on lit « $A$ moins $B$ » ou « $A$ privé de $B$ ») est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent à $A$ et n'appartiennent pas à $B$.

Ainsi,

$$\boxed{\begin{gathered} A \setminus B = \{x \in E/\ x \in A \text{ et } x \notin B\} \\ \forall x \in E,\ (x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B). \end{gathered}}$$

Par exemple $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $[0, 2] \setminus [1, 3] = [0, 1[$.

**Remarque.** Il ne faut pas confondre / (« tel que ») et \ (« privé de »). « Tel que » est le slash alors que « privé de » est l'antislash.

**Théorème 6.** Soient $E$ un ensemble puis $A$ et $B$ deux parties de $E$. $A \setminus B = A \cap C_E(B)$.

**Démonstration .** $A \setminus B$ est constitué des éléments de $A$ qui sont dans $A$ et pas dans $B$ de même que $A \cap C_E(B)$. ❑

**Remarque.** Si $E$ est un ensemble et $A$ est une partie de $E$, alors $C_E(A) = E \setminus A$.

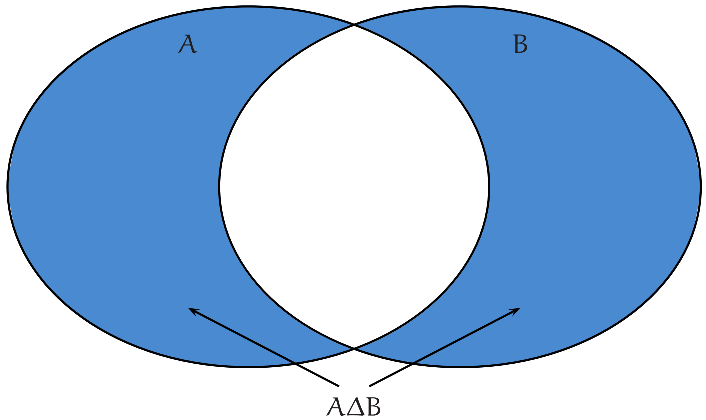
**Exercice 11 (différence symétrique).**

Soit $E$ un ensemble. Pour $(A, B) \in \mathcal{P}(E))^2$, on pose $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Démontrer que :

**1)** $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
**2)** $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A\Delta B = B\Delta A$.
**3)** $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$, $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
**4)** $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta\varnothing = A$.
**5)** $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta A = \varnothing$.
**6)** $\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$, $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

**Solution 11.**

**1)** Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. $A\Delta B$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans $A$ et pas dans $B$ ou dans $B$ et pas dans $A$. $A\Delta B$ est donc l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans exactement une des deux parties $A$ et $B$ de même que $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Ceci montre que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.




**2)** Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A.$$

**3)** Soient $A$, $B$ et $C$ trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

$(A\Delta B)\Delta C$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans $A\Delta B$ et pas dans $C$ ou dans $C$ et pas dans $A\Delta B$ ou encore $(A\Delta B)\Delta C$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont (dans exactement une des deux parties $A$ ou $B$ et pas dans $C$) ou (dans $C$ et (ni dans $A$, ni dans $B$ ou dans $A$ et $B$ à la fois)). En résumé, $(A\Delta B)\Delta C$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans exactement une des trois parties $A$, $B$ ou $C$ ou dans les trois parties. Par symétrie des rôles de $A$, $B$ et $C$, il en est de même de $(B\Delta C)\Delta A = A\Delta(B\Delta C)$. Ceci montre que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

**4)** Soit $A$ un élément de $\mathcal{P}(E)$. $A\Delta\varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \cup \varnothing = A$.

**5)** Soit $A$ un élément de $\mathcal{P}(E)$. $A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

**6)** Soient $A$, $B$ et $C$ trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned}
(A \cap C)\Delta(B \cap C) &= \left((A \cap C) \cap \left(\overline{B \cap C}\right)\right) \cup \left(\left(\overline{A \cap C}\right) \cap (B \cap C)\right) \\
&= \left((A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)\right) \cup \left(\left(\overline{A} \cup \overline{C}\right) \cap (B \cap C)\right) \\
&= \left(A \cap C \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap C \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(\overline{C} \cap B \cap C\right) \\
&= \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) = \left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) \cap C \\
&= (A\Delta B) \cap C.
\end{aligned}$$

---

# 2 Relations binaires

Maintenant que nous avons « étudié » la notion d'ensemble, nous allons nous occuper des relations pouvant exister entre les éléments d'un même ensemble ou les éléments de deux ensembles différents. On se restreindra aux relations liant deux éléments appelées « relations binaires ».

## 2.1 Définition et propriétés

Définition 9.

Une relation binaire $\mathcal{R}$ est un triplet $(E, F, G)$ où $E$ et $F$ sont deux ensembles non vides et $G$ est une partie de $E \times F$.

La définition ci-dessus est la plus propre mais pas forcément la plus claire. Pour se donner une relation entre les éléments d'un ensemble $E$ et les éléments d'un ensemble $F$, il s'agit d'abord de se donner les ensembles $E$ et $F$ puis il s'agit de décrire quand un élément donné de l'ensemble $E$ est en relation ou non avec un élément donné de l'ensemble $F$. Pour décrire cette relation, on donne alors tous les couples $(x, y)$, où $x \in E$ et $y \in F$, pour lesquels $x$ et $y$ sont en relation. L'ensemble de ces couples $(x, y)$ est une partie $G$ de $E \times F$. $G$ s'appelle le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Quand un élément $x$ de $E$ est en relation avec un élément $y$ de $F$ par la relation $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$. Le graphe de la relation $\mathcal{R}$ est donc

$$G = \{(x, y) \in E \times F/\ x\mathcal{R}y\}.$$

Quand $F = E$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur $E$. Une relation binaire peut posséder ou ne pas posséder une ou plusieurs des propriétés suivantes :

Définition 10. Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

$\mathcal{R}$ est **réflexive** si et seulement si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
$\mathcal{R}$ est **symétrique** si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$.
$\mathcal{R}$ est **anti-symétrique** si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$.
$\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

**Exemples.**

• Si $E$ est une ensemble non vide, l'égalité est la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $E$ par : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y)$. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
Dire que $\mathcal{R}$ est symétrique signifie que si pour $(x, y) \in E^2$, on a $x = y$, alors on a aussi $y = x$ (une égalité se lit dans les deux sens). On peut noter que la relation est également anti-symétrique et donc une relation peut être à la fois symétrique et anti-symétrique.

• La relation d'ordre strict dans $\mathbb{R}$ est définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Leftrightarrow y - x \in ]0, +\infty[$. Cette relation n'est pas symétrique mais elle est transitive. Elle est aussi anti-symétrique même si la situation $x < y$ et $y < x$ ne se produit jamais dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie quand $P$ est fausse). ❏

Les deux paragraphes qui suivent (relations d'équivalence et relations d'ordre) analysent des cas particuliers de relations binaires. Dans les deux cas, on a $F = E$ ou encore dans les deux cas, il s'agit de rallions binaires sur un ensemble $E$.

## 2.2 Relations d'équivalence

Définition 11. Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

$\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** sur $E$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Nous rencontrerons, au fur et à mesure du cours de mathématiques, de nombreuses relations d'équivalence. D'ores et déjà, on peut signaler :

• Si $E$ est un ensemble non vide, l'égalité est une relation d'équivalence sur $E$. C'est un modèle de relation d'équivalence.

• Dans $\mathbb{R}$, la relation de congruence modulo $2\pi$ est définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \equiv y\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ y = x + 2k\pi)$. Cette relation est une relation d'équivalence. Vérifions-le.
- Pour tout réel $x$, $x = x + 0 \times 2\pi$ et de plus $0 \in \mathbb{Z}$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ x \equiv x\ [2\pi]$. Ceci montre que la relation de congruence modulo $2\pi$ est réflexive.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \equiv y\ [2\pi]$. Il existe un entier relatif $k$ tel que $y = x + 2k\pi$. Mais alors $x = y + 2(-k)\pi$ avec $-k \in \mathbb{Z}$. Donc, $y \equiv x\ [2\pi]$. Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \equiv y\ [2\pi] \Rightarrow y \equiv x\ [2\pi]$. Ceci montre que la relation de congruence modulo $2\pi$ est symétrique.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \equiv y\ [2\pi]$ et $y \equiv z\ [2\pi]$. Il existe un entier relatif $k$ tel que $y = x + 2k\pi$ et un entier relatif $k'$ tel que $z = y + 2k'\pi$. Mais alors $z = y + 2k'\pi = x + 2k\pi + 2k'\pi = x + 2(k + k')\pi$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$. Donc, $x \equiv z\ [2\pi]$. Ainsi, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \equiv y\ [2\pi]$ et $y \equiv z\ [2\pi] \Rightarrow x \equiv z\ [2\pi]$. Ceci montre que la relation de congruence modulo $2\pi$ est transitive.

On a montré que la relation de congruence modulo $2\pi$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

• Dans $\mathbb{Z}$, la relation de congruence modulo $n$ ($n$ entier naturel donné) est définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ (a \equiv a\ n \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}/\ b = a + qn).$$

De la même façon que précédemment, on démontre que la relation la relation de congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Cette relation est très utile en arithmétique.

**Exercice 12.** Soit $P$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. Soit $\mathbb{R}$ la relation définie par

$$\forall (z, z') \in P^2,\ z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}/\ z' = \frac{z\cos(\theta) + \sin(\theta)}{-z\sin(\theta) + \cos(\theta)}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $P$.

**Solution 12.**

**Réflexivité.** Soit $z$ un élément de $P$. Puisque $z = \dfrac{z\cos(0)+\sin(0)}{-z\sin(0)+\cos(0)}$, il existe un réel $\theta$ tel que $z = \dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}$ et donc $z\mathcal{R}z$. Ceci montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.

**Symétrie.** Soient $z$ et $z'$ deux éléments de $P$ tels que $z\mathcal{R}z'$. Il existe un réel $\theta$ tel que $z' = \dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}$. On en déduit que $z'(-z\sin(\theta)+\cos(\theta)) = z\cos(\theta)+\sin(\theta)$ puis que $z(\cos(\theta)+z'\sin(\theta)) = z'\cos(\theta)-\sin(\theta)$.

Supposons $\cos(\theta)+z'\sin(\theta) = 0$. On ne peut avoir $\sin(\theta) = 0$ car alors $\cos(\theta) = 0$ ce qui est absurde, les fonctions sin et cos ne s'annulant pas simultanément. Donc, $\sin(\theta) \neq 0$ puis $z' = -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et en particulier $z'$ est un réel. Ceci est absurde car la partie imaginaire de $z'$ n'est pas nulle et donc $\cos(\theta)+z'\sin(\theta) \neq 0$.

On peut alors écrire

$$z = \frac{z'\cos(\theta)-\sin(\theta)}{\cos(\theta)+z'\sin(\theta)} = \frac{z'\cos(-\theta)+\sin(-\theta)}{-z'\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}.$$

Le réel $\theta' = -\theta$ est tel que $z = \dfrac{z'\cos(\theta')-\sin(\theta')}{-z'\sin(\theta')+\cos(\theta')}$ et donc $z'\mathcal{R}z$.

On a montré que pour tous éléments $z$ et $z'$ de $P$, si $z\mathcal{R}z'$ alors $z'\mathcal{R}z$. Par suite, la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

**Transitivité.** Soient $z$, $z'$ et $z''$ trois éléments de $P$ tels que $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$. Il existe donc des réels $\theta$ et $\theta'$ tels que $z' = \dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}$ et $z'' = \dfrac{z'\cos(\theta')+\sin(\theta')}{-z'\sin(\theta')+\cos(\theta')}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
z'' = \frac{z'\cos(\theta')+\sin(\theta')}{-z'\sin(\theta')+\cos(\theta')} &= \frac{\dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}\cos(\theta')+\sin(\theta')}{-\dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}\sin(\theta')+\cos(\theta')}\\
&= \frac{(z\cos(\theta)+\sin(\theta))\cos(\theta')+(-z\sin(\theta)+\cos(\theta))\sin(\theta')}{-(z\cos(\theta)+\sin(\theta))\sin(\theta')+(-z\sin(\theta)+\cos(\theta))\cos(\theta')}\\
&= \frac{z(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta'))+\sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta')}{-z(\sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta'))+\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')}\\
&= \frac{z\cos(\theta+\theta')+\sin(\theta+\theta')}{-z\sin(\theta+\theta')+\cos(\theta+\theta')}.
\end{aligned}$$

Le réel $\theta'' = \theta+\theta'$ est tel que $z'' = \dfrac{z\cos(\theta'')-\sin(\theta'')}{-z\sin(\theta'')+\cos(\theta'')}$ et donc $z\mathcal{R}z''$. On a montré que pour tous éléments $z$, $z'$ et $z''$ de $P$, si $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$, alors $z\mathcal{R}z''$. Par suite, la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive et donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $P$.

---

Définition 12. Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$.

Soit $x$ un élément de $E$. La **classe d'équivalence** de l'élément $x$ **modulo** la relation $\mathcal{R}$, notée $\widehat{x}$ (ou $\overline{x}$ ou $\dot{x}$), est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont en relation avec $x$ par la relation $\mathcal{R}$ :

$$\widehat{x} = \{y \in E/\ x\mathcal{R}y\}.$$

**Théorème 7.** Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$.

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \widehat{x} = \widehat{y} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

Démonstration. Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$.

• Supposons que $\widehat{x} = \widehat{y}$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $y\mathcal{R}y$ et donc $y \in \widehat{y}$. Mais alors $y \in \widehat{x}$ puis $x\mathcal{R}y$.

• Supposons que $x\mathcal{R}y$. Soit $z \in \widehat{x}$. Alors, $z\mathcal{R}x$. Puisque $x\mathcal{R}y$, on en déduit par transitivité que $z\mathcal{R}y$ et donc que $z \in \widehat{y}$. Ainsi, tout élément de $\widehat{x}$ appartient à $\widehat{y}$ et donc $\widehat{x} \subset \widehat{y}$. Par symétrie des rôles de $x$ et $y$, on a aussi $\widehat{y} \subset \widehat{x}$ et finalement $\widehat{x} = \widehat{y}$.

❑

**Théorème 8.** Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$.
Pour tous éléments $x$ et $y$ de $E$, on a ou bien $\widehat{x} = \widehat{y}$, ou bien $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \varnothing$.

**Démonstration .** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $E$. Supposons que $\widehat{x} \cap \widehat{y} \neq \varnothing$ et montrons alors que $\widehat{x} = \widehat{y}$.

Puisque $\widehat{x} \cap \widehat{y} \neq \varnothing$, il existe un élément $z$ de $E$ tel que $z \in \widehat{x} \cap \widehat{y}$. D'après le théorème précédent, on a $z\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$. Par transitivité, on en déduit que $x\mathcal{R}y$ et finalement $\widehat{x} = \widehat{y}$, toujours d'après le théorème précédent.

❏

D'après le théorème 7, les classes d'équivalence modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ vérifient les propriétés suivantes :
- aucune classe n'est vide (la classe d'un élément $x$ contient en particulier l'élément $x$ lui-même).
- tout élément de $E$ appartient à exactement une et une seule classe ($x \in \widehat{x}$ et si $x \in \widehat{y}$, alors $x\mathcal{R}y$ puis $\widehat{x} = \widehat{y}$).

Dit autrement, les classes d'équivalence sont non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est l'ensemble $E$. On dit que les classes d'équivalence constituent une **partition** de l'ensemble $E$. On définira plus loin de manière plus propre la notion de partition.

**Exemple.** Dans $\mathbb{Z}$, considérons la congruence modulo 2. Si un entier relatif est pair, cet entier est congru à $0$ modulo 2 et si un entier relatif est impair, cet entier est congru à $1$ modulo 2. Enfin, $0$ et $1$ ne sont pas congrus modulo 2. La congruence modulo 2 a donc exactement deux classes d'équivalence à savoir $\widehat{0}$ et $\widehat{1}$. La classe de l'entier $0$ est l'ensemble des entiers pairs (noté $2\mathbb{Z}$) et la classe de l'entier $1$ est l'ensembles entiers impairs (noté $2\mathbb{Z}+1$). Ces deux classe sont non vides, disjointes et leur réunion est $\mathbb{Z}$. ❏

Définition 13. Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Soit $\alpha$ une classe d'équivalence.
On appelle **représentant** de la classe $\alpha$ tout élément de la classe $\alpha$.

Par exemple, pour la congruence modulo 2 dans $\mathbb{Z}$, les entiers $-4$, $0$ et $6$ sont différents représentants de la classe de l'entier $0$. Notons que $\widehat{-4} = \widehat{0} = \widehat{6}$.

## 2.3 Relations d'ordre

Définition 14. Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

$\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** sur $E$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, anti-symétrique et transitive.

L'exemple de base de relation d'ordre est l'ordre usuel $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in [0, +\infty[$. On doit noter que $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car cette relation n'est pas réflexive.

Un autre exemple est l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ où $E$ est un ensemble donné d'après le théorème 1 page 7.

Il existe une différence de comportement entre ces deux relations. Pour l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$, quand on choisit deux réels $x$ et $y$ au hasard, on a toujours $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Dit autrement, on peut toujours classer du plus petit au plus grand deux ou plusieurs réels. On dit que $\leqslant$ est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{R}$ ou encore que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par $\leqslant$. Il n'en va pas de même pour l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ dès que l'ensemble $E$ contient au moins deux éléments (distincts) $a$ et $b$. Aucune des deux inclusions $\{a\} \subset \{b\}$ ou $\{b\} \subset \{a\}$ n'est vraie. Les deux éléments $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont **pas comparables** pour l'inclusion. Puisqu'il existe des éléments $A$ et $B$ de $\mathcal{P}(E)$ pour lesquels $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$, on dit que $\subset$ est une **relation d'ordre partiel** sur $\mathcal{P}(E)$ ou encore que $\mathcal{P}(E)$ est partiellement ordonné par la relation d'inclusion. Plus généralement,

Définition 15. Soient $E$ un ensemble non vide puis $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur $E$.

$\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre total** sur $E$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
$\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre partiel** sur $E$ si et seulement si il existe $(x,y) \in E^2$, on a $x$ non$\mathcal{R}$ $y$ et $y$ non$\mathcal{R}$ $x$.

($x$ non$\mathcal{R}$ $y$ signifie : $x$ n'est pas en relation avec $y$ par la relation $\mathcal{R}$). On note que, si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, la phrase « $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel » est le contraire de la phrase « $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total ».

**Exercice 13.** Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation de divisibilité $|$ par : $\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* /\ b = ka$.

**1)** Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
**2)** Cette relation d'ordre est-elle une relation d'ordre total ou une relation d'ordre partiel ?

**Solution 13.**

**1) Réflexivité.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$. $a = 1 \times a$ avec $1 \in \mathbb{N}^*$. Donc $a|a$. Ainsi, $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a|a$. Ceci montre que la relation $|$ est réflexive.

**Anti-symétrie.** Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a|b$ et $b|a$. Il existe deux entiers naturels non nuls $k$ et $k'$ tels que $b = ka$ et $a = k'b$. On en déduit que $a = k'b = kk'a$ puis que $kk' = 1$ car $a \neq 0$. Si $k \neq 1$, alors $k \geqslant 2$ puis $kk' \geqslant 2$ ce qui n'est pas. Donc, $k = 1$ puis $b = a$. On a montré que $\forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a|b$ et $b|a \Rightarrow a = b)$ et donc que la relation $|$ est anti-symétrique.

**Transitivité.** Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a|b$ et $b|c$. Il existe deux entiers naturels non nuls $k$ et $k'$ tels que $b = ka$ et $c = k'b$. Mais alors, $c = k'b = kk'a$ et donc l'entier $k'' = kk'$ est un entier naturel non nul tel que $c = k''a$. Par suite, $a|c$. On a montré que $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $(a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c)$ et donc que la relation $|$ est transitive.

Finalement, la relation $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

**2)** 2 et 3 sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $2 \not| 3$ et $3 \not| 2$. Donc, $|$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.

---

⇨ **Commentaire** . *La relation de divisibilité $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ mais n'est plus une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^*$. Sur $\mathbb{Z}^*$, les conditions $a|b$ et $b|a$ n'entrainent pas $a = b$ et donc la relation $|$ n'est pas anti-symétrique. Par exemple $1$ divise $-1$ et $-1$ divise $1$ et pourtant $-1 \neq 1$. On montre de manière générale en arithmétique que dans $\mathbb{Z}^*$, $(a|b$ et $b|a \Leftrightarrow b = \pm a)$.*

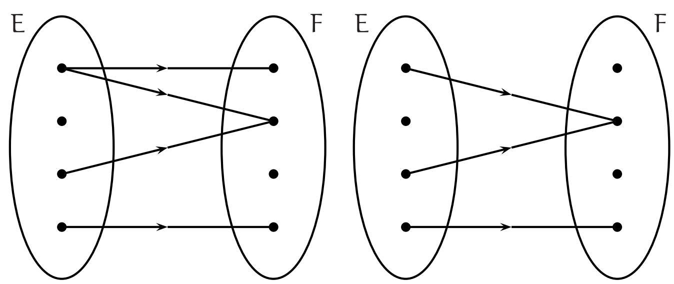
# 3 Fonctions, applications

## 3.1 Fonctions

### 3.1.1 Définitions

DÉFINITION 16. Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Une relation binaire entre les éléments de $E$ et les éléments de $F$ est appelée **fonction de $E$ vers $F$** si et seulement si tout élément de l'ensemble $E$ est en relation avec au plus un élément de l'ensemble $F$.

L'ensemble des fonctions de $E$ vers $F$ se note $\mathcal{F}(E, F)$.



pas fonction fonction

Si $x$ est un élément de $E$ en relation avec un élément $y$ de $F$ par une fonction $f$, on écrit $y = f(x)$ et on dit que $y$ est **l'image** de $x$ par la fonction $f$, mais aussi que $x$ est **un antécédent** de $y$ par la fonction $f$.
Une fonction se note $f : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ ou parfois plus simplement $f : x \mapsto f(x)$ ou encore plus simplement $f$. Mais une fonction ne se note pas $f(x)$ car la notation $f(x)$ désigne l'image de l'élément $x$ par la fonction $f$.

L'ensemble $E$ est l'**ensemble de départ** de la fonction $f$ et l'ensemble $F$ est l'**ensemble d'arrivée** de la fonction $f$. L'ensemble des éléments de $E$ qui ont effectivement une image par la fonction $f$ s'appelle le **domaine de définition** de la fonction $f$. L'ensemble des couples $(x, f(x))$ où $x$ décrit $E$ s'appelle le **graphe** de la fonction $f$.

*Le domaine de définition d'une fonction n'est pas nécessairement son ensemble de départ. Un élément très important de l'apprentissage d'un cours de mathématiques est l'apprentissage du* ***vocabulaire****. On doit à chaque fois faire l'effort d'assimiler le sens précis d'un mot ou d'une expression et on ne doit jamais se contenter d'une vision superficielle ou approximative.*

**Exercice 14.**
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}\right)$. Déterminer le domaine de définition $D$ de la fonction $f$.

**Solution 14.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{x^2 - 3x + 3} \neq 0 \text{ et } 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 > 0 \text{ et } \sqrt{x^2 - 3x + 3} > 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ou } x > 2.$$

Ainsi, $D = ]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

---

⇨ **Commentaire** . *Quand on cherche un domaine de définition, on écrit les problèmes rencontrés dans le calcul de $f(x)$ dans l'ordre où on les rencontre (ici, on doit d'abord calculer $\sqrt{x^2-3x+3}$ ($x^2-3x+3 \geqslant 0$), puis en prendre l'inverse ($\sqrt{x^2-3x+3} \neq 0$) et enfin calculer le logarithme de $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}}$ ($1 - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}} > 0$). Une fois ces problèmes correctement posés, on peut les résoudre.*

**Définition 17 (égalité de deux fonctions).**

Deux fonctions sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe.

C'est un moment important. Considérons par exemple les deux fonctions $f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^2\end{array}$ et $g\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+\\ x & \mapsto & x^2\end{array}$. La fonction $g$ est **bijective**, c'est à dire que tout réel positif a un et un seul carré et que tout réel positif est le carré d'un et un seul réel positif. La fonction $f$ quant à elle, n'est pas bijective car $-1$ n'est le carré d'aucun réel ou aussi car $1$ est le carré des deux réels distincts $-1$ et $1$. Nous ne pouvons donc pas nous permettre de penser que $f$ et $g$ sont une seule et même fonction et il faut vraiment des notations différentes ($f$ et $g$). Ces deux fonctions ne sont pas les mêmes car elles n'ont pas même ensemble de départ, ou aussi pas même ensemble d'arrivée.
Si maintenant $f$ et $g$ sont deux fonctions ayant même ensemble de départ $E$ et même ensemble d'arrivée $F$ alors elles sont égales si et seulement si elles ont même graphe. Cette dernière phrase équivaut à la phrase plus simple mais plus longue : $f$ et $g$ ont même domaine de définition $D$ et $\forall x \in D,\ f(x) = g(x)$.

**Exercice 15.** Dans chacun des cas suivants, $f$ et $g$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si elles sont égales ou pas.

**1)** $f\ :\ x \mapsto \sqrt{x^2}$ et $g\ :\ x \mapsto x$.
**2)** $f\ :\ x \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2$ et $g\ :\ x \mapsto x$.
**3)** $f\ :\ x \mapsto \ln\left(x^2-3x+2\right)$ et $g\ :\ x \mapsto \ln(x-1)+\ln(x-2)$.
**4)** $f\ :\ x \mapsto \ln\left(x^2-3x+2\right)$ et $g\ :\ x \mapsto \ln(|x-1|)+\ln(|x-2|)$.
**5)** $f\ :\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{3+x}}$ et $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{3+x}}$.

**Solution 15.** Dans chacun des cas, $f$ et $g$ ont même ensemble de départ à savoir $\mathbb{R}$ et même ensemble d'arrivée à savoir $\mathbb{R}$.

**1)** $f$ et $g$ ont même domaine de définition. Pour tout réel $x$, $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$. En particulier, $f(-1) = 1 \neq -1 = g(-1)$. Donc $f \neq g$.

**2)** Le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}^+$ et le domaine de définition de $g$ est $\mathbb{R}$. $f$ et $g$ n'ont pas même domaine de définition et donc $f \neq g$. On note tout de même que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x)$.

**3)** Le domaine de définition de $f$ est $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ et le domaine de définition de $g$ est $]2, +\infty[$. $f$ et $g$ n'ont pas même domaine de définition et donc $f \neq g$. On note tout de même que pour $x > 2$, on a $f(x) = g(x)$.

**4)** Le domaine de définition de $f$ est $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ et celui de $g$ est $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Donc, $f \neq g$. Néanmoins, pour $x \in ]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, on a $x^2-3x+2 > 0$, et donc

$$f(x) = \ln(x^2-3x+2) = \ln|x^2-3x+2| = \ln(|x-1||x-2|) = \ln(|x-1|) + \ln(|x-2|) = g(x).$$

**5)** $f$ et $g$ ont même domaine de définition, à savoir $D = ]-3, 1]$. Pour $x \in D$, on a $1-x > 0$ et $3+x > 0$. Par suite,

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{3+x}} = g(x).$$

Donc, $f = g$.

---

⇨ **Commentaire** . *Une très mauvaise « solution » de 1. aurait été $|x| \neq x$. Cette égalité* ***non précédée d'un quantificateur*** *peut signifier que la fonction valeur absolue n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ (ce qui est juste), mais aussi que pour tout $x$ réel, la valeur absolue de $x$ n'est pas $x$ (ce qui est faux). On rappelle que*

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$$

*et donc que*

$$f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq g(x).$$

*Nous étions dans ce dernier cas et pour le démontrer, nous avons fourni explicitement un réel qui n'avait pas la même image par* $f$ *et par* $g$*.*

### 3.1.2 Restrictions et prolongements

**Définition 18 (restriction).** Soit $f$ une fonction d'un ensemble non vide $E$ vers un ensemble non vide $F$ et $E'$ une partie non vide de $E$. La **restriction** de $f$ à $E'$ est la fonction, notée $f_{/E'}$, qui à tout élément $x$ de $E'$ associe l'élément $f(x)$.

Ainsi,

$$\text{si } f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}, \text{ alors } f_{/E'} : \begin{array}{ccc} E' & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas strictement croissante mais la restriction de $f$ à $\mathbb{R}^+$, notée $f_{/\mathbb{R}^+}$ est strictement croissante.

On peut aussi décider d'agrandir l'ensemble de départ. C'est la notion de prolongement :

**Définition 19 (prolongement).** Soit $f$ une fonction d'un ensemble non vide $E$ vers un ensemble non vide $F$. Soient $E'$ un ensemble contenant $E$ et $g$ une application de $E'$ vers $F$.

La fonction $g$ est un **prolongement** de la fonction $f$ à $E'$ si et seulement si $f$ est la restriction de $g$ à $E$.

Dans le programme d'analyse, on découvrira la notion de prolongement par continuité. Par exemple, la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$ « n'est pas définie en $0$ ». On peut alors définir la fonction $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$.

La fonction $\widetilde{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $f$ sur $\mathbb{R}^*$. La valeur choisie pour $\widetilde{f}(0)$ est la limite quand $x$ tend vers $0$ de $\dfrac{\sin x}{x}$ à savoir $1$. La fonction $\widetilde{f}$ est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$. Un des intérêts de la fonction $\widetilde{f}$ est de pouvoir effectuer une étude en $0$ dans le but d'en construire le graphe. La dérivée de la fonction $\widetilde{f}$ en $0$ s'obtiendra par le calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0}$ alors que le taux $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'existe pas.

Il n'y a pas unicité d'un prolongement. La fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$ est aussi un prolongement à $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ mais ce prolongement n'est pas continu en $0$.

## 3.2 Applications

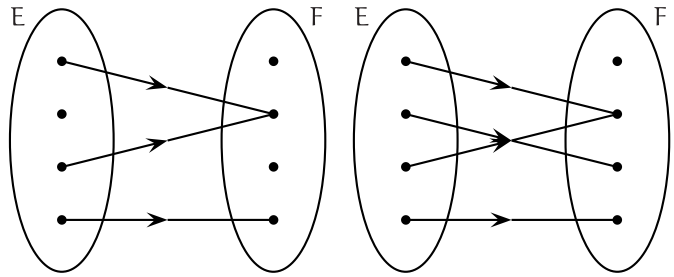
### 3.2.1 Définition

**Définition 20 (application).** Soit $f$ une fonction d'un ensemble non vide $E$ vers un ensemble non vide $F$.

$f$ est une **application** de $E$ vers $F$ si et seulement si tout élément de l'ensemble de départ $E$ a une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée $F$ par $f$.

Avec des quantificateurs, cela donne

Soit $f$ une fonction d'un ensemble $E$ vers une ensemble $F$.
$f$ application $\Leftrightarrow (\forall x \in E),\ (\exists! y \in F/\ y = f(x))$.




fonction mais pas application　　　　application

• L'ensemble des applications de $E$ vers $F$ se note $\mathcal{A}(E,F)$ ou plus fréquemment $F^E$ (faire attention à l'ordre des lettres). Ainsi, l'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (car une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). Cette situation permet déjà de commencer à comprendre la notation sous forme d'exposant. L'ensemble des $n$-uplets de réels $(x_0,\dots,x_{n-1})$ se note $\mathbb{R}^n$. Par « passage à la limite », l'ensemble des suites réelles $(x_0,\dots,x_{n-1},\dots)$ se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On reviendra sur cette notation dans d'autres chapitres.

• La restriction d'une fonction à son domaine de définition est une application. Ceci fait que l'on identifie parfois les notions de fonction et d'application.

### 3.2.2 Composition des applications

Définition 21. Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$.

La **composée** des applications $g$ et $f$ (ou $f$ suivie de $g$), notée $g\circ f$, est l'application de $E$ vers $G$ définie par

$$\forall x\in E,\ g\circ f(x)=g(f(x)).$$

$g\circ f$ se visualise sur le graphique suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \mapsto & f(x) & & \\ & & y & \mapsto & g(y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g\circ f} & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

*En général, $g\circ f\neq f\circ g$. Déjà, si $f$ va de $E$ dans $F$ et $g$ va de $F$ dans $G$ et si $G\neq E$, $g\circ f$ est définie alors que $f\circ g$ ne l'est pas. Mais même si $g\circ f$ et $f\circ g$ sont définis (dans le cas où $E=F=G$ par exemple), il est possible que $g\circ f$ et $f\circ g$ soient deux applications différentes. On dit que la loi $\circ$ n'est pas commutative.*

Considérons par exemple les deux applications $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x+1\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^2\end{array}$. Pour tout réel $x$, on a

$$g\circ f(x)=g(f(x))=(f(x))^2=(x+1)^2$$

alors que

$$f\circ g(x)=f(g(x))=g(x)+1=x^2+1,$$

et en particulier, $g\circ f(-1)=0$ et $f\circ g(-1)=2$. Donc ici, $g\circ f\neq f\circ g$. On sait bien que l'ordre dans lequel on effectue différentes opérations a une importance. Il ne revient pas au même d'élever au carré puis d'ajouter $1$ ou d'ajouter $1$ puis d'élever au carré.

**Notation.** Soit $E$ un ensemble non vide. L'**identité** de $E$ est l'application de $E$ dans lui-même définie par :

$$\forall x\in E,\ \mathrm{Id}_E(x)=x.$$

On a immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 9.** Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ quatre ensembles non vides. Soient $f\in F^E$, $g\in G^F$ et $h\in H^G$.

❶ $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

❷ $\mathrm{Id}_E\circ f=f$ et $f\circ \mathrm{Id}_F=f$.

**Notation.** Soit $E$ un ensemble non vide puis $f$ est une application de $E$ dans $E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ facteurs}} = f^n.$$

On a immédiatement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^*$, $f^n \circ f^p = f^{n+p}$ et $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^*$, $(f^n)^p = f^{np}$.

*La loi $\circ$ n'étant pas commutative, en général, $(f \circ g)^n \neq f^n \circ g^n$ (où $f$ et $g$ sont deux applications d'un ensemble non vide $E$ dans lui-même). Par exemple, en général, $(f \circ g)^2 = f \circ g \circ f \circ g \neq f \circ f \circ g \circ g = f^2 \circ g^2$. Si $f$ et $g$* ***commutent****, c'est-à-dire si $f \circ g = g \circ f$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$.*

### 3.2.3 Fonction indicatrice (ou caractéristique) d'une partie

Définition 22 (fonction indicatrice d'une partie (ou fonction caractéristique d'une partie)).
Soit $E$ est un ensemble non vide et $A$ une partie donnée de $E$. Pour $x \in E$, on pose $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.

**Exercice 16.**

**1)** Préciser $\chi_A$ quand $A = \varnothing$ ou $A = E$.
**2)** Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, exprimer $\chi_{\overline{A}}$ en fonction de $\chi_A$.
**3)** Pour $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, exprimer $\chi_{A\cap B}$ en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$.
**4)** Pour $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, exprimer $\chi_{A\cup B}$ et $\chi_{A\setminus B}$ en fonction de $\chi_A$ et $\chi_B$.

**Solution 16.**

**1)** $\chi_\varnothing = 0$ et $\chi_E = 1$ où $0$ désigne la fonction nulle, c'est-à-dire la fonction qui, à tout élément de $E$ associe le nombre $0$ et $1$ désigne la fonction qui, à tout élément de $E$ associe le nombre $1$.

**2)** Pour tout élément $x$ de $E$, on a $\chi_A(x) + \chi_{\overline{A}}(x) = 1$. Par suite, $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$ (où $1$ désigne toujours la fonction qui à tout élément associe $1$).

**3)** Soit $x \in E$. Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $\chi_A(x)\chi_B(x) = 1 = \chi_{A\cap B}(x)$. Si $x \notin A$ ou $x \notin B$, $\chi_A(x)\chi_B(x) = 0 = \chi_{A\cap B}(x)$. Finalement, $\forall x \in E$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B$.

**4)** $\chi_{A\cup B} = 1 - \chi_{\overline{A\cup B}} = 1 - \chi_{\overline{A}\cap\overline{B}} = 1 - (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$.
D'autre part, $\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\cap\overline{B}} = \chi_A \times \chi_{\overline{B}} = \chi_A\,(1-\chi_B) = \chi_A - \chi_A\chi_B$.

---

**Remarque.** La fonction caractéristique de $A$, notée $\chi_A$, peut aussi être notée $1_A$.

## 3.3 Image directe, image réciproque d'une partie par une application

### 3.3.1 Image directe

Définition 23. Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f$ une application de $E$ vers $F$.

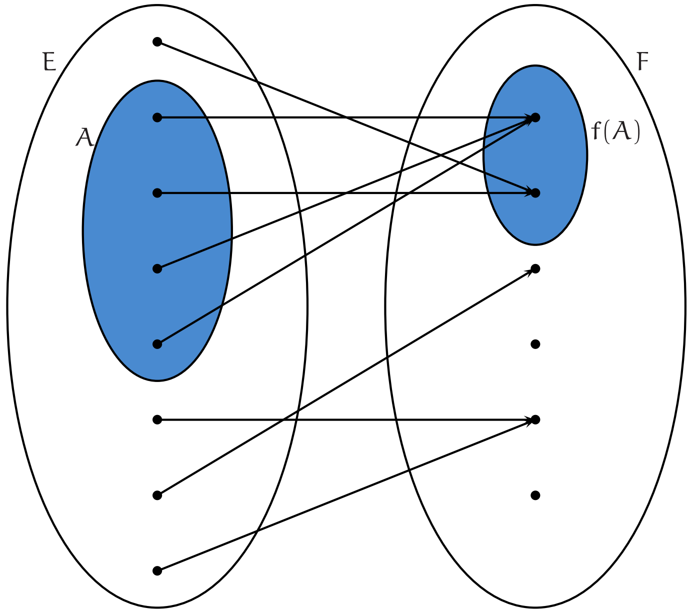
Soit $A$ une partie de $E$. L'**image directe** de la partie $A$ par l'application $f$, notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de $A$ par $f$.

$$f(A) = \{y \in F / \ \exists x \in A / \ y = f(x)\} = \{f(x),\ x \in A\}.$$

**Exemple.** Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, alors $f([-1,2]) = [0,4]$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Avec des quantificateurs, cela donne :

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f \in F^E$. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
$\forall y \in F,\ (y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A / \ y = f(x))$.




*Sur le graphique ci-dessus, il existe un élément de* $\mathsf{E}$ *qui n'est pas dans* $\mathsf{A}$ *et dont l'image est dans* $\mathsf{f}(\mathsf{A})$*. Donc,*

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \quad \text{mais} \quad f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A.$$

**Théorème 10.** Soient E et F deux ensembles non vides puis f une application de E vers F.

❶ $f(\varnothing) = \varnothing$.

❷ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $(A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B))$.

❸ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

❹ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

**Démonstration .**

❶ Immédiat.

❷ Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Si $f(A) = \varnothing$, alors $f(A) \subset f(B)$. Sinon, soit $y \in f(A)$. Il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque $A \subset B$, on a $x \in B$ et donc $y$ est l'image par f d'un élément de B ou encore $y \in f(B)$. Ceci montre dans tous les cas que $f(A) \subset f(B)$.

❸ Soient A et B deux parties de E. Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B / \ y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in E/((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in E/ \ ((x \in A \text{ et } y = f(x)) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in E/ \ (x \in A \text{ et } y = f(x))) \text{ ou } (\exists x \in E/ \ (x \in B \text{ et } y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A/ \ y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in B/ \ y = f(x)) \Leftrightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

Donc, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. (Cette démonstration est correcte même si $f(A \cup B) = \varnothing$).

❹ Soient A et B deux parties de E. Soit $y \in F$.

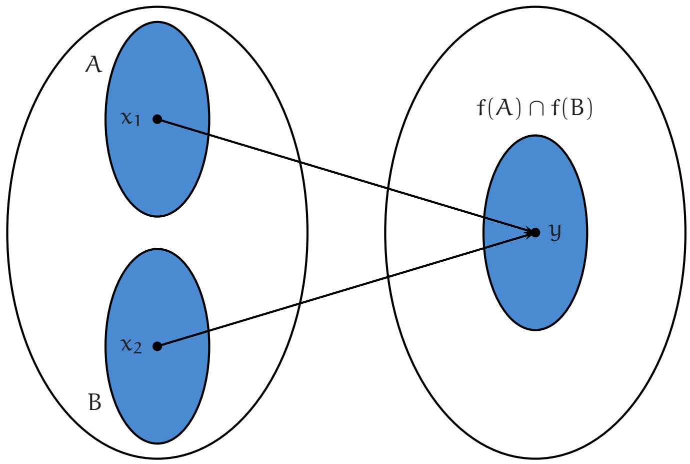
$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B / \ y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in E/((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } y = f(x)) \\
&\Rightarrow (\exists x \in E/ \ (x \in A \text{ et } y = f(x))) \text{ et } (\exists x \in E/ \ (x \in B \text{ et } y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow (\exists x \in A/ \ y = f(x)) \text{ et } (\exists x \in B/ \ y = f(x)) \Leftrightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B).
\end{aligned}$$

Donc, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

❑

⇨ **Commentaire .**

• *Il est possible que* $f(A\cap B) \underset{\neq}{\subset} f(A)\cap f(B)$. *Considérons par exemple,* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *puis* $A=\{-1\}$ *et* $B=\{1\}$. *On a alors* $A\cap B=\varnothing$ *et donc* $f(A\cap B)=\varnothing$ *puis* $f(A)\cap f(B)=\{1\}\cap\{1\}=\{1\}$. *Dans ce cas,* $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$. *Ce problème est directement lié à un autre problème analysé dans le chapitre précédent : « on ne peut pas distribuer* $\exists$ *sur et ». On rappelle que quand on écrit :* $\exists x\in A/\ y=f(x)$ *et* $\exists x\in B/\ y=f(x)$, *la même lettre* $x$ *utilisée dans chacun des deux morceaux de phrase ne désigne pas forcément un seul et même élément. Une écriture plus explicite est* $\exists x_1\in A/\ y=f(x_1)$ *et* $\exists x_2\in B/\ y=f(x_2)$. *Dans ce cas, l'élément* $y=f(x_1)=f(x_2)$ *est dans* $f(A)\cap f(B)$ *mais pas nécessairement dans* $f(A\cap B)$. *Sur le dessin ci-dessous, on a représenté la situation de base dans laquelle* $f(A\cap B)\underset{\neq}{\subset} f(A)\cap f(B)$.




• *Il n'existe aucun lien général en* $f\left(\overline{A}\right)$ *et* $\overline{f(A)}$. *Reprenons l'exemple de la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. *Prenons* $A=[-1,2]$. *Alors,* $\overline{A}=]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ *puis* $f\left(\overline{A}\right)=]1,+\infty[$. *D'autre part,* $f(A)=[0,4]$ *puis* $\overline{f(A)}=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$ *et aucune des deux parties ne contient l'autre.*

### 3.3.2 Image réciproque

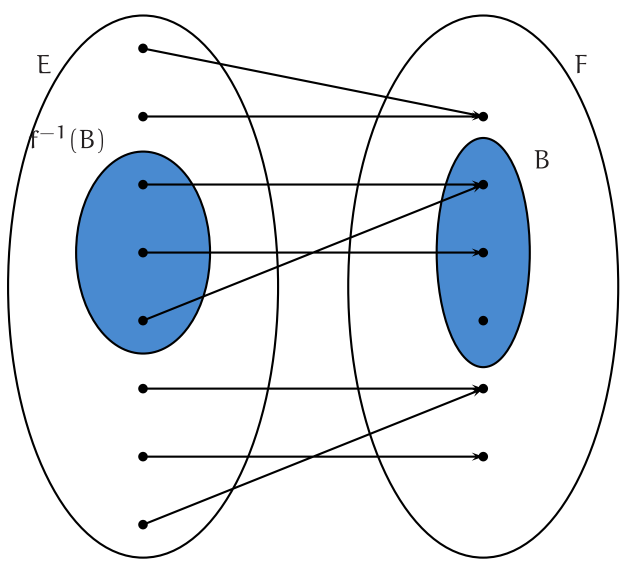
Définition 24. Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f$ une application de $E$ vers $F$.

Soit $B$ une partie de $F$. L'**image réciproque** de la partie $B$ par l'application $f$, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents des éléments de $B$ par $f$.

$$f^{-1}(B)=\{x\in E/\ \exists y\in B/\ f(x)=B\}=\{x\in E/\ f(x)\in B\}.$$

Avec des quantificateurs, cela donne :

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f\in F^E$. Soit $B\in\mathcal{P}(F)$.
$\forall x\in E,\ (x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B)$.



Par exemple, si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, alors $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}([-1,4]) = [-2,2]$.

On a vu que l'image directe avait un comportement un peu délicat. Ce n'est pas le cas de l'image réciproque avec laquelle tout se passe bien :

**Théorème 11.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f$ une application de $E$ vers $F$.

❶ $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

❷ $\forall A \in \mathcal{P}(F)$, $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$.

❸ $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(F))^2$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

❹ $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

**Démonstration .**

❶ Immédiat.

❷ Soit $A$ une partie de $F$. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \overline{f^{-1}(A)}.$$

Ceci montre que $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$.

❸ Soient $A$ et $B$ deux parties de $F$. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow (f(x) \in A) \text{ ou } (f(x) \in B) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \text{ ou } (x \in f^{-1}(B)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Ceci montre que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

❹ Soient $A$ et $B$ deux parties de $F$. Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow (f(x) \in A) \text{ et } (f(x) \in B) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \text{ et } (x \in f^{-1}(B)) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Ceci montre que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

❏

Mais dès que l'image directe réapparaît, les problèmes ressurgissent :

**Théorème 12.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f$ une application de $E$ vers $F$.

❶ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

❷ $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

**Démonstration .**

❶ Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $x \in E$.

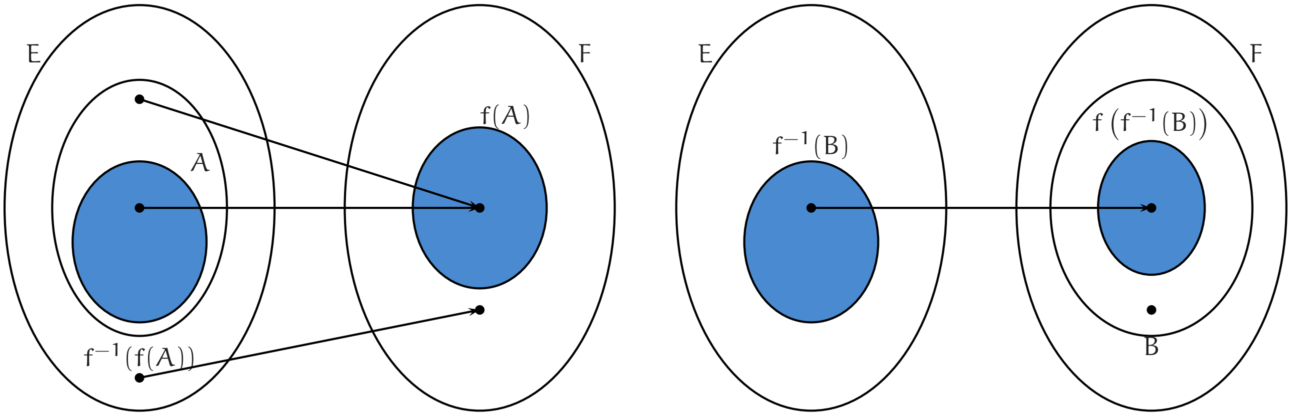
$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A)).$$

(les éléments de $A$ sont des antécédents d'éléments de $f(A)$).

❷ Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. L'image par $f$ d'un antécédent d'élément de $B$ est par définition dans $B$. Donc $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

❏

Chacune des inclusions précédentes peut être stricte. Les deux graphiques ci-dessous devraient suffire pour s'en convaincre.




Sur le premier graphique, un élément pas dans $A$ a son image dans $f(A)$ ce qui fait que $A \neq f^{-1}(f(A))$. Sur le deuxième graphique, un élément de $B$ n'a pas d'antécédent ce qui fait que $f\left(f^{-1}(B)\right) \neq B$.

## 3.4 Injections, surjections, bijections

Dans ce paragraphe, $f$ désigne systématiquement une application. Cette application pourra être ou ne pas être injective, surjective, bijective.

### 3.4.1 Injections (ou applications injectives)

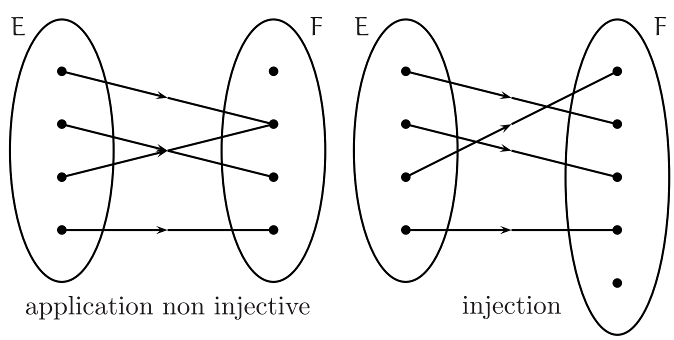
Définition 25 (injection). Soit $f$ une application d'un ensemble non vide $E$ vers un ensemble non vide $F$.

$f$ est **injective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ a **au plus** un antécédent dans $E$ par $f$ (c'est-à-dire soit pas d'antécédent, soit exactement un antécédent).

Il revient au même de dire que deux éléments différents de l'ensemble $E$ ont des images différentes. Avec des quantificateurs, cela donne :

Soit $f$ une application d'un ensemble non vide $E$ dans un ensemble non vide $F$.
$f$ injective $\Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2),\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
$f$ injective $\Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2),\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

⇨ **Commentaire** . *La première équivalence « $f$ injective $\Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2),\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ » est simple à comprendre. Elle dit que deux éléments différents ont des images différentes. Elle présente néanmoins un défaut : elle utilise la relation $\neq$. La relation $\neq$ a de nombreuses propriétés désagréables : elle n'est pas transitive (on a $0 \neq 1$ et $1 \neq 0$ mais on n'a pas $0 \neq 0$), elle n'est pas compatible avec l'addition (on a $0 \neq 1$ et $1 \neq 0$ mais on n'a pas $0 + 1 \neq 1 + 0$) .... Pour cette raison, on préfère contraposer l'implication précédente : « $f$ injective $\Leftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in E^2),\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ » pour travailler avec la relation $=$ beaucoup plus facile à manipuler. La phrase obtenue dit que si deux éléments ont même image, ils ne peuvent qu'être égaux. Cette phrase est peut-être moins claire mais beaucoup plus agréable à manipuler dans la pratique.*



**Exercice 17.**

**1)** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-1}{z-i} \end{array}$. Montrer que $f$ est injective.

**2)** Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-3x+2 \end{array}$. Montrer que $g$ n'est pas injective.

**Solution 17.**

**1)** $f$ est bien une application. Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}\setminus\{i\})^2$.

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Rightarrow \frac{z_1-1}{z_1-i} = \frac{z_2-1}{z_2-i} \Rightarrow (z_1-1)(z_2-i) = (z_2-1)(z_1-i) \\ &\Rightarrow z_1z_2 - iz_1 - z_2 + i = z_1z_2 - iz_2 - z_1 + i \Rightarrow (1-i)z_1 = (1-i)z_2 \\ &\Rightarrow z_1 = z_2. \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}\setminus\{i\})^2,\ (f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2)$. L'application $f$ est donc injective.

**2)** $g(1) = 0 = g(2)$ avec $1 \neq 2$. On a montré que : $\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 \neq x_2$ et $g(x_1) = g(x_2))$. L'application $g$ n'est donc pas injective.

---

⇨ **Commentaire** .

• *Dans la question 1), on a démontré la bonne implication :* $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ *et pas du tout l'implication* $z_1 = z_2 \Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$ *qui est vérifiée par n'importe quelle application. Notons que dans la définition d'une injection, on aurait pu écrire :* $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2)$. *Mais on ne l'a pas fait car seule l'implication de gauche à droite fait de* $f$ *une injection (même si l'implication de droite à gauche est vraie).*

• *Dans la question 2), il a fallu nier la phrase « $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ ». On obtient :*

$$f \text{ non injective} \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in E^2,\ (x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)).$$

*Comme d'habitude, pour montrer une existence, on fournit explicitement. Ici, on a fourni le couple* $(1, 2)$.

**Théorème 13 (composée d'injections).** Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles non vides, $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$. Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

**Démonstration .** Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ (car } g \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } f \text{ est injective)} \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$. $g \circ f$ est donc injective. ❏

**Théorème 14.** Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles non vides, $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$. Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

**Démonstration .** Supposons que $g \circ f$ est injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g\circ f \text{ est injective)} \end{aligned}$$

On a montré que : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$. $f$ est donc injective. ❏

### 3.4.2 Surjections (ou applications surjectives)

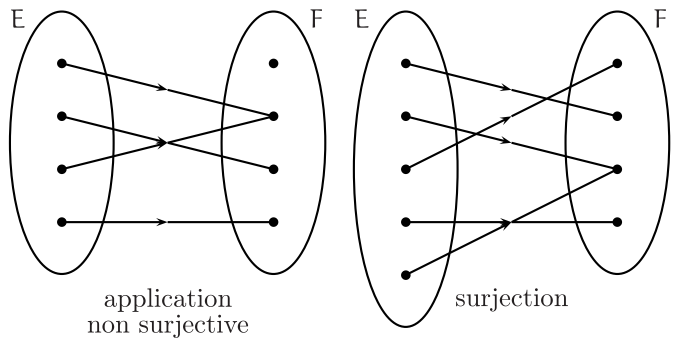
DÉFINITION 26 (SURJECTION). Soit $f$ une application d'un ensemble non vide $E$ vers un ensemble non vide $F$.

$f$ est **surjective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ a **au moins** un antécédent dans $E$ par $f$.

Avec des quantificateurs, cela donne

Soit $f$ une application d'un ensemble $E$ vers un ensemble $F$.
$f$ surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E/\ y = f(x)$.

On doit prendre garde à ne pas transformer la définition correcte d'une surjection (à savoir $\forall y \in F,\ \exists x \in E/\ y = f(x)$) en $\forall x \in E,\ \exists y \in F/\ y = f(x)$. La conclusion est la même mais cette dernière phrase ne signifie pas que $f$ est surjective. En fait, elle ne signifie même pas que $f$ est une application.



application
non surjective

surjection

Un résultat immédiat est :

**Théorème 15.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f$ une application de $E$ vers $F$.

$f$ est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$.

**Théorème 16 (composée de surjections).** Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles non vides, $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$. Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

DÉMONSTRATION. Soit $z \in G$. Puisque $g$ est surjective, il existe un élément $y$ de $F$ tel que $g(y) = z$. Puisque $f$ est surjective, il existe un élément $x$ de $E$ tel que $f(x) = y$. Mais alors, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ et $x$ est un antécédent de $z$ par $g \circ f$.

On a montré que : $\forall z \in G,\ \exists x \in E/\ f(x) = z$. $g \circ f$ est donc surjective. ❏

**Théorème 17** Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles non vides, $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$. Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

DÉMONSTRATION. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$. Il existe un élément $x$ de $E$ tel que $g \circ f(x) = z$. Posons $y = f(x)$. $y$ est un élément de $F$ tel que $g(y) = z$.

On a montré que : $\forall z \in G,\ \exists y \in F/\ g(y) = z$. $g$ est donc surjective. ❏

**Exercice 18.** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4.$$

**1)** $f$ est-elle injective ?
**2)** $f$ est-elle surjective ?
**3)** Déterminer $f\left(\mathbb{R}^2\right)$.

**Solution 18.**

**1)** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 5$. Donc, $f(0, 0) = f(2, 0) = -4$ avec $(0, 0) \neq (2, 0)$. Ceci montre que $f$ n'est pas injective.

**2)** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 5 \geqslant -5$. Donc $-6$ n'a pas d'antécédent par $f$. Ceci montre que $f$ n'est pas surjective.

**3)** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 5 \geqslant -5$. Donc, $f\left(\mathbb{R}^2\right) \subset [-5, +\infty[$. Inversement, soit $z \in [-5, +\infty[$. Soit $(x, y) = \left(1 + \sqrt{z+5}, 0\right)$. Alors,

$$f(x, y) = \left(1 + \sqrt{z+5} - 1\right)^2 + 0^2 - 5 = z.$$

Donc, tout élément de $[-5, +\infty[$ a (au moins) un antécédent par $f$ dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $[-5, +\infty[\subset f\left(\mathbb{R}^2\right)$ et finalement $f\left(\mathbb{R}^2\right) = [-5, +\infty[$. On note que $f\left(\mathbb{R}^2\right) \neq \mathbb{R}$ ce qui redémontre le fait que $f$ n'est pas surjective.

---

De manière générale, montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective consiste à montrer que pour tout $y$ de $F$, il existe au moins un élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$. On se donne donc un élément $y$ de $F$ et on montre que l'**équation** $y = f(x)$, d'inconnue $x$, a au moins une solution $x$ dans $E$, en résolvant cette équation par exemple ou autrement.

**Exercice 19.** Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2,\ f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrer que $f$ est surjective.

**Solution 19.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

• Si $(x, y) = (0, 0)$, on pose $(r, \theta) = (0, 0)$. On a $f(r, \theta) = (0, 0) = (x, y)$.

• Si $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le nombre complexe $z = \dfrac{1}{r}(x + iy)$ est de module 1. Donc, il existe un réel $\theta$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ et $\dfrac{y}{r} = \sin\theta$ puis $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y)$.

On a montré que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / f(r, \theta) = (x, y)$. Donc, $f$ est surjective.

---

### 3.4.3 Bijections, réciproque d'une bijection

Définition 27 (bijection). Soit $f$ une application d'un ensemble non vide $E$ dans un ensemble non vide $F$. $f$ est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent dans $E$ par $f$.

**Vocabulaire.** Si on veut être précis en terme de vocabulaire, on doit dire :
- $f$ est une application de $E$ **vers** $F$.
- $f$ est une injection de $E$ **dans** $F$.
- $f$ est une surjection de $E$ **sur** $F$.
- $f$ est une bijection de $E$ **sur** $F$.

Néanmoins, dans la pratique, on n'est pas aussi méticuleux et on dit que $f$ est une application, une injection, une surjection, une bijection de $E$ vers $F$ ou de $E$ dans $F$.

Un théorème immédiat est :

**Théorème 18.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides puis $f$ une application de $E$ vers $F$.

$f$ est bijective si et seulement si $f$ est injective et surjective.

Quand $f : E \to F$ est bijective, pour chaque $y$ de $F$, il existe un et un seul élément $x$ de $E$ tel que $f(x) = y$. On peut alors définir l'application de $F$ vers $E$ qui, à chaque $y$ de $F$, associe l'unique élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$ :

Définition 28 (réciproque d'une bijection). Soit $f$ une application bijective d'un ensemble non vide $E$ sur un ensemble non vide $F$.

La **réciproque** de $f$ est l'application notée $f^{-1}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

On note que la notion de réciproque n'a de sens que pour une bijection.

**Exemples.** L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est bijective. Sa réciproque est l'application $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ car

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}.$$

L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & ]0,+\infty[ \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$ est bijective. Sa réciproque est l'application $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & ]0,+\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$ car

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

❏

**Théorème 19.** Soit f une application bijective d'un ensemble non vide E sur un ensemble non vide F.

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F.$$

**Démonstration .**

Soit $x$ un élément de E. Soit $y = f(x)$. Alors $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$. Ainsi $\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x$ et donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Soit $y$ un élément de F. Soit $x = f^{-1}(y)$. Alors $y = f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right)$. Ainsi $\forall y \in F,\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ et donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

❏

**Exemples.** On sait que $\forall x \geqslant 0,\ \sqrt{x^2} = x$ (on en profite pour rappeler que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$) et $\forall x \geqslant 0,\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ . De même, $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = x$ et $\forall x > 0,\ e^{\ln x} = x$.

**Exercice 20.** Montrer que la fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & ]-1,1[ \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$ est une bijection et préciser sa réciproque $f^{-1}$.

**Solution 20.** Tout d'abord, pour tout réel $x$, $1+|x| \geqslant 1 > 0$, et en particulier, $1+|x| \neq 0$. Ainsi, pour tout réel $x$, $f(x)$ existe. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = \dfrac{|x|}{1+|x|} < \dfrac{1+|x|}{1+|x|} = 1$ et donc, pour tout réel $x$, $-1 < f(x) < 1$. Par suite, f est bien une application de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

Soit $y \in ]-1,1[$. Pour $x$ réel, si $f(x) = y$, alors, puisque $\dfrac{1}{1+|x|} > 0$, il est **nécessaire** que $x$ et $y$ aient même signe. Nous avons donc deux cas.

**1er cas.** Soit $y \in [0,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ et } \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ et } x = y(1+x) \text{ (car } 1+x \neq 0 \text{ pour } x \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ et } x(1-y) = y \Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ et } x = \frac{y}{1-y} \text{ (car } 1-y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \text{ (car } \frac{y}{1-y} \geqslant 0). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $y$ de $[0,1[$, il existe un et un seul réel $x$ tel que $f(x) = y$, à savoir $x = \dfrac{y}{1-y}$.

**2ème cas.** Soit $y \in ]-1,0[$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x < 0 \text{ et } \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x = y(1-x) \text{ (car } 1-x \neq 0 \text{ pour } x < 0) \\ &\Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x(1+y) = y \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x = \frac{y}{1+y} \text{ (car } 1+y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} \text{ (car } \frac{y}{1+y} < 0). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $y$ de $]-1,0[$, il existe un et un seul réel $x$ tel que $f(x) = y$, à savoir $x = \dfrac{y}{1+y}$.

En résumé, pour tout réel $y$ élément de $]-1,1[$, il existe un et un seul réel $x$ tel que $f(x) = y$, à savoir $x = \dfrac{y}{1-|y|}$. Par suite, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et sa réciproque est l'application $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & ]-1,1[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1-|x|} \end{array}$.

---

⇨ **Commentaire** .

◇ *Il ne fallait surtout pas oublier de vérifier que* $f$ *était une application, ce qui revenait à montrer que tout élément* $x$ *avait effectivement une image dans* $]-1,1[$ *(dans ce genre de situation, l'unicité de l'image est toujours triviale et on la passe sous silence). Il fallait donc vérifier que pour tout réel* $x$*,* $\dfrac{x}{1+|x|}$ *existe et* $\dfrac{x}{1+|x|}\in]-1,1[$.

◇ *L'énoncé aurait pu prendre un aspect différent. « Soit* $f: \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|}\end{array}$*. Montrer que* $f$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle de* $\mathbb{R}$ *à préciser. » La solution aurait aussi pris une tournure différente. On se serait donné un réel* $y$ *quelconque et on aurait discuté la résolution de l'équation* $f(x)=y$ *suivant les valeurs de* $y$ *avec les deux cas : si* $y\notin]-1,1[$*, l'équation n'a pas de solution et si* $y\in]-1,1[$*, l'équation admet une et une seule solution à savoir* $x=\dfrac{y}{1-|y|}$.

◇ *Dire que les deux réels* $x$ *et* $y$ *sont de même signe signifie que* $x$ *et* $y$ *sont simultanément strictement négatifs, simultanément nuls et simultanément strictement positifs.*

◇ *On aurait pu alléger les calculs et ne résoudre l'équation* $f(x)=y$ *que dans le cas où* $y\in[0,1[$*. En effet, la fonction* $f$ *est* ***impaire*** *ou encore* $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=-f(x)$*. Donc, si on se donne* $x\in]-\infty,0[$ *et* $y\in]-1,0[$*, alors*

$$f(x)=y\Leftrightarrow -f(x)=-y\Leftrightarrow f(-x)=-y\Leftrightarrow -x=\frac{(-y)}{1-(-y)}\Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}.$$

**Théorème 20 (caractérisation d'une bijection et de sa réciproque).**

Soit $f$ une application d'un ensemble non vide $E$ dans un ensemble non vide $F$.

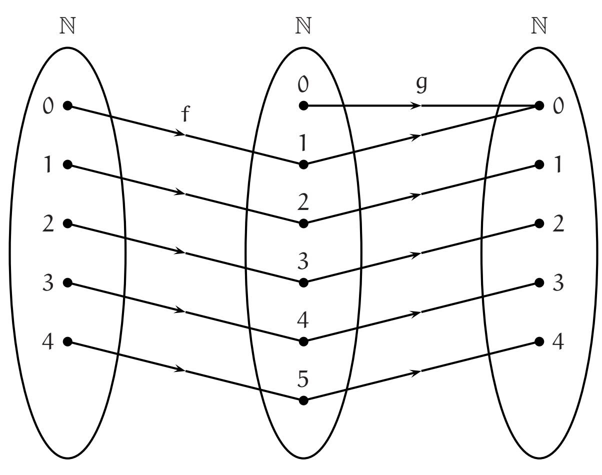
$f$ est bijective si et seulement si il existe une application $g$ de $F$ dans $E$ telle que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ g=\mathrm{Id}_F$. Dans ce cas, $g=f^{-1}$.

**Démonstration .** Puisque $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ $(*)$ et que $\mathrm{Id}_E$ est injective, le théorème 14, page 30, montre que $f$ est injective. Puisque $f\circ g=\mathrm{Id}_F$ et que $\mathrm{Id}_F$ est surjective, le théorème 17, page 30, montre que $f$ est surjective. Finalement, $f$ est bijective. Notons $f^{-1}$ sa réciproque. En composant par $f^{-1}$ à droite les deux membres de $(*)$, on obtient

$$g\circ f=\mathrm{Id}_E\Rightarrow g\circ f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_E\circ f^{-1}\Rightarrow g\circ\mathrm{Id}_E=f^{-1}\Rightarrow g=f^{-1}.$$

Réciproquement, si $f$ est bijective, l'application $g=f^{-1}$ est une application de $F$ vers $E$ telle que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ g=\mathrm{Id}_F$. ❑

⇨ **Commentaire .** *Une seule des deux égalités* $g\circ f=\mathrm{Id}_E$ *et* $f\circ g=\mathrm{Id}_F$ *ne suffit pas à ce que* $f$ *soit bijective. Considérons par exemple l'application* $f: \begin{array}{rcl}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ n & \mapsto & n+1\end{array}$ *et* $g: \begin{array}{rcl}\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}\\ n & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } n=0\\ n-1 \text{ si } n\geqslant 1\end{array}\right.\end{array}$.




*L'application* $f$ *n'est pas bijective car l'élément* $0$ *de* $\mathbb{N}$ *n'a pas d'antécédent par* $f$*. Pourtant, pour tout entier naturel* $n$*,*

$$\begin{aligned}g(f(n))&=g(n+1)\\&=(n+1)-1\ (\textit{car}\ n+1\geqslant 1)\\&=n\end{aligned}$$

*et donc* $g\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$*. On note que* $f\circ g(0)=f(g(0))=f(0)=1\neq 0$ *et donc* $f\circ g\neq\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

**Exercice 21.** Montrer que la fonction $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$ est une bijection et préciser sa réciproque $f^{-1}$.

**Solution 21.** Pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)$ existe et est un réel non nul. Soit alors $\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ & x & \mapsto & -1+\dfrac{1}{x} \end{array}$.

Puisque pour tout réel $x$ non nul, $g(x)$ existe et est différent de $-1$, $g$ est bien une application. De plus, pour tout réel $x$ distinct de $-1$,

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = -1+\frac{1}{f(x)} = -1+\frac{1}{1/(1+x)} = -1+1+x = x,$$

et pour tout réel $x$ distinct de $0$,

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1+g(x)} = \frac{1}{1-1+\dfrac{1}{x}} = x.$$

Ainsi, $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$ et $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. On a montré que $f$ est bijective et que $f^{-1} = g$.

---

⇨ **Commentaire** . *Utiliser le théorème 20 dans la pratique consiste souvent à deviner d'une façon ou d'une autre la future réciproque de $f$ puis à vérifier. Ici, $f$ ajoute $1$ à un réel $x$ puis prend l'inverse du résultat. Il n'est pas très difficile de deviner que la réciproque de $f$ sera l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}-1$ qui reprend l'inverse d'un nombre puis réenlève $1$ au résultat. Au pire, au brouillon, on peut résoudre $\dfrac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y}-1\ldots$*

**Théorème 21.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $f$ une application de $E$ dans $F$. Si $f$ est bijective, alors $f^{-1}$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

**Démonstration .** On applique le théorème 20 à l'application $f^{-1}$. ❏

**Théorème 22.** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$. Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g\circ f$ est bijective et $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

**Démonstration .** $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1} = g\circ \mathrm{Id}_F\circ g^{-1} = g\circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$ et $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = f^{-1}\circ \mathrm{Id}_F\circ f = f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_E$. D'après le théorème 20, $g\circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1}\circ g^{-1}$. ❏

Définition 29. Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle **involution** de $E$ toute application $f$ de $E$ dans $E$ vérifiant $f\circ f = \mathrm{Id}_E$.

**Théorème 23.** Toute involution $f$ de $E$ est une bijection de $E$ sur lui-même et $f^{-1} = f$.

**Démonstration .** On applique le théorème 20 dans le cas particulier où $g = f$. ❏

**Exercice 22.** Pour $x$ réel, on pose $f(x) = 2-x$. Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et préciser sa réciproque.

**Solution 22.** $f$ est involutive (car, $\forall x\in\mathbb{R},\ 2-(2-x) = x$) et donc bijective et de réciproque $f$.

---

**Exercice 23.** Soit $E$ un ensemble. Montrer que l'application $\begin{array}{cccc} f : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ & A & \mapsto & C_E A \end{array}$ est une bijection et préciser sa réciproque $f^{-1}$.

**Solution 23.** Pour toute partie $A$ de $E$, $C_E(C_E A) = A$. Par suite, $f$ est involutive et donc bijective, de réciproque $f$.

---

### 3.5 Familles d'éléments, familles de parties

On généralise maintenant la notion de suites avec la notion de « famille d'éléments ».

Définition 30. Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides. Une **famille d'éléments de $E$ indexée par** $I$ est une application de $I$ vers $E$.

Une famille d'éléments de $E$ dont les indices sont dans $I$ est donc une application $\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ i & \mapsto & x(i) \end{array}$. Cette notation étant trop lourde à manipuler, on préfère la noter $(x_i)_{i\in I}$.
Si $I = [\![1, n]\!]$, les familles d'éléments de $E$ indexées par $I$ sont les $n$-uplets d'éléments de $E$.
Si $I = \mathbb{N}$, les familles d'éléments de $E$ indexées par $I$ sont les suites d'éléments de $E$.

Définition 31. Soient $E$ un ensemble et $I$ un ensemble non vide. Une **famille de parties de $E$ indexée par** $I$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ indexée par $I$.

Une famille de parties de $E$ notée $(A_i)_{i\in I}$. On peut alors définir l'intersection et la réunion des parties de cette famille :

Définition 32. Soient $E$ un ensemble et $I$ un ensemble non vide. Soit $(A_i)_{i\in \mathbb{I}}$ une famille de parties de $E$ indexée par $I$.

La **réunion** des $A_i$, notée $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent à au moins l'une des parties $A_i$, $i \in I$.
L'**intersection** des $A_i$, notée $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent à toutes les parties $A_i$, $i \in I$.

Avec des quantificateurs, cela donne

$$\forall x \in E,\ \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I/\ x \in A_i\right).$$
$$\forall x \in E,\ \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I/\ x \in A_i\right).$$

- Ainsi, dans $\mathbb{R}$, on a par exemple $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2n\pi, 2(n+1)\pi[ = \mathbb{R}$ ou $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[1, 1+\frac{1}{n}\right[ = [0, 1]$.
- Si $E$ est un ensemble non vide quelconque, on peut écrire $E = \displaystyle\bigcup_{x\in E} \{x\}$. Ici, l'ensemble des indices est $E$ lui-même.

On peut maintenant donner une définition méticuleuse d'une partition d'un ensemble $E$ :

Définition 32. Soit $E$ un ensemble non vide. Une **partition** de $E$ est une famille $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ de parties de $E$ vérifiant :

❶ $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$ ;

❷ $\forall (i, j) \in I^2,\ (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$ ;

❸ $E = \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$.

# 4 L'ensemble $\mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence

### 4.1 L'axiome de récurrence

**Théorème 24 (axiome de récurrence).** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{N}$. On suppose que $A$ vérifie les deux propriétés :

❶ $0 \in A$,

❷ $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \in A \Rightarrow n + 1 \in A)$.

Alors, $A = \mathbb{N}$.

Nous avons appelé théorème l'énoncé précédent. Nous le considérerons en fait comme un axiome, appelé **axiome de récurrence** ou aussi **axiome d'induction**. C'est d'ailleurs ce qu'à fait Peano à la fin du dix-neuvième siècle en énonçant cinq axiomes qui définissaient l'ensemble $\mathbb{N}$, l'axiome d'induction étant le dernier de ces axiomes. L'axiome de récurrence dit qu'une partie de $\mathbb{N}$ qui contient $0$ et qui, pour chacun de ses éléments contient aussi l'élément qui le suit, est l'ensemble $\mathbb{N}$ tout entier.

Sur cet axiome repose le principe du raisonnement par récurrence. On veut prouver qu'une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel $n$, est vraie pour tous les entiers $n$. On remet en forme l'axiome de récurrence ci-dessus en l'appliquant à la partie $A$ constituée des entiers naturels pour lesquels la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

**Théorème 25 (récurrence simple).** Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dont les valeurs de vérité sont fonction d'un entier naturel $n$. **Si**

❶ $\mathcal{P}(0)$ est vraie,

❷ $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$,

**alors**, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

**Théorème 25 bis (récurrence simple (variante)).** Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dont les valeurs de vérité sont fonction d'un entier naturel $n$ supérieur ou égal à un entier $n_0$. **Si**

❶ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,

❷ $\forall n \geqslant n_0,\ (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$,

**alors**, $\forall n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Une démonstration par récurrence se fait en deux étapes. La première consiste à vérifier la propriété $\mathcal{P}(n)$ pour la première valeur de $n$ envisagée. Cette étape s'appelle l'**initialisation**. La seconde étape consiste à vérifier que la propriété se transmet de proche en proche. Cette étape s'appelle l'**hérédité** (on dit parfois que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire).
C'est l'étape la plus délicate. A partir d'une hypothèse au rang $n$ (appelée **hypothèse de récurrence**), on démontre la propriété au rang suivant. Cette hypothèse n'est absolument pas : « supposons que pour tout entier naturel $n$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie ». Cette dernière phrase est ce que l'on veut montrer. D'ailleurs cette phrase (« $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie ») n'est pas une fonction de $n$ (contrairement à la phrase « $\mathcal{P}(n)$ est vraie »).
La proposition que l'on cherche à démontrer pour tout entier naturel $n$ est l'**implication** $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Rappelons que pour démontrer cette implication, on ne se demande pas si la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie ou encore on ne suppose pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On se demande seulement si les donc ... donc ... donc ... sont vrais.
On se donne donc un entier $n \geqslant n_0$ (soit $n \geqslant n_0$) et on montre tranquillement une implication.

**Exercice 24.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Solution 24.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Donc, la formule proposée est vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

On a montré que $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)$. On a donc montré par récurrence que

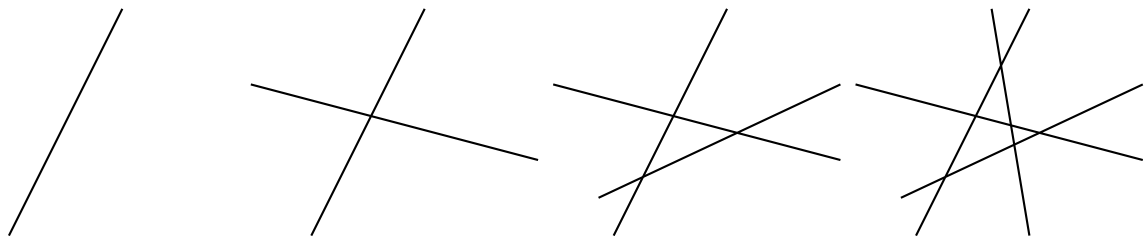
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

⇨ **Commentaire**. *Encore une fois, au moment où l'on démontre l'hérédité, la bonne rédaction est « Soit* $n \geqslant 0$. *Supposons que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *» et n'est pas du tout « Supposons que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *».*

Dans l'exercice précédent, la formule à démontrer était donnée et on nous demandait simplement de la vérifier. Le raisonnement par récurrence peut néanmoins s'avérer être un outil de recherche pour découvrir un résultat. C'est le but de l'exercice suivant.

**Exercice 25.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Dans le plan, on trace $n$ droites telles que deux d'entre elles ne soient pas parallèles et trois d'entre elles ne soient pas concourantes. Déterminer le nombre $R_n$ de régions du plan ainsi délimitées par ces $n$ droites.

**Solution 25.**



$R_1 = 2$ $\qquad$ $R_2 = 4$ $\qquad$ $R_3 = 7$ $\qquad$ $R_4 = 11$

Soit $n$ un entier naturel non nul. Supposons avoir tracé $n$ droites vérifiant les conditions de l'énoncé et connaître le nombre $R_n$ de régions délimitées par ces $n$ droites. On trace une $(n+1)$-ème droite. D'après les conditions de l'énoncé, cette $(n+1)$-ème droite coupe les $n$ premières droites en $n$ points deux à deux distincts. Ces $n$ points déterminent sur cette $(n+1)$-ème droite $(n+1)$ intervalles (dont deux ne sont pas bornés). Chacun de ces intervalles coupe l'une des $R_n$ régions existantes en deux et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, la $(n+1)$-ème droite a rajouté $(n+1)$ nouvelles régions aux $R_n$ régions existantes. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n+1} = R_n + (n+1).$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

- Puisque $\dfrac{1(1+1)}{2} + 1 = 2 = R_1$, la formule est vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $R_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ et montrons que $R_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$. Mais,

$$R_{n+1} = R_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1}.$$

---

**Théorème 26 (récurrence double).** Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dont les valeurs de vérité sont fonction d'un entier naturel $n$ supérieur ou égal à $0$ (resp. à un entier $n_0$). **Si**

❶ $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ (resp. $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$) sont vraies,

❷ $\forall n \in \mathbb{N}$ (resp. $\forall n \geqslant n_0$), $((\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2))$,

**alors**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

**Exercice 26.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

**Solution 26.** Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

- $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = u_0$ et
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1 = u_1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Puisque $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et que $\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2))$. On a donc montré par récurrence (double) que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).}$$

---

On généralise aisément le schéma précédent aux récurrences triples, quadruples, multiples ... Par exemple, si on veut établir des résultats par récurrence concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$, on effectuera probablement des récurrences triples.

Il existe dans la pratique des classes préparatoires un petit nombre de cas où les schémas précédents sont insuffisants. Par exemple, en arithmétique, il est fréquent de rencontrer des situations où passer de $n$ à $n+1$ est compliqué voire impossible (car les entiers $n$ et $n+1$ sont étrangers l'un à l'autre en arithmétique). On dispose alors du schéma suivant appelé schéma de la récurrence forte :

**Théorème 27 (récurrence forte).** Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dont les valeurs de vérité sont fonction d'un entier naturel $n$ supérieur ou égal à $0$. **Si**

❶ $\mathcal{P}(0)$ est vraie ,

❷ $\forall n \in \mathbb{N},\ ((\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$,

**alors**, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

A titre d'exemple, montrons par récurrence que tout entier $n \geqslant 2$ admet au moins un diviseur qui est un nombre premier (ceux qui n'ont pas pris la spécialité maths en terminale peuvent plus ou moins comprendre ce qui suit).

- 2 est un nombre premier et 2 est un diviseur de 2. Donc la propriété est vraie quand $n = 2$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $k$ admet au moins un diviseur qui est un nombre premier.
  - Si l'entier $n+1$ est un nombre premier, il admet un diviseur qui est un nombre premier à savoir lui-même.
  - Sinon, l'entier $n+1$ admet au moins un diviseur $d$ qui est élément de $[\![2, n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, il existe un nombre premier $p$ qui est un diviseur de $d$. Puisque $p$ divise $d$ et que $d$ divise $n+1$, $p$ est un nombre premier qui est un diviseur de $n+1$.

Le résultat est démontré par récurrence.

## 4.2 Propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$

On donne enfin un théorème qui sera utilisé plus tard dans l'année. On peut démontrer ce théorème par récurrence, ce que nous ne ferons pas.

**Théorème 28**

❶ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

❷ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

⇨ **Commentaire** . *On a un théorème équivalent dans $\mathbb{Z}$ : toute partie non vide et minorée (resp. majorée) de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément (resp. un plus grand élément).*

Ce théorème nous permettra par exemple de définir proprement la partie entière d'un réel. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x\}$ est une partie non vide (car il n'existe pas de réel strictement plus petit que tous les entiers relatifs) et majorée (par $x$) de $\mathbb{Z}$. Donc $\{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x\}$ admet un plus grand élément appelé la **partie entière** du réel $x$.