



# Programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles

Filière : **scientifique**

Voie : **Mathématiques et physique (MP)**

Discipline : **Mathématiques**

**Seconde année**

# Classe préparatoire MP

## Programme de mathématiques

### Table des matières

<b>Objectifs de formation</b>	<b>2</b>
Description et prise en compte des compétences . . . . .	2
Unité de la formation scientifique . . . . .	3
Architecture et contenu du programme . . . . .	4
Organisation du texte . . . . .	5
Usage de la liberté pédagogique . . . . .	5
<b>Programme</b>	<b>6</b>
Structures algébriques usuelles . . . . .	6
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées . . . . .	7
Fonctions convexes . . . . .	10
Topologie des espaces vectoriels normés . . . . .	10
Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens . . . . .	13
Séries et familles sommables . . . . .	14
A - Séries numériques et vectorielles . . . . .	14
B - Familles sommables de nombres complexes . . . . .	15
Suites et séries de fonctions, séries entières . . . . .	16
A - Suites et séries de fonctions . . . . .	16
B - Séries entières . . . . .	18
Fonctions vectorielles, arcs paramétrés . . . . .	19
Intégration sur un intervalle quelconque . . . . .	20
Variables aléatoires discrètes . . . . .	23
Équations différentielles linéaires . . . . .	26
Calcul différentiel . . . . .	28

Le programme de mathématiques de MP, dans le prolongement de celui de MPSI, s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.

Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

## Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :

- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstrations des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique permet de développer :

- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

## Description et prise en compte des compétences

### S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

### Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

## **Représenter**

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

## **Raisonner, argumenter**

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

## **Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique**

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.

Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

## **Communiquer à l'écrit et à l'oral**

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

## **Unité de la formation scientifique**

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, le calcul différentiel et la théorie des équations différentielles linéaires apparaissent comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.

Percevoir la globalité et la complexité du monde réel exige le croisement des regards disciplinaires. Ainsi, les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...).

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

## Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle. Certaines notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée ou en MPSI sont reprises dans un cadre plus général.

Le programme d'algèbre comprend trois volets. Le premier formalise les différentes structures algébriques rencontrées dans le programme et introduit l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  comme exemple de structure quotient. Le deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en MPSI et aboutit à une théorie de la réduction qui allie le registre des éléments propres et celui des polynômes annulateurs. Le troisième, consacré à l'algèbre préhilbertienne, conduit, en dimension infinie, à l'étude des familles orthonormales totales et, en dimension finie, au théorème spectral et aux isométries vectorielles, mettant l'accent sur les relations entre les points de vue vectoriel, matriciel et géométrique.

Le programme d'analyse comporte un chapitre sur les fonctions convexes d'une variable réelle qui permet de faire le lien avec la géométrie. La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, et d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs.

Le chapitre sur les séries complète l'étude des séries numériques abordée en MPSI et la prolonge par celles des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie et des familles sommables. L'extension de la notion de série convergente à celle de famille sommable est réduite au minimum nécessaire à une présentation rigoureuse des espaces probabilisés dénombrables et des variables aléatoires discrètes.

Le chapitre sur les séries entières permet de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.

La définition des différents modes de convergence d'une suite de fonctions bénéficie du cadre topologique introduit dans le chapitre « Espaces vectoriels normés ». L'étude des suites et séries de fonctions conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme et aboutit à l'énoncé de deux théorèmes d'approximation.

La généralisation aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie des résultats d'analyse réelle étudiés en première année fournit, avec une étude modeste des arcs paramétrés, une nouvelle occasion de relier les registres analytique et géométrique.

L'étude de l'intégration, entamée en première année dans le cadre des fonctions continues sur un segment, se poursuit dans celui des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. L'intégrale généralisée est un intermédiaire à l'introduction de la notion de fonction intégrable. L'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries. Les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions et sur les intégrales à paramètre concluent ce chapitre.

Le chapitre relatif au calcul différentiel a pour cadre les espaces vectoriels normés de dimension finie. La différentielle en un point est définie de manière intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle. Parallèlement à cette vision algébrique et géométrique, ce chapitre fournit aussi des outils opérationnels pour la résolution de problèmes pouvant être issus d'autres disciplines scientifiques (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles). Il concourt au développement de la compétence « Représenter » en proposant des interprétations et visualisations géométriques.

L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'origine analytique. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

L'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov, qui sera repris dans le cursus ultérieur des étudiants. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes, en prolongement des variables finies étudiées en première année, ce qui permet d'élargir aux processus stochastiques à temps discret le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants. L'inégalité qui la sous-tend précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion.

Ce chapitre a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

## Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole  $\Leftrightarrow$  PC pour la physique et la chimie,  $\Leftrightarrow$  SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et  $\Leftrightarrow$  I pour l'informatique.

## Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est en effet d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Quel que soit le contexte (cours, travaux dirigés), la pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants ;
- didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

# Programme

## Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de  $\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{K}[X]$ , congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et de la géométrie des espaces euclidiens. Ce chapitre gagne à être illustré par de nombreux exemples.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.

Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Groupes et sous-groupes

Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ .	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
--	---

### b) Morphismes de groupes

Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
--	--

### c) Groupes monogènes et cycliques

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ . Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Groupe monogène, groupe cyclique. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ . Tout groupe monogène fini de cardinal $n$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .	Groupe des racines $n$ -ièmes de l'unité.
--	---

### d) Ordre d'un élément dans un groupe

Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.  Si $x$ est d'ordre fini $d$ et si $e$ désigne le neutre de $G$ , alors, pour $n$ dans $\mathbb{Z}$ , on a $x^n = e \iff d n$ . L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	Si $x$ est d'ordre fini, l'ordre de $x$ est le cardinal du sous-groupe de $G$ engendré par $x$ .  La démonstration n'est exigible que pour $G$ commutatif.
--	--

### e) Anneaux

Anneau. Produit fini d'anneaux. Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux. Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les anneaux sont unitaires.  Les corps sont commutatifs.
--	--

### f) Idéaux d'un anneau commutatif

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre. Idéaux de $\mathbb{Z}$ .	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
--	---

**g) L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** 

Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Théorème chinois : si  $m$  et  $n$  sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Indicatrice d'Euler  $\varphi$ . Calcul de  $\varphi(n)$  à l'aide de la décomposition de  $n$  en facteurs premiers.

Théorème d'Euler.

L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps si et seulement si  $n$  est premier.

Application aux systèmes de congruences.

$\Leftrightarrow$  I : calcul de  $\varphi(n)$  à l'aide d'une méthode de crible.

Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année.

$\Leftrightarrow$  I : codage RSA.

**h) Anneaux de polynômes à une indéterminée**

Dans ce paragraphe,  $K$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

Idéaux de  $K[X]$ .

PGCD de deux polynômes.

Relation de Bézout. Lemme de Gauss.

Irréductible de  $K[X]$ . Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.

Par convention, le PGCD est unitaire.

Extension au cas d'une famille finie.

$\Leftrightarrow$  I : algorithme d'Euclide étendu sur les polynômes, recherche simultanée du PGCD et des coefficients de Bézout.

Les étudiants doivent connaître les irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ .

L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.

**i) Algèbres**

Algèbre.

Sous-algèbre.

Morphisme d'algèbres.

Les algèbres sont unitaires.

Exemples :  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ .

**Réduction des endomorphismes et des matrices carrées**

*La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de MPSI et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.*

*Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.*

*On se limite en pratique au cas où le corps de base  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

**a) Généralités**

Matrices semblables, interprétation géométrique.

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.

Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace  $F$  par un endomorphisme  $u$  à l'aide de la matrice de  $u$  dans une base adaptée à  $F$ .

**b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée**

Droite stable par un endomorphisme.  
 Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.  
 Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

$\Leftrightarrow$  SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.  
 Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie  $n$  est fini, et de cardinal au plus  $n$ .  
 Si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .  
 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Équation aux éléments propres  $MX = \lambda X$ .  
 Deux matrices semblables ont même spectre.  
 Si  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{K}'$  et si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , le spectre de  $M$  dans  $\mathbb{K}$  est contenu dans le spectre de  $M$  dans  $\mathbb{K}'$ .

**c) Polynôme caractéristique**

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations  $\chi_u, \chi_A$ .

Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et  $n - 1$ .

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.  
 Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.  
 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

La dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda$  est majorée par la multiplicité de  $\lambda$ .

**d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à  $E$ .

Cas des projecteurs, des symétries.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est diagonalisable.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes.

Traduction matricielle.

Pour qu'un endomorphisme  $u$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que  $\chi_u$  soit scindé et que, pour toute valeur propre de  $u$ , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Traduction matricielle.

**e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Interprétation géométrique.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas  $n = 2$  et à des cas particuliers simples pour  $n = 3$ .

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Traduction matricielle.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

$\Leftrightarrow$  I : recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.

### f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de  $E$ .

### g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , morphisme d'algèbres  $P \mapsto P(u)$  de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de  $u$ . Son image est la sous-algèbre commutative  $\mathbb{K}[u]$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.

Si  $d$  est le degré du polynôme minimal de  $u$ , alors la famille  $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

Si  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

Théorème de Cayley-Hamilton.

Pour  $M$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , morphisme  $P \mapsto P(M)$  de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , idéal annulateur de  $M$ , sous-algèbre  $\mathbb{K}[M]$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Le polynôme minimal est unitaire.

Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda) x$ .

Démonstration non exigible.

### h) Lemme de décomposition des noyaux

Si  $P_1, \dots, P_r$  sont des éléments de  $\mathbb{K}[X]$  deux à deux premiers entre eux de produit égal à  $P$ , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

### i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant  $u$ , ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Traduction matricielle.

### j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant  $u$ , décomposition de  $E$  en somme directe de sous-espaces stables par  $u$  sur chacun desquels  $u$  induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Traduction matricielle.

La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

## Fonctions convexes

L'objectif de ce chapitre est double :

- introduire brièvement la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel ;
- étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.

Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.

La notion de barycentre est introduite exclusivement en vue de l'étude de la convexité.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Barycentre.

$\Leftrightarrow$  PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).

Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.

### b) Fonctions convexes d'une variable réelle

Une fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  si pour tout  $(x, y)$  de  $I^2$  et tout  $\lambda$  de  $[0, 1]$  :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour  $f$  convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

où  $x_1, \dots, x_n$  sont des points de  $I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels positifs de somme 1.

Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes.

Position relative du graphe et de ses cordes.

Fonction concave.

### c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur  $I$ , des fonctions convexes deux fois dérivables sur  $I$ .

Exemples d'inégalités de convexité.

Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

## Topologie des espaces vectoriels normés

Ce chapitre prolonge les notions de limites de suites et de fonctions étudiées en première année, et introduit la topologie des espaces vectoriels normés. Son objectif est triple :

- introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;
- introduire la notion de compacité dans un espace vectoriel normé ;
- donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.

Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.

Vecteurs unitaires.

Distance associée à une norme.

Inégalité triangulaire.

Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.

Parties, suites, fonctions bornées.

Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.

Normes  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_2$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ .

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.

Produit fini d'espaces vectoriels normés.

### b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

### c) Comparaison des normes

Normes équivalentes.

Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.

### d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie.

Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent.

Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Si  $A$  est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de  $A$ . Voisinage relatif.

Une boule ouverte est un ouvert.

Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

Caractérisation séquentielle des fermés de  $A$ .

### e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie  $A$ .

Caractérisation séquentielle.

Extensions : limite de  $f(x)$  lorsque  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$ , limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  lorsque  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , limite infinie en  $a$  adhérent à  $A$  pour une fonction réelle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues.

Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

Pour qu'une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  soit continue, il faut et il suffit qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Exemple : l'application  $x \mapsto d(x, A)$  où  $A$  est une partie de  $E$ .

Notation  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

La notion de norme subordonnée est hors programme.

### f) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Une partie compacte est fermée et bornée.

Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Produit d'une famille finie de compacts.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

### g) Applications continues sur une partie compacte

Image d'une partie compacte par une application continue.

Théorème de Heine.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

### h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Chemin continu joignant deux points.

Parties connexes par arcs.

Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

Image continue d'une partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie  $A$  de  $E$ .

Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.

Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

### i) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Si  $E$  est de dimension finie, toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Démonstration non exigible.

Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Exemple : déterminant.

## Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens

L'objectif de ce chapitre est triple :

- consolider les acquis de MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ;
- introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;
- à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de MPSI relatives aux isométries et celles de MP relatives à la réduction des endomorphismes.

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

La notion de forme quadratique est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.  $\Leftrightarrow$  PC : polariseur, loi de Malus.  
Caractérisation métrique du projeté orthogonal.  
Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.  
Inégalité de Bessel.

### b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

Suite totale. Exemples de suites de polynômes orthogonaux.  
Si  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien  $E$ , et si, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $p_n$  désigne le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ , alors, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .  $\Leftrightarrow$  I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.

### c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Lien avec les matrices symétriques réelles.  
La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.  
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques.  
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.  
Théorème spectral : si  $u$  est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ , alors  $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $u$  ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant  $u$ .  
Interprétation matricielle de ce résultat.  
La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme.  
 $\Leftrightarrow$  SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.

### d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométrie vectorielle d'un espace euclidien. Autre dénomination : automorphisme orthogonal.  
Lien avec les matrices orthogonales.  
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.  
Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Interprétation dans le registre matriciel.  
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ».  $\Leftrightarrow$  SI : liaisons entre solides.

## Séries et familles sommables

L'objectif de cette partie est triple :

- consolider les acquis de MPSI relatifs aux séries numériques ;
- étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie, en particulier aux espaces de matrices ;
- introduire brièvement, exclusivement en vue du cours de probabilités, la notion de famille sommable de nombres complexes.

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

### A - Séries numériques et vectorielles

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Sommes partielles. Convergence, divergence.

La série de terme général  $u_n$  est notée  $\sum u_n$ .

Somme et restes d'une série convergente.

En cas de convergence, notation  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Lien suite-série.

La suite  $(u_n)$  et la série  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  ont même nature.

Série absolument convergente.

Cas des séries matricielles.

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

#### b) Compléments sur les séries numériques

Règle de d'Alembert.

Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.

Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.

L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.

Comparaison série-intégrale :

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux et décroissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ , alors la série de terme général

$$\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \text{ converge.}$$

Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où  $f$  est monotone.

Interprétation géométrique.

Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

La suite de référence est positive à partir d'un certain rang.

Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

## B - Familles sommables de nombres complexes

La notion de famille sommable est introduite en vue de l'étude des probabilités.

### a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Les ensembles  $\mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables.

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

Les parties infinies de  $\mathbb{N}$  sont dénombrables.

Démonstrations non exigibles.

Démonstration non exigible.

### b) Familles sommables

Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est dite sommable si l'ensemble des sommes  $\sum_{i \in F} u_i$  où  $F$  décrit l'ensemble des parties finies de  $I$  est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille  $(u_i)_{i \in I}$  n'est pas sommable, sa somme est  $+\infty$ . Dans tous les cas, la somme est notée  $\sum_{i \in I} u_i$ .

Théorème de sommation par paquets :

si  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $I$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs, alors la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si :

– Pour tout entier  $n$  la famille  $(u_i)_{i \in I_n}$  est sommable.

– La série  $\sum \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$  converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Démonstration hors programme.

Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable

Somme d'une telle famille.

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$  l'est.

Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.

Lorsque  $I = \mathbb{N}$ , lien avec la convergence absolue de la série  $\sum u_n$ .

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets.

Démonstration non exigible.

Démonstration hors programme.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$ .

### c) Applications des familles sommables

La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout  $n$ , la série  $\sum a_{m,n}$  converge et la

série  $\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$  converge. Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

Si la famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  de nombres complexes est sommable, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille  $(|a_{m,n}|)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ .

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

## Suites et séries de fonctions, séries entières

### A - Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est triple :

- définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;
- étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;
- énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  de dimension finie.

### a) Convergence simple, convergence uniforme

Convergence simple sur  $A$ .

Convergence uniforme sur  $A$ . La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur  $A$  en termes de norme.

### b) Continuité, double limite

Si les  $u_n$  sont continues en  $a$  et si  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur un voisinage de  $a$ , alors  $u$  est continue en  $a$ .

Toute limite uniforme de fonctions continues sur  $A$  est continue sur  $A$ .

Théorème de la double limite : soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$  convergeant uniformément vers  $u$  sur  $A$ , et soit  $a$  un point adhérent à  $A$  ; si, pour tout  $n$ ,  $u_n$  admet une limite  $\ell_n$  en  $a$ , alors  $(\ell_n)$  admet une limite  $\ell$  et

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de  $A$ .

Démonstration non exigible.

Adaptation, si  $A \subset \mathbb{R}$ , aux cas où  $a = +\infty$  et  $a = -\infty$ .

**c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment**

Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $F$ ,  $a$  un point de  $I$ . On suppose que  $(u_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $u$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$  soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors  $(U_n)$  converge uniformément vers  $U$  sur tout segment de  $I$ .

En particulier, si  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur le segment  $S$ , alors :

$$\int_S u_n \rightarrow \int_S u.$$

**d) Dérivation d'une suite de fonctions**

Soit  $(u_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $F$ . Si  $(u_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $u$ , et si  $(u'_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $v$ , alors  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur tout segment de  $I$ ,  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $u' = v$ .

Extension aux suites de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , sous l'hypothèse de convergence simple de  $(u_n^{(j)})$  pour  $0 \leq j \leq k-1$  et de convergence uniforme de  $(u_n^{(k)})$  sur tout segment de  $I$ .

**e) Séries de fonctions**

Convergence simple, convergence uniforme.

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes b), c) et d) ci-dessus.

Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.

Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.

Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

**e) Approximation uniforme**

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Démonstration non exigible.

## B - Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;
- introduire la notion de développement d'une fonction en série entière ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités

Série entière.

Lemme d'Abel : si la suite  $(a_n z_0^n)$  est bornée alors, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière.

La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à  $R$  ; la série  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement pour tout  $z$  tel que  $|z| > R$ . Si  $a_n = O(b_n)$ ,  $R_a \geq R_b$ . Si  $a_n \sim b_n$ ,  $R_a = R_b$ .

Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

Utilisation de la règle de d'Alembert.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

#### b) Série entière d'une variable réelle

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

La somme d'une série entière est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

Si les fonctions  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout  $n$ ,  $a_n = b_n$ .

#### c) Fonctions développables en série entière, développements usuels

Développement de  $\exp(z)$  sur  $\mathbb{C}$ .

Développement de  $\frac{1}{1-z}$  sur  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ .

Fonction développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  de  $\mathbb{R}$ . Série de Taylor d'une fonction de classe  $C^\infty$  sur un intervalle  $] -r, r[$ .

Développements de fonctions de variable réelle.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

## Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

Ce chapitre poursuit trois objectifs :

- étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;
- préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans un espace normé de dimension finie  $E$ .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Dérivabilité en un point

Dérivabilité en un point.

Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1.

Interprétation cinématique.

$\Leftrightarrow$  PC : vitesse instantanée.

Traduction par les coordonnées dans une base de  $E$ .

Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.

### b) Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivabilité et dérivée de  $L \circ f$ , où  $L$  est linéaire.

Dérivabilité et dérivée de  $B(f, g)$ , où  $B$  est bilinéaire.

Cas du produit scalaire.

$\Leftrightarrow$  PC : dérivée de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.

Dérivabilité et dérivée de  $f \circ \varphi$  où  $\varphi$  est une fonction réelle de variable réelle et  $f$  une fonction vectorielle.

Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Opérations sur les applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .

$\Leftrightarrow$  PC et SI : vecteur accélération.

### c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction  $f$  continue par morceaux sur un segment de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $E$ .

Définie par les intégrales des coordonnées dans une base.

Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .

$\Leftrightarrow$  PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.

Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

Inégalité  $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$ .

Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.

### e) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  pour  $f$  continue.

Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### f) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

**g) Arcs paramétrés**

Arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$  à valeurs dans  $E$ . Paramètre régulier.  
Exemples simples d'arcs paramétrés plans.

Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier.  
Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.  
L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme.  
La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme.  $\Leftrightarrow$  I : réalisation de tracés à l'aide de l'outil informatique.

**Intégration sur un intervalle quelconque**

Les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , corps des réels ou des complexes.

L'objectif de ce chapitre est double :

- définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;
- compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.

La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales).

Le programme ne contient aucune forme du théorème de Fubini, qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème nécessitant son utilisation.

**a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$** 

Pour  $f$  continue par morceaux de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{K}$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  est dite convergente si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$  a une limite finie en  $+\infty$ . Si tel est le cas, on note  $\int_a^{+\infty} f$  cette limite.

Linéarité de l'intégrale sur  $[a, +\infty[$ , positivité. Dérivation de  $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$  si  $f$  est continue.

Notations  $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$ .

**b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$** 

Une fonction  $f$  est dite intégrable sur  $[a, +\infty[$  si  $\int_a^{+\infty} |f|$  converge.

Si  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $\int_a^{+\infty} f$  converge.

On utilise indifféremment les expressions «  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$  », et « l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge absolument ».

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

**c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$** 

Si  $f$  est positive sur  $[a, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f$  est majorée.

Pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ , étude de l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  sur  $[1, +\infty[$ .

Pour  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  :

- si  $0 \leq f \leq g$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$  ;
- si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$  ;
- si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  équivaut à celle de  $f$ .

#### d) Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$ .

Pour  $a$  dans  $\mathbb{R}$ , étude de l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$  sur  $]a, b]$ , de l'intégrabilité de  $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$  sur  $]b, a[$ .

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ .

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , linéarité et positivité de l'application  $f \mapsto \int_I f$  sur l'espace des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  dont l'intégrale converge.

Relation de Chasles.

Espace des fonctions intégrables de  $I$  dans  $E$ .

Inégalité triangulaire.

Si  $f$  est continue et intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et si  $\int_I f = 0$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

Changement de variable : étant données une fonction  $f$  continue sur  $]a, b[$  et une fonction  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  bijective, strictement croissante et de classe  $\mathcal{C}^1$ , les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$  sont de même nature et égales en cas de convergence.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

$$\text{Notations } \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt.$$

On utilise indifféremment les expressions «  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  », et « l'intégrale  $\int_a^b f$  converge absolument ».

$$\text{Notations } \int_a^b f, \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{Notation } \int_I f.$$

Adaptation au cas où  $\varphi$  est strictement décroissante.

Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

L'existence des limites du produit  $fg$  aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de  $fg'$  et  $f'g$  sont de même nature. Notation  $[fg]_a^b$ .

#### e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est positive.

**f) Passage à la limite sous l'intégrale**

Théorème de convergence dominée : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues par morceaux de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  convergeant simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction  $\varphi$  positive intégrable sur  $I$  vérifiant  $|f_n| \leq \varphi$  pour tout  $n$ . Alors :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Extension au cas d'une famille à paramètre réel  $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Théorème d'intégration terme à terme :

Si  $(f_n)$  est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et telle que la série  $\sum \int_I |f_n(t)| dt$  converge, alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de  $f$ , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de  $\sum \int_I |f_n|$ .

**g) Continuité d'une intégrale à paramètre**

Soit  $A$  une partie d'un espace normé de dimension finie,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $A \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $f$  est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction  $\varphi$  positive intégrable sur  $I$  telle que, pour tout  $x$  de  $A$ ,  $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$ . Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est définie et continue sur  $A$ .

L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point  $a$  de  $A$ . Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de  $A$ .

$\Leftrightarrow$  SI : transformée de Laplace.

**h) Dérivation d'une intégrale à paramètre**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $f$  est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout  $x$  de  $J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ , que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est définie sur  $J \times I$ , continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction  $\varphi$  positive intégrable sur  $I$  telle que, pour tout  $x$  de  $J$ ,  $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)| \leq \varphi$ . Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et vérifie :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de  $J$ .

Classe  $\mathcal{C}^k$  d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de  $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$  pour tout  $x$  de  $J$  si  $0 \leq j \leq k-1$  et domination sur tout segment de  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ .

$\Leftrightarrow$  PC : transformée de Fourier.

$\Leftrightarrow$  SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

## Variabes aléatoires discrètes

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;
- la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;
- les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.

La notion de variable à densité est hors programme.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble  $\Omega$ .

On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Événements.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Si  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\Omega$ , une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une application  $P$  définie sur  $\mathcal{A}$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , telle que  $P(\Omega) = 1$  et, pour toute suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  d'événements deux à deux disjoints, on ait :

Espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Si  $\Omega$  est fini ou dénombrable et si  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ , une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  s'identifie, via la formule

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

à une famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de réels positifs sommable de somme 1.

#### b) Propriétés élémentaires des probabilités

Continuité croissante : si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Continuité décroissante : si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Événements négligeables, événements presque sûrs.  
Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Propriétés presque sûres.  
Tout développement sur ces notions est hors programme.

### c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes.  
Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

Notations  $P_B(A)$ ,  $P(A|B)$ .

### d) Variables aléatoires discrètes

Étant donné un ensemble  $E$  et un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$  est une application  $X$  de  $\Omega$  dans  $E$  telle que  $X(\Omega)$  soit fini ou dénombrable et que, pour tout  $x$  de  $X(\Omega)$ ,  $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ .  
Loi  $P_X$  de la variable aléatoire  $X$ .

Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , la variable aléatoire est dite réelle.

Notations  $X \sim Y$ ,  $X \sim \mathcal{L}$ .

Notations  $(X \geq x)$ ,  $(X \leq x)$ ,  $(X < x)$ ,  $(X > x)$  pour une variable aléatoire réelle  $X$ .

### e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = x$ .

Extension au conditionnement par  $X > x$  ou autres inégalités.

Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.

Couple de variables aléatoires indépendantes.

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Extension des résultats vus en première année.

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout  $m$  compris entre 1 et  $n-1$ , et toutes fonctions  $f$  et  $g$ , les variables  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

Démonstration non exigible.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

La démonstration est hors programme.  
Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

### f) Lois usuelles

Pour  $p$  dans  $]0, 1[$ , loi géométrique de paramètre  $p$ .

La variable aléatoire  $X$  suit la loi  $\mathcal{G}(p)$  si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Notation  $\mathcal{G}(p)$ .

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre  $p$ .

Caractérisation comme loi sans mémoire :

$$P(X > n + k | X > n) = P(X > k).$$

Pour  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Notation  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout  $n$ ,  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$  et si  $(np_n)$  converge vers  $\lambda$ , alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

$\Leftrightarrow$  I : simulation de cette approximation.  
Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

### g) Espérance

Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , l'espérance de  $X$  est la somme, dans  $[0, +\infty]$ , de la famille  $(P(X = x) \cdot x)_{x \in X(\Omega)}$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire  $X$  est dite d'espérance finie si la famille  $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de  $X$ .

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson. Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur  $\Omega$ .

Formule de transfert : soit  $X$  une variable aléatoire discrète,  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ; alors  $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(P(X = x) f(x))$  est sommable ; si tel est le cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Inégalité de Markov.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors :

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

Notation  $E(X)$ .

$\Leftrightarrow$  PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.

Notation  $E(X)$ .

Variations centrées.

Si  $|X| \leq Y$  et si  $Y$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie.

Démonstration non exigible.

### h) Variance, écart type et covariance

Moments.

Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si  $X$  et  $Y$  admettent chacune un moment d'ordre 2, alors  $XY$  est d'espérance finie et  $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$ .

Espace des variables aléatoires définies sur  $\Omega$  admettant un moment d'ordre 2.

Variance, écart type.

$$\text{Relation } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$\text{Relation } V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ . Cas de variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Notations  $V(X), \sigma(X)$ .

Variations réduites.

$\Leftrightarrow$  PC : écart quadratique énergétique.

Si  $\sigma(X) > 0$ , la variable aléatoire  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

**i) Loi faible des grands nombres**

Si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $m = E(X_1)$ , on a,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, pour  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où  $\sigma$  est la variance commune des  $X_k$ .  
 $\Leftrightarrow$  I : simulation d'une suite de tirages.

**j) Fonctions génératrices**

Fonction génératrice de la variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$$

Détermination de la loi de  $X$  par  $G_X$ . Utilisation de  $G_X$  pour calculer les moments de  $X$ .

La variable aléatoire  $X$  est d'espérance finie si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 ; dans ce cas  $E(X) = G_X'(1)$ . La variable aléatoire  $X$  admet un second moment si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable en 1.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La série entière définissant  $G_X$  est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de  $G_X$ .

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de  $X$  à l'aide de  $G_X'(1)$  et  $G_X''(1)$ .  
 Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

**Équations différentielles linéaires**

*La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.*

*La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.*

*Dans ce chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace normé de dimension finie.*

**a) Généralités**

Équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t)x + b(t)$$

où  $a$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $b$  une application continue de  $I$  dans  $E$ .

Problème de Cauchy.

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre  $n$  par un système différentiel linéaire.

Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre  $n$ .

Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires  $X' = A'(t)X + B(t)$ .

Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

Principe de superposition.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

**b) Solutions d'une équation différentielle linéaire**

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Démonstration non exigible.

$\Leftrightarrow$  I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.

Cas des équations scalaires d'ordre  $n$ .

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$ . Pour  $t_0$  dans  $I$ , l'application  $x \mapsto x(t_0)$  est un isomorphisme de cet espace sur  $E$ .

Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre  $n$ .

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.

Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x).$$

Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

**c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice**

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.

Notations  $\exp(a)$ ,  $e^a$ ,  $\exp(A)$ ,  $e^A$ .

$\Leftrightarrow$  I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Continuité de l'exponentielle.

Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.

Démonstration non exigible.

Dérivation, si  $a$  est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application  $t \mapsto \exp(ta)$ .

Dérivation de  $t \mapsto \exp(tA)$  si  $A$  est une matrice carrée réelle ou complexe.

**d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants**

Résolution du problème de Cauchy

$$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$

Traduction matricielle.

Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants :  $A$  diagonalisable ou  $n \leq 3$ .

si  $a$  est un endomorphisme de  $E$  et  $x_0$  un élément de  $E$ .

**e) Méthode de variation des constantes**

Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.

Dans les exercices pratiques, on se limite au cas  $n = 2$ .

Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.

Dans les exercices pratiques, on se limite au cas  $n = 2$ .

**f) Équations différentielles scalaires du second ordre**

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.

Définition et calcul. Cas d'une équation  $x'' + q(t)x = 0$ .

## Calcul différentiel

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ . Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application  $f$  au point  $a$  selon le vecteur  $v$ .

Notations  $D_v f(a)$ ,  $D_v f$ .

Dérivées partielles dans une base.

Notations  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ,  $\partial_i f(a)$ .

Lorsqu'une base de  $E$  est fixée, l'identification entre  $f(x)$  et  $f(x_1, \dots, x_n)$  est autorisée.

#### b) Différentielle

Application différentiable au point  $a$ .

Notation  $o(h)$ . Développement limité à l'ordre 1.

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$  et dérivable en  $a$  selon tout vecteur.

Différentielle de  $f$  en  $a$ , encore appelée application linéaire tangente à  $f$  en  $a$ .

Notations  $df(a)$ ,  $df(a) \cdot v$ .

Relation  $df(a) \cdot v = D_v f(a)$ .

Application différentiable sur un ouvert  $\Omega$ . Différentielle sur  $\Omega$ .

Notation  $df$ .

Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire.

Lien entre différentielle et dérivées partielles.

Matrice de  $df(a)$  dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ .

Cas des fonctions d'une variable : si  $\Omega$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , la différentiabilité de  $f$  en  $a$  équivaut à la dérivabilité de  $f$  en  $a$ ; relation  $f'(a) = df(a) \cdot 1$ .

#### c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de  $B(f, g)$  où  $B$  est bilinéaire et  $f$  et  $g$  sont deux applications différentiables.

On utilise l'existence d'un réel positif  $C$  tel que, pour tout  $(u, v)$ , on ait  $\|B(u, v)\| \leq C \|u\| \|v\|$ . Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.

Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si  $\gamma$  est une application définie sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , dérivable en  $t$ , si  $f$  est différentiable en  $\gamma(t)$ , alors  $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Cas particulier fondamental :  $\gamma(t) = x + th$ .

Dérivation de  $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ .

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de  $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$ .

**d) Cas des applications numériques**

Si l'espace  $E$  est euclidien, gradient en  $a$  d'une application numérique différentiable en  $a$ . Expression du gradient en base orthonormée.

Point critique d'une application différentiable.  
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.  
Exemples de recherche d'extremums globaux.

Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade.

Notation  $\nabla f(a)$ .

Interprétation géométrique du gradient : si  $\nabla f(a) \neq 0$ , il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale.

**e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie**

Si  $X$  est une partie de  $E$  et  $x$  un point de  $X$ , un vecteur  $v$  de  $E$  est tangent à  $X$  en  $x$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  et un arc  $\gamma$  défini sur  $] -\varepsilon, \varepsilon[$  dérivable en 0 à valeurs dans  $X$ , tels que  $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$ .

Cas où  $E = \mathbb{R}^3$  et où  $X$  est le graphe d'une fonction  $f$  différentiable sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $f$  est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien  $E$ , si  $X$  est une ligne de niveau de  $f$ , alors les vecteurs tangents à  $X$  au point  $x$  de  $X$  sont orthogonaux au gradient de  $f$  en  $x$ .

Plan affine tangent à une surface d'équation  $z = f(x, y)$  : équation cartésienne.

Le théorème des fonctions implicites est hors programme.

$\Leftrightarrow$  PC : électrostatique.

**f) Applications de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Une application  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $\Omega$  si elle est différentiable sur  $\Omega$  et si  $df$  est continue sur  $\Omega$ . L'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de  $E$  existent en tout point de  $\Omega$  et sont continues sur  $\Omega$ .

Opérations algébriques sur les applications de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Si  $f$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Omega$  dans  $F$ , si  $\gamma$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\Omega$ , si  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ , alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Si  $\Omega$  est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur  $\Omega$ .

Démonstration non exigible.

$\Leftrightarrow$  PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Démonstration pour  $\Omega$  convexe.

**g) Applications de classe  $\mathcal{C}^k$** 

Dérivées partielles d'ordre  $k$ .

Une application est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un ouvert  $\Omega$  si ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $\Omega$ .

Théorème de Schwarz.

Opérations algébriques sur les applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .  
Composition d'applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Notations  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}, \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f$ .

La notion de différentielle seconde est hors programme.  
 $\Leftrightarrow$  PC : laplacien.

Démonstration non exigible.

Démonstrations non exigibles.

## CONTENUS

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

## CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication.

La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu.

$\Leftrightarrow$  PC : équation de la diffusion thermique, équation de propagation.

---