**CLASSE PSI**

# OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

## I OBJECTIFS DE FORMATION

### 1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Physique et Sciences de l'Ingénieur, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. En revanche, certains résultats puissants, mais dont la démonstration est hors de portée au niveau des classes préparatoires, sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels.
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux–mêmes des questions, c'est–à–dire à prendre en compte une problématique mathématique ; l'effort de synthèse doit constituer l'aboutissement de cette démarche.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

## 2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de trois intentions majeures.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Donner un rôle très important à la résolution de problèmes et d'exercices d'application, en particulier en mettant en œuvre l'outil informatique. Le but est d'indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme et de préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, ces études de problèmes et d'exercices ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie, mais le plan du programme n'est pas un plan de cours.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans la classe PSI, il est de 10 heures (7 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes (comprenant les exemples et contre-exemples qui illustrent leur portée et leurs conditions de validité), il convient de consacrer à leur étude environ au plus 6 heures de cours. Le temps restant est à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques de difficulté variée ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement des phénomènes continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, notamment en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle des problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global des suites et des fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.
Le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé et d'application linéaire continue, afin de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes linéaires), l'étude des fonctions de plusieurs variables (en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des anneaux et des corps ainsi que l'étude générale des groupes en ont été écartées. Il met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.
Le programme approfondit celui de première année (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, dimension, rang, calcul matriciel, espaces vectoriels euclidiens, automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace) et développe de nouveaux concepts (polynômes d'endomorphismes, valeurs propres et sous-espaces propores, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques. . .) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

e) *Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles, le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et de la géométrie en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...). Ces interprétations, avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse et de l'algèbre linéaire.

### 3) Conception et organisation de la formation

a) *Organisation du travail de la classe*

Il convient de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous–tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte et d'exploitation de problématiques, un lieu d'analyse des phénomènes et des concepts, un lieu de réflexion et de débats sur l'architecture des contenus, les démarches suivies, les hypothèses d'un théorème, la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'identifier les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur, l'ordinateur connecté à un videoprojecteur.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et les résultats essentiels, acquérir la maîtrise des méthodes d'étude des problèmes, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, les démarches et les techniques de raisonnement mises en jeu dans les démonstrations. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type de questions est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents scientifiques contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse et de synthèse, grâce à une étude comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) *Les épreuves écrites en temps limité*

• En première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution ;
• en seconde année, leur longueur doit être augmentée, pour permettre un préparation efficace aux épreuves écrites des concours.
Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme ; si d'autres connaissances sont à mettre en œuvre, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barème doit en tenir compte.

d) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année en début de seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

e) *Interprétation et délimitation des programmes*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

# II PROGRAMME DES CLASSES PSI ET PSI*

## AVERTISSEMENT

### 1) Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.

### 2) Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Physique et Sciences de l'Ingénieur comporte conjointement celui des classes de seconde année PSI et PSI*, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année PCSI.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre-exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants :* il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux. Les démonstrations des résultats concernés sont exigibles des étudiants, sauf mention expresse du contraire.
Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution «définition de ...» ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants :* il s'agit de tous les travaux dont l'énoncé commence par la locution «Exemples de ...» et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution «aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants». Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.
En ce qui concerne les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution «la démonstration n'est pas exigible des étudiants», le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant «hors programme»* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
En particulier, la locution «la démonstration est hors programme» signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.
Enfin, lorsqu'une question est repérée dans les bandeaux par la locution «En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient ... mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants», aucune épreuve d'évaluation en mathématiques ne peut porter sur cette question.

### 3) Différentiation de l'enseignement entre les classes PSI et PSI*

Le programme de deuxième année est commun aux classes PSI et PSI*. En revanche, le niveau d'approfondissement peut varier en tenant compte des objectifs de formation des élèves.

# ACTIVITÉS ALGORITHMIQUES ET INFORMATIQUE

## 1- Intégration de l'outil informatique

*a) La démarche algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes. Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie. En revanche, en mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes, aucun résultat général sur leurs performances n'est exigible des étudiants.

*b) Le calcul symbolique et formel. Emploi des calculatrices.*

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. Ils doivent pareillement savoir utiliser une calculatrice possédant des fonctionnalités de calcul formel.

Ils doivent également savoir utiliser une calculatrice programmable, dans les situations liées au programme de mathématiques. Cette utilisation permet notamment la mise en œuvre d'une partie des algorithmes du programme, à l'occasion des travaux pratiques de mathématiques.

Ils doivent savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

## 2- Propositions d'activités algorithmiques

À titre d'illustration (les seules compétences exigibles des étudiants sont celles ci-dessus décrites) le professeur pourra aborder certains des exemples indiqués ci-dessous. Il s'agit d'exemples, qui ne constituent en aucun cas une extension du programme.

### a) Algèbre générale

Algorithme d'exponentiation rapide.

### b) Algèbre linéaire

| | |
|---|---|
| Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. | Lissage par moindres carrés. Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés.<br>Calcul du déterminant d'une matrice par factorisation LU.<br>Inversion d'une matrice. |
| Résolution de systèmes linéaires tri-diagonaux. | Détermination d'une fonction spline cubique.<br>Résolution approchée de certaines équations aux dérivées partielles. |
| Détermination des éléments propres d'une matrice symétrique. | Méthode de Jacobi.<br>Méthodes de tri-diagonalisation de Givens et de Lanczos-Householder. |
| Détermination d'éléments propres pour des matrices de grande dimension. Méthode de la puissance itérée. | Détermination des fréquences et modes de vibration d'une structure. |

### c) Analyse

| | |
|---|---|
| Approximation du point fixe d'une application scalaire par itération. | Résolution d'équations numériques.<br>Méthode de Newton. |
| Approximation du point fixe d'une application vectorielle par itération. | Résolution de systèmes d'équations numériques.<br>Méthode de Newton |
| Résolution approchée d'équations différentielles et de systèmes d'équations différentielles du premier ordre. | Cas de l'oscillateur amorti. |

## 3- Propositions d'utilisation du logiciel de calcul formel

En plus des points énumérés aux a) et b) ci-dessus, le logiciel de calcul formel pourra être utilisé en analyse, en particulier dans les domaines suivants :

| | |
|---|---|
| Représentation des surfaces. | Lignes de niveau. |
| Étude d'équations différentielles. | Tracé des courbes intégrales. |
| Approximation des fonctions. | Séries de Fourier |

# ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

*Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.*

*La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel.*

*Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.*

## I. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

*Le programme est organisé autour de quatre objectifs.*
*- Consolider les acquis de la classe de première année.*
*- Étudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels, trace et déterminant d'un endomorphisme.*
*- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes linéaires issus de l'algèbre (étude des systèmes linéaires, des polynômes, des algèbres ; interpolation, équations aux différences finies) et de l'analyse (récurrences linéaires et équations différentielles linéaires).*
*- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.*

*Dans cette partie, le corps de base* $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

### 1- Espaces vectoriels ; applications linéaires

#### a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme $\sum E_i$ d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$ ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$, le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}[X]\,P$ constitué des multiples d'un polynôme $P$ de degré $n+1$ admet pour sous espace supplémentaire le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

Lorsque $E$ est de dimension finie et que la somme $\sum E_i$ est directe,

$$\dim \underset{i}{\oplus} E_i = \sum_i \dim E_i.$$

Alors, pour que $E = \oplus E_i$, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_i \dim E_i.$$

Lorsque $E = \oplus E_i$ alors, pour toute famille $u_i$ d'appplications linéaires de $E_i$ dans un espace vectoriel $F$, il existe une application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ et une seule telle que, pour tout $i$, $u_i$ soit la restriction de $u$ à $E_i$.

Famille $(p_i)$ de projecteurs de $E$ associée à une décomposition $E = \oplus E_i$ ; relations $p_i^2 = p_i$, $p_i p_j = 0$ si $j \neq i$ et $\mathrm{I}_E = \sum p_i$.

Définition d'une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel $F$ de $E$, à une décomposition en somme directe $E = \oplus E_i$.

Écriture matricielle par blocs. Produit matriciel par blocs (on se limitera à 4 blocs).

#### b) Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ définit un isomorphisme de tout supplémentaire $E'$ de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes $P$ prenant des valeurs données sur une famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ d'éléments de $\mathbf{K}$ distincts deux à deux.

Lorsque $E$ et $F$ sont de dimension finie, relation

$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E.$$

Caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Définition de l'espace dual $E^*$ d'un espace vectoriel $E$.

Définition d'un hyperplan $H$ de $E$. Étant donnée une forme linéaire $\varphi$ sur $E$ non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de $E$ ; toute forme linéaire $\psi$ nulle sur $H$ est colinéaire à $\varphi$.

Équations d'un hyperplan.

Étant donné un vecteur $e$ non nul d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, il existe une forme linéaire $\varphi$ sur $E$ telle que $\varphi(e) = 1$.

Le vecteur nul est le seul vecteur de $E$ sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Formes linéaires coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ associées à une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $E$. Les formes linéaires coordonnées constituent une base $B^*$ de $E^*$, appelée base duale de $B$. La dimension de $E^*$ est égale à $n$.

Dans ces conditions, $B$ et $B^*$ vérifient les relations d'orthogonalité de Kronecker

$$\varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

où $\delta_i^j = 1$ si $j = i$ et $\delta_i^j = 0$ sinon.

Étant donnée une base $L$ de $E^*$, existence d'une base $B$ de $E$ (base anté-duale) telle que $L = B^*$.

### c) Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relations $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$, $\operatorname{Tr} PMP^{-1} = \operatorname{Tr} M$. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

## 2- Déterminants

*Le groupe symétrique est introduit en relation avec la notion de déterminant. Son étude n'est pas un objectif en soi.*

*Dans ce chapitre, les espaces vectoriels sont de dimension finie sur* $\mathbf{K}$.

### a) Groupe symétrique

Définition du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ ; cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma$, signature d'une transposition.

Aucune connaissance sur la décomposition en cycles n'est exigible des étudiants.

L'application $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

### b) Déterminant de $n$ vecteurs

Formes $n$-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension $n$. Déterminant de $n$ vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension $n$. Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant n'est pas exigible des étudiants.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

### c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

### d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

Relation

$$M.{}^t\mathrm{Com}\, M = {}^t\mathrm{Com}\, M.M = (\det M)\, I_n,$$

où $\mathrm{Com}\, M$ est la matrice des cofacteurs de $M$.
Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

# II. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

## 1- Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

### a) Sous-espaces stables

Définition d'un sous-espace vectoriel $F$ stable par un endomorphisme $u$ d'un espace vectoriel $E$. Définition de l'endomorphisme de $F$ induit par $u$.

Si les endomorphismes $u$ et $v$ commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par $v$.

Si $E$ est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de $E$ stabilisant un sous-espace vectoriel $F$ par leur matrice dans une base de $E$ adaptée à $F$.

Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Étant donné un espace vectoriel $E$ de dimension finie et une famille $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels dont $E$ est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces $E_j$ par leur matrice dans une base de $E$ adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, caractérisation des endomorphismes dont la matrice dans cette base est diagonale.
Étant donnée une base d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, caractérisation des endomorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure.

### b) Polynômes d'un endomorphisme

La donnée d'un endomorphisme $u$ de $E$ définit un morphisme $P \mapsto P(u)$ de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Pour tout élément $P$ de $\mathbf{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par $u$.

Définition d'un idéal de l'anneau $\mathbf{K}[X]$ ; structure des idéaux de $\mathbf{K}[X]$.

Noyau et image du morphisme $P \mapsto P(u)$ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Idéal des polynômes annulateurs de $u$.

## 2- Réduction d'un endomorphisme

*Aucune connaissance spécifique sur les méthodes de mise sous forme triangulaire n'est exigible des étudiants.*

### a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Droites stables par un endomorphisme $u$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$. Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{I}_E\right)$ d'un endomorphisme $u$ de $E$.
Si les endomorphismes $u$ et $v$ commutent, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par $v$.

La notion de valeur spectrale est hors programme.
En dimension finie, $\lambda$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si $u - \lambda \mathrm{I}_E$ n'est pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de $u$ est alors appelé spectre de $u$ et noté $\mathrm{Sp}\,(u)$.

Toute famille de $p$ vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Étant donnés un endomorphisme $u$ de $E$ et un élément $P$ de $\mathbf{K}[X]$, pour toute valeur propre $\lambda$ de $u$, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre $\lambda$ de $u$ est un zéro du polynôme $P$.

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des affinités, des symétries.

### b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Un élément $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ; le spectre de $M$ dans $\mathbf{R}$ est contenu dans le spectre de $M$ dans $\mathbf{C}$.

Les éléments propres de $M$ sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme $u$ de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à $M$.

Automorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Définition des matrices semblables ; interprétation géométrique.

Spectre de deux matrices semblables.

### c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme $u$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.

Théorème de Cayley-Hamilton.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

### d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition d'un endomorphisme $u$ diagonalisable : l'espace vectoriel $E$ est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$. Projecteurs $p_\lambda$ associés ; relation $u = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$.

Inversement, si $E$ est somme directe de sous-espaces vectoriels stables $E_j$ sur lesquels $u$ induit une homothétie, alors $u$ est diagonalisable.

Un endomorphisme $u$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de $u$, ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme $u$ de $E$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de $u$ soit égale à dim $E$.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Pour qu'un endomorphisme $u$ de $E$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Si $u$ est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ stable par $u$, l'endomorphisme de $F$ induit par $u$ l'est aussi.

Pour qu'un endomorphisme $u$ de $E$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Définition d'un endomorphisme $u$ trigonalisable : il existe une base telle que la matrice associée à $u$ dans cette base soit triangulaire supérieure.

Aucune connaissance spécifique sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible des étudiants.
Les étudiants doivent savoir déterminer les suites satisfaisant à une relation de récurrence $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

Définition d'une matrice carrée $M$ diagonalisable, trigonalisable. Pour que $M$ soit diagonalisable (resp. trigonalisable), il faut et il suffit que $M$ soit semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Lorsque $M$ est diagonalisable, $M$ s'écrit sous la forme $PDP^{-1}$, où $D$ est diagonale et où $P$ désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ à une base de vecteurs propres de $M$. Cas des matrices trigonalisables.

## III. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

*Il convient d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures tirées de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.*

### 1- Espaces préhilbertiens réels ou complexes

### a) Formes bilinéaires symétriques

Espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E$. Espace vectoriel des formes quadratiques associées ; polarisation.

Définition des formes bilinéaires symétriques positives, des formes quadratiques positives ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas des formes définies positives.
Toute étude systématique des formes bilinéaires et quadratiques est exclue.

### b) Produit scalaire

Produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ et les produits scalaires usuels sur les espaces de fonctions.

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.
Relation entre produit scalaire et norme. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$ ;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f} g$ dans $\mathcal{C}([a, b])$ ;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \bar{f} g$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues $2\pi$-périodiques sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.

### c) Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal $F^\circ$ (ou $F^\perp$) d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux. Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Projecteurs orthogonaux.

Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.

## 2- Espaces euclidiens

### a) Bases orthonormales

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Isomorphisme de $E$ sur l'espace dual $E^*$.

Toute forme linéaire $f$ sur un espace vectoriel euclidien $E$ s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où $a$ est un vecteur de $E$.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

Extension des notions précédentes au cas d'un espace vectoriel hermitien, c'est-à-dire d'un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

### b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel $E$ (de dimension finie ou non), l'orthogonal $F^\circ$ d'un sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de $F$.

Définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur $x$ de $E$ sur $F$ ; définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément $x$ de $E$ à $F$.

Expression de $p_F(x)$ lorsque $F$ est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)\, e_j.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Distance à un sous-espace vectoriel. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Extension des notions précédentes au cas des espaces préhilbertiens complexes.

### c) Adjoint d'un endomorphisme

*Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont des espaces euclidiens.*

| | |
|---|---|
| Définition de l'adjoint $u^*$ d'un endomorphisme $u$ de $E$ par la relation $\big(u^*(x)\vert y\big) = \big(x\vert u(y)\big)$ ; existence et unicité de l'adjoint. Matrice associée à $u^*$ dans une base orthonormale. | L'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ ; relation $(uv)^* = v^*u^*$. |
| Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) $u$. | Caractérisation par la relation $u^* = u$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux par les relations $p^2 = p$ et $p^* = p$. |
| Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien $E$ (c'est-à-dire un automorphisme de $E$ conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme. | Caractérisation des automorphismes orthogonaux par la relation $u^*u = uu^* = \mathrm{I}_E$. |
| Définition du groupe orthogonal $O(E)$ ; symétries orthogonales, réflexions. | L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme. |
| Définition des matrices orthogonales et du groupe orthogonal $O\,(n)$.<br>Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes. | Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations $${}^tM\,M = I_n \quad \text{ou} \quad M\,{}^tM = I_n.$$ |
| Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale. | |
| Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal ; déterminant d'une réflexion. | La notion de rotation ne figure au programme qu'en dimensions 2 et 3. |

### d) Réduction des endomorphismes autoadjoints

| | |
|---|---|
| Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$. Alors $E$ est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $u$ ; en particulier, $u$ est diagonalisable dans une base orthonormale. | Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale. |
| Endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire symétrique sur un espace euclidien $E$ ; réduction de cette forme dans une base orthonormale de $E$. | |

### e) Application aux coniques et aux quadriques

| | |
|---|---|
| Recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal ; exemples d'une telle recherche pour une quadrique. | |
| Description des quadriques usuelles (en dimension 3) définies par une équation cartésienne réduite en repère orthonormal : ellipsoïdes, hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes), paraboloïdes (elliptiques et hyperboliques), cônes, cylindres (elliptiques, hyperboliques et paraboliques). | Les étudiants doivent savoir reconnaître sur l'équation réduite les éléments de symétrie et les quadriques de révolution.<br>Génération d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'un paraboloïde hyperbolique par une famille de droites.<br>Aucune autre connaissance spécifique sur les quadriques n'est exigible. |

# ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

*Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus.*

*Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie. Ce cadre permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité. Le programme comporte en outre une introduction à la notion de norme en dimension quelconque. Cette notion permet notamment de décrire les modes de convergence usuels des suites et des séries de fonctions. En revanche, l'étude systématique des espaces vectoriels normés n'est pas un objectif du programme.*

*La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, les équations différentielles tiennent une place majeure. Le programme comporte en outre une introduction au calcul différentiel à plusieurs variables.*

*En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral.*

## I. SUITES ET FONCTIONS

### 1- Normes et distances, suites

*L'objectif est d'introduire les notions de norme sur un espace vectoriel réel ou complexe (de dimension finie ou non) et de suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé.*

| | |
|---|---|
| Définition d'une norme, notée $x \mapsto \|x\|$ ou $x \mapsto N(x)$, sur un espace vectoriel $E$ réel ou complexe ; distance associée, notée $(x, y) \mapsto d(x, y)$. Boules.<br>Norme $x \mapsto \|x\| = (x\|x)^{1/2}$ associée à un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x\|y)$ sur un espace vectoriel réel ou complexe.<br>Suites convergentes, suites divergentes. Opérations algébriques sur les suites convergentes. | Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace $\mathbf{K}^n$, des espaces de matrices et de fonctions. Les étudiants doivent connaître notamment les normes $N_1$, $N_2$ et $N_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$ et sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes. |
| Définition d'une application $k$-lipschitzienne : composée d'applications lipschitziennes. | L'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne. |
| Comparaison de deux normes $N$ et $N'$ sur $E$. Normes équivalentes. | On fera le lien avec la convergence des suites pour chacune de ces deux normes.<br>Les étudiants doivent savoir comparer notamment les normes usuelles mentionnées ci-dessus. |

### 2- Espaces vectoriels normés de dimension finie

*L'équivalence des normes montre que de nombreux concepts importants sont indépendants du choix d'une norme : parties bornées, applications lipschitziennes ; parties ouvertes, parties fermées, limite et continuité d'une application ; suites convergentes, parties compactes, suites de Cauchy. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (sans préciser une norme particulière).*

*Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie $A$ d'un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$ et à valeurs dans un autre $F$.*

*Dans un souci d'unification, une propriété portant sur une fonction définie sur $A$ est dite vraie au voisinage d'un point $a$ si elle est vraie sur l'intersection de $A$ avec une boule de centre $a$ lorsque $a$ est un point de $E$ adhérent à $A$, avec un intervalle $]c, +\infty[$ lorsque $E = \mathbf{R}$ et $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, c[$ lorsque $E = \mathbf{R}$ et $a = -\infty$.*

#### a) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

| | |
|---|---|
| Sur un espace vectoriel de dimension finie $E$, toutes les normes sont équivalentes. | La démonstration de ce théorème est hors programme. |

Définition d'une partie bornée, d'une application bornée.

Espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A, F)$ des applications bornées $f$ de $A$ dans $F$ muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\limits_x \|f(x)\|$.

Pour qu'une suite $(u_n)$ d'éléments d'un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de $E$ soient convergentes.

Les coordonnées de la limite sont alors les limites des coordonnées.

Définition d'une suite de Cauchy. Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes est convergente ; plus généralement, toute suite de Cauchy d'éléments de $E$ est convergente.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

Relations de comparaison entre suites : domination et négligeabilité pour une suite $(u_n)$ à valeurs vectorielles et une suite $(\alpha_n)$ à valeurs réelles. Équivalence pour deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ à valeurs réelles ou complexes.

Notations $u_n = O(\alpha_n)$, $u_n = o(\alpha_n)$, $u_n \sim v_n$.

Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe $a$ de $f$.

**b) Étude locale d'une application, continuité**

Définition des parties ouvertes, des parties fermées. Réunion et intersection de parties ouvertes, de parties fermées.
Définition d'un point adhérent, d'un point intérieur à une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées.

Les notions de voisinage d'un point, d'adhérence, d'intérieur et de frontière d'une partie, d'ouverts et de fermés relatifs à une partie sont hors programme.

Limite d'une application : soit $f$ une application d'une partie $A$ de $E$ à valeurs dans $F$ et $a$ un point de $E$ adhérent à $A$. Étant donné un élément $b$ de $F$, on dit que $f$ admet $b$ comme limite au point $a$ si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $x$ de $A$, la relation $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique la relation $\|f(x)-b\| \leqslant \varepsilon$ ; le vecteur $b$ est alors unique, et on le note $b = \lim_a f$, ou encore $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Lorsqu'un tel élément $b$ existe, on dit que $f$ admet une limite au point $a$.

Lorsque $a$ appartient à $A$, $f$ est dite continue au point $a$ ; alors, $b = f(a)$. Dans le cas contraire, $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $f$ se prolonge par continuité en ce point.
Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, extension de cette définition lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, extension de la notion de limite lorsque $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.

Limite d'une application composée ; opérations algébriques sur les limites.

Caractérisation d'une application admettant une limite à l'aide de ses coordonnées dans une base de $F$.

Limite de l'image d'une suite $(u_n)$ admettant une limite $a$ par une application $f$ admettant une limite au point $a$.

Caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point.

Relations de comparaison en un point ; domination et négligeabilité pour une fonction $f$ à valeurs vectorielles et une fonction $\varphi$ à valeurs réelles ne s'annulant pas en dehors du point.

Notations $f = O(\varphi)$ et $f = o(\varphi)$.

Applications continues. Continuité de la composée de deux applications continues, de la restriction d'une application continue ; opérations algébriques sur les applications continues. Caractérisation de la continuité à l'aide des coordonnées dans une base de $F$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de $A$ dans $F$, algèbre $\mathcal{C}(A)$ des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur $A$.

Image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée par une fonction $f$ continue sur $E$ à valeurs réelles ou complexes. En particulier, si $f$ est à valeurs réelles, alors pour tout nombre réel $\alpha$, l'ensemble des points $x$ tels que $f(x) \geqslant \alpha$, ou tels que $f(x) = \alpha$, est une partie fermée de $E$ ; de même l'ensemble des points $x$ tels que $f(x) > \alpha$ est une partie ouverte de $E$.

Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour démontrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).
La caractérisation de la continuité par images réciproques des ouverts (des fermés) est hors programme.

### c) Continuité des applications linéaires

Toute application linéaire $u$ d'un espace vectoriel normé $(E, N)$ de dimension finie dans un autre $(F, N')$ est continue sur $E$.

Il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, pour tout $x$, $N'\big(u(x)\big) \leqslant k\,N(x)$ ; dans ces conditions, $u$ est $k$-lipschitzienne.

Norme subordonnée aux normes $N$ et $N'$ d'une application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ :

$$\|u\| = \sup_{N(x)\leqslant 1} N'\big(u(x)\big).$$

Norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ associée à $N$ et $N'$.

Si $u$ et $v$ sont des applications linéaires,

$$\|v \circ u\| \leqslant \|v\|\,\|u\|.$$

Norme sur l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ associée à $N$.

Si $E$, $F$ et $G$ sont de dimension finie, toute application bilinéaire $B$ de $E \times F$ dans $G$ est continue sur $E \times F$.

Il convient de mettre en valeur des inégalités du type $\|B(x, y)\| \leqslant k\,\|x\|\,\|y\|$.

Continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K} \times E$ dans $E$, du produit scalaire sur un espace euclidien.

Continuité de $(u, v) \mapsto uv$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

### d) Compacité

Par définition, une partie compacte d'un espace vectoriel normé $E$ de dimension finie est une partie fermée bornée.

Étant donnée une application continue $f$ de $A$ dans $F$, l'image par $f$ d'une partie compacte de $E$ incluse dans $A$ est une partie compacte de $F$. Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extrémums.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

## 3- Séries de nombres réels ou complexes

### a) Suites et séries

Série $\sum u_n$ associée à une suite $(u_n)$ de nombres réels ou complexes, suite $(s_p)$ des sommes partielles de cette série.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.
Caractérisation de la convergence d'une série de nombres complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Si la série $\sum u_n$ converge, $u_n$ tend vers $0$ ; la réciproque est fausse.

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

### b) Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres positifs converge, il faut et il suffit que la suite $(s_p)$ des sommes partielles soit majorée. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_p s_p = \sup_p s_p$.

Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient $(u_n)$ et $(\alpha_n)$ des suites de nombres réels positifs telles que $u_n = O\,(\alpha_n)$ ; alors la convergence de $\sum \alpha_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une série géométrique, à une série de Riemann.
Développement décimal d'un nombre réel positif.

Comparaison à une série géométrique : règle de d'Alembert.

**c) Séries de nombres réels ou complexes**

Critère de Cauchy pour la convergence d'une série de nombres réels ou complexes.

Séries absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum |u_n| < +\infty$). Toute série absolument convergente est convergente.

En outre, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Série géométrique : la série $\sum z^n$, où $z$ appartient à $\mathbf{C}$, est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$ ; sa somme est alors égale à $\dfrac{1}{1-z}\cdot$

En outre, si $|z| \geqslant 1$, cette série diverge.

Série exponentielle : pour tout nombre complexe $z$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Par définition, $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}\cdot$

**d) Comparaison d'une série à une intégrale**

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction $f$ continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$$

est convergente. En particulier la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La relation $w_n = \int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}t$ permet d'encadrer $w_n$ ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque $f$ est croissante.

Équivalent de $n!$ (formule de Stirling).

La démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible des étudiants.

**e) Produit de deux séries absolument convergentes**

Définition du produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p\, v_q.$$

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, la série $\sum w_n$ l'est aussi.

Dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$

La démonstration de ces résultats n'est pas exigible des étudiants.

## 4- Suites et séries de fonctions

*L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence ponctuelle des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale d'une série) et d'exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite et l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples.*

*Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.*

**a) Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale**

Étant donnée une suite $(f_n)$ de fonctions définies sur $I$, définition de la convergence simple sur $I$, de la convergence uniforme sur $I$ ; convergence uniforme de $(f_n)$ sur tout segment de $I$.
Définitions correspondantes pour une série de fonctions.

Pour les fonctions bornées, la convergence uniforme peut être interprétée à l'aide de la norme $N_\infty$ sur l'espace $\mathcal{B}(I)$.

Soit $a$ un point de $I$ ; si $(f_n)$ converge vers $f$ uniformément sur $I$ et si, pour tout $n$, $f_n$ est continue au point $a$, alors $f$ l'est aussi.

Extension de ce résultat au cas où $a$ est une extrémité de $I$ lorsque, pour tout $n$, $f_n$ admet une limite $b_n$ en $a$.
La démonstration de ces résultats n'est pas exigible des étudiants.

Une série $\sum f_n$ de fonctions réelles ou complexes définies sur $I$ est dite normalement convergente sur $I$ si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il convient d'utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que, pour tout $n$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.

Toute série $\sum f_n$ normalement convergente sur $I$ converge uniformément sur $I$.

### b) Approximation des fonctions d'une variable réelle

Définition d'une fonction $\varphi$ en escalier sur $[a, b]$, d'une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à $\varphi$. Espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment.

Espace vectoriel des fonctions en escalier sur **R** (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est continue par morceaux.

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions polynomiales. Approximation uniforme sur **R** des fonctions continues périodiques par des polynômes trigonométriques (complexes).

La démonstration des théorèmes de Weierstrass est hors programme.

## II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION ET INTÉGRATION

*Les fonctions étudiées dans cette partie sont définies sur un intervalle $I$ de* **R** *et à valeurs dans un espace vectoriel $F$ de dimension finie sur* **R** *ou sur* **C**.

### 1- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

### a) Dérivée en un point, fonctions de classe C$^1$

Définition de la dérivabilité d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ en un point $a$ de $I$ : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.

Définition de la dérivabilité d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$, application dérivée ; définition d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

Notations $f'$, $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$, linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où $u$ est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme $B(f, g)$, où $B$ est une application bilinéaire.

Lorsque $F$ est un espace préhilbertien, dérivation du produit scalaire $(f|g)$, du carré de la norme $\|f\|_2$.

Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction $f$ à valeurs dans $F$ à l'aide d'une base de $F$.

Les coordonnées de $\mathrm{D}f$ sont les dérivées des coordonnées de $f$.

Cas d'une fonction $f$ à valeurs complexes : pour que $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que $\bar{f}$ le soit, ou encore que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le soient.

Dans ces conditions,

$$\mathrm{D}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{D}f}, \quad \mathrm{D}f = \mathrm{D}(\operatorname{Re} f) + \mathrm{i}\,\mathrm{D}(\operatorname{Im} f).$$

Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur $I$ et dérivables sur l'intérieur de $I$.

### b) Fonctions de classe $\mathbf{C}^k$

Définition des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $I$ ($k$ entier naturel ou $k = +\infty$).

Notations $f^{(k)}$, $\mathrm{D}^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ à valeurs dans $F$, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ à valeurs réelles ou complexes.

Dérivée $k$-ième du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).

La composée $f \circ \varphi$ d'une application $f$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et d'une fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $J$ à valeurs dans $I$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J$.
Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $J$ sur $I$ ($k \geqslant 1$).

Une fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $J$ ($k \geqslant 1$) est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $J$ sur $I = \varphi(J)$ si et seulement si, pour tout élément $t$ de $J$, $\varphi'(t) \neq 0$.

## 2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles

*Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment $J = [a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel $F$ de dimension finie sur* **R** *ou sur* **C**. *La notion de fonction intégrable au sens de Riemann est hors programme.*

### a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition de l'intégrale d'une application $\varphi$ en escalier sur un segment $J$. Notations $\int_J \varphi$, $\int_{[a,b]} \varphi$. Linéarité de l'intégrale. Image de l'intégrale par une application linéaire.

Inégalité $\|\int_J \varphi\| \leqslant \int_J \|\varphi\|$.

Définition de l'intégrale d'une application $f$ continue par morceaux sur un segment $J$. Notations $\int_J f$, $\int_{[a,b]} f$. Linéarité de l'intégrale. Invariance de l'intégrale par translation.

Inégalité $\|\int_J f\| \leqslant \int_J \|f\|$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, positivité et croissance de l'intégrale.

Une fonction $f$ continue et à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Image de l'intégrale par une application linéaire. Expression de l'intégrale à l'aide d'une base de $F$.

Pour une fonction $f$ à valeurs complexes, intégrale de $\bar{f}$, de $\operatorname{Re} f$, de $\operatorname{Im} f$.

Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux coïncidant sauf sur une partie finie de $J$ sont égales.

Définition de l'intégrale d'une fonction $f$ définie sur un segment $[a, b]$ privé d'une subdivision $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$, lorsque la restriction de $f$ à chacun des intervalles ouverts $]a_j, a_{j+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Si $K$ est un segment contenu dans $J$, $\int_K f = \int_J \chi_K f$ où $\chi_K$ est la fonction caractéristique de $K$.

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\| \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} \|f\|.$$

Les étudiants doivent savoir effectuer des majorations analogues pour des intégrales de la forme $\int_{[a,b]} B(f, g)$, où $B$ est une application bilinéaire. En revanche, toute formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Étant donnée une application $f$ continue par morceaux sur un intervalle $I$ de **R**, définition de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où $a$ et $b$ appartiennent à $I$.

Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

### b) Intégration sur un segment des suites de fonctions continues

Norme de la convergence en moyenne $f \mapsto N_1(f) = \int_{[a,b]} |f|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes. La convergence uniforme de $(f_n)$ sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne et, en outre,

$$\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n.$$

Inégalités

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant N_1(f) \leqslant (b-a)\, N_\infty(f).$$

Intégration terme à terme d'une série d'applications continues : soit $(f_n)$ une suite d'applications continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Lorsque la convergence est normale sur $[a,b]$, la série $\sum N_1(f_n)$ est convergente et

$$N_1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions : soit $(f_n)$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ convergeant simplement sur $I$ vers $f$ et telle que $(f'_n)$ converge uniformément sur tout segment de $I$ vers $h$. Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $f' = h$.

Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment $[a,b]$ de $I$ et pour toute application $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$,

$$N_\infty(f) \leqslant \|f(a)\| + \int_{[a,b]} \|f'\|.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit $(f_n)$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ à valeurs dans $\mathbf{K}$. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I$ et si la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$, alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et

$$\mathrm{D}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{D}\, f_n.$$

Produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} \bar{f} g$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}$. La convergence uniforme de $(f_n)$ sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.

Inégalités

$$N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, N_\infty(f),$$
$$N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, N_2(f).$$

## 3- Dérivation et intégration

*Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel $F$ de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.*

### a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive $g$ d'une application $f$ continue sur un intervalle $I$.

Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Théorème fondamental : étant donnés une application $f$ continue sur $I$ et un point $a$ de $I$,

- L'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$ ; pour toute primitive $h$ de $f$ sur $I$,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a).$$

- Pour toute application $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

Changement de variable : étant données une fonction $f$ continue sur $I$ à valeurs dans $F$ et une fonction $\varphi$ à valeurs dans $I$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Extension au cas où $f$ est continue par morceaux sur $I$, lorsque $\varphi$ est strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$.

### b) Étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Inégalité des accroissements finis : soit $f$ une application continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si, pour tout élément $t$ de $]a, b[$, $\|f'(t)\| \leqslant \lambda$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \lambda\,(b - a).$$

Les étudiants doivent connaître l'interprétation cinématique de ce résultat.

Si $f$ est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ et si $f'$ a une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$ : si $f$ est continue sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a, b]$ et si, pour tout $r \in [1, k]$, $\mathrm{D}^r f$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$.

### c) Formules de Taylor

Pour une application $f$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur $I$, formule de Taylor à l'ordre $k$ en un point $a$ de $I$ : expression intégrale du reste $R_k$. Majoration du reste $R_k$ (inégalité de Taylor-Lagrange).

Décomposition $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$, où

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!}\,\mathrm{D}^n f(a).$$

Développement limité d'une primitive d'une application continue ; application au développement limité de la dérivée d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Existence d'un développement limité à l'ordre $k$ pour une application de classe $\mathcal{C}^k$ : formule de Taylor-Young.

## 4- Intégrales impropres. Fonctions intégrables

*Pour ce qui concerne les intégrales impropres (ou généralisées), l'objectif du programme est la maîtrise de la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle I non fermé ou non borné, en vue de la définition de l'intégration sur un intervalle quelconque. Le programme part de la définition générale de la convergence, en raison de la simplicité de la présentation, mais l'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.*

### a) Définition d'une intégrale impropre convergente

Si $f$ est une application continue par morceaux sur $[a, b[$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$ est convergente, par définition, si $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ a une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$, en restant dans $[a, b[$.

Cohérence de la notation avec le cas où $I$ est fermé borné.

Nature des intégrales :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{t^\alpha}, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}\,t, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}\,t, \text{ où } \alpha \in \mathbf{R}_+^*$$

Extension aux intervalles du type $]a, b]$ et $]a, b[$.

Définition des intégrales divergentes.

### b) Intégrales des fonctions positives

Relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de $f$ et de $g$, dans le cas où $f = O(g)$, et dans le cas où $f \sim g$.

### c) Intégrales absolument convergentes

On dit que $f$, continue par morceaux sur $I$ a une intégrale absolument convergente, ou est intégrable, si l'intégrale de la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est convergente.

Cela équivaut à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout segment $J$ inclus dans $I$, on ait :

$$\int_J |f(t)| \,\mathrm{d}\, t \leqslant M.$$

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Si $a = \inf I$ et $b = \sup I$, notation

$$\int_I f = \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}\, t.$$

Comparaison en module à des fonctions réelles positives, du type : $|f| \leqslant g$, ou $|f| \sim g$.

## 5- Propriétés de l'intégrale

### a) Propriétés élémentaires

Brève extension des propriétés vues dans le cadre de l'intégrale sur un segment (linéarité, relation de Chasles, inégalité de la moyenne).

Relation de Chasles : si $f$ est intégrable sur $I$ et sur $J$, si $I \cup J$ est un intervalle et si $I \cap J$ est vide ou réduit à un point :

$$\int_I f + \int_J f = \int_{I \cup J} f.$$

Changement de variable : étant données une fonction $f$ intégrable sur $I$ et une bijection $\varphi$ d'un intervalle $I'$ sur $I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I'$,

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

Si $I'$ a pour extrémités $a$ et $b$ :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}\, t.$$

### b) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Les fonctions continues et intégrables sur $I$ à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$ ; norme de la convergence en moyenne $f \mapsto N_1(f) = \int_I |f|$.

Une fonction continue à valeurs complexes $f$ est dite de carré intégrable sur $I$ si $|f|^2$ est intégrable sur $I$. Ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

Le produit de deux fonctions continues $f$ et $g$ de carré intégrable sur $I$ est intégrable sur $I$.

L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \bar{f} g$ est un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\int_I |f|^2)^{1/2}$.

Inégalités

$$|(f|g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)\, N_2(g).$$

### c) Théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée : soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur $I$. Si $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$ continue par morceaux sur $I$ et s'il existe une fonction $\varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur $I$, telle que pour tout entier $n$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions $f_n$ et $f$ sont intégrables sur $I$ et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme.

**d) Intégration terme à terme d'une série de fonctions.**

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur $I$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f$ continue par morceaux sur $I$ et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors $f$ est intégrable sur $I$ et

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme.

**e) Intégrales dépendant d'un paramètre**

Continuité sous le signe $\int$ : soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où $A$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la deuxième variable et telle que, pour tout élément $x$ de $A$, la fonction $f(x, \cdot) \ : \ t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur $I$ ; soit $\varphi$ une fonction continue par morceaux positive intégrable sur $I$. Alors, si pour tout élément $(x,t)$ de $A \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (hypothèse de domination), la fonction $g$ définie sur $A$ par la relation $g(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $A$.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de $A$.

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : soit $f$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où $A$ est un intervalle de $\mathbf{R}$, telle que pour tout élément $x$ de $A$ la fonction $f(x, \cdot) \ : \ t \mapsto f(x,t)$ soit continue par morceaux et intégrable sur $I$, et admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Alors la fonction $g$ définie sur $A$ par la relation $g(x) = \int_I f(x, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $A$, et

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot).$$

## 6- Courbes du plan et de l'espace

*L'objectif de ce chapitre est de reprendre l'étude des courbes planes abordée en classe de première année, tant du point de vue affine (étude locale et asymptotique) que métrique (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure). Aucune connaissance sur l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires n'est exigible des étudiants.*

*La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.*

*Dans ce chapitre, on considère des fonctions $f$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ de dimension inférieure ou égale à 3, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle $I$, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$.*

**a) Courbes paramétrées**

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$.

Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.
On étudiera notamment le cas de la paramétrisation polaire.

Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier (à l'ordre 1).

Les changements de paramétrage sont supposés de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que leurs applications réciproques.

### b) Étude locale d'un arc orienté $\Gamma$ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des demi-tangentes en un point $A$ de $\Gamma$, de la tangente en un point $A$. Existence d'une tangente en un point régulier.

### c) Étude des branches infinies

Recherche d'asymptotes pour une courbe plane.

Cas particulier des courbes définies par une équation polaire $\rho = f(\theta)$.

### d) Étude métrique d'un arc orienté

*Dans ce paragraphe, on suppose que $F$ est un espace vectoriel euclidien, dont la norme est notée $\| \ \|$.*

Pour un arc orienté $\Gamma$ régulier à l'ordre 1, vecteur unitaire de la tangente. Définition d'une abscisse curviligne : fonction $s$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ telle que

$$s' = \|f'\|.$$

L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible.
Paramétrage normal d'un arc.
Courbure d'un arc plan.

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne. Aucune connaissance spécifique sur une définition géométrique de cette longueur n'est exigible des étudiants.

# III. SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

## 1- Séries entières

*L'objectif de ce chapitre est double :*
*- Étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme.*
*- Introduire la notion de développement d'une fonction en série de Taylor, notamment pour le développement en série entière des fonctions élémentaires.*
*En ce qui concerne le développement de $t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ où $t$ est réel et $z$ complexe, il s'agit d'établir que cette fonction, déjà étudiée en première année, est aussi égale à $t \mapsto \exp tz$, définie à partir de la série exponentielle d'un nombre complexe.*

*Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.*

### a) Rayon de convergence d'une série entière

Série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe $z$ associée à une suite $(a_n)$ de nombres complexes : définition du rayon de convergence $R$ (fini ou non).

Lemme d'Abel : Étant donné un nombre réel $\rho > 0$ tel que $|a_n|\rho^n$ soit borné, alors pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < \rho$, $|a_n z^n|$ est dominé par $\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$.
La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence. Elle est normalement convergente sur tout compact du disque de convergence ; continuité de la somme sur le disque de convergence.

En dehors du cas où $\sum |a_n| R^n$ converge, tout énoncé général sur la convergence de la série en un point du cercle $|z| = R$ et sur les propriétés de la somme de la série en un tel point est hors programme.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. Linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

Relation

$$\exp(z + z') = \exp z \, \exp z'.$$

### b) Séries entières d'une variable réelle

Étant donnée une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle $t$ dont le rayon de convergence $R$ est strictement positif, une primitive sur l'intervalle $]-R, R[$ de la somme $f$ de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

Invariance du rayon de convergence d'une série entière par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme.

La somme $f$ d'une série entière $\sum a_n t^n$ dont le rayon de convergence $R$ est strictement positif est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. En outre, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{D}^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme.

En particulier, pour tout entier $k$ positif ou nul,

$$a_k = \frac{1}{k!}\,\mathrm{D}^k f(0).$$

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$, où $r>0$.
Définition de la série de Taylor d'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$, où $r>0$.

Développement en série de Taylor de $\mathrm{e}^{tz}$ où $z$ est complexe, de $\sin t$, de $\cos t$. Développement de $\ln(1+t)$, de $(1+t)^\alpha$ où $\alpha$ est réel.

## 2- Séries de Fourier

*L'objectif de ce chapitre est triple :*
*- Étudier les coefficients de Fourier d'une fonction $f$ périodique, et notamment leur comportement asymptotique en fonction de la régularité de $f$.*
*- Étudier la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de $f$ en utilisant la structure d'espace préhilbertien.*
*- Étudier la convergence ponctuelle des sommes $S_p(f)$ : convergence normale, théorème de Dirichlet.*

*Il convient d'interpréter ces résultats en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.*

*Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes, $2\pi$-périodiques et continues par morceaux sur* **R**. *Le cas des fonctions $T$-périodiques s'y ramène par changement de variable.*

### a) Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes $2\pi$-périodiques continues par morceaux sur **R**.

Définition d'une fonction $2\pi$-périodique continue par morceaux $f$ à partir d'une fonction $g$ continue par morceaux sur un segment de longueur $2\pi$.

Intégrale sur une période d'une fonction $f$ à valeurs complexes $2\pi$-périodique continue par morceaux sur **R**.

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction :

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t.$$

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Coefficients de Fourier de $\bar{f}$ ; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \mapsto f(-t)$ ; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \mapsto f(t+a)$.

Pour tout entier naturel $p$, définition de la somme partielle :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Lorsque qu'en un point $x$ de **R** les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est dite convergente au point $x$ et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes $S_p(f)(x)$.

L'application $\mathcal{F}$ qui à $f$ associe $\hat{f}$ est linéaire. La suite $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Par définition $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t.$

En outre, $c_n(f)$ tend vers 0 au voisinage de l'infini.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**.
Coefficients de Fourier d'une dérivée : si $f$ est $2\pi$-périodique continue sur **R** et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**, alors

$$c_n(\mathrm{D}f) = \mathrm{i}n\,c_n(f).$$

Extension au cas où $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur **R**.

### b) Convergence en moyenne quadratique.

*Dans ce paragraphe, on considère des fonctions $2\pi$-périodiques continues sur* **R**. *Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.*

Produit scalaire $(f,g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\,g(t)\,\mathrm{d}\,t$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions $2\pi$-périodiques continues sur **R** ; norme associée $f \mapsto \|f\|_2$.

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, où $n$ parcourt **Z**, forment une famille orthonormale et, pour tout $n$, $c_n(f) = (e_n|f)$.

La projection orthogonale d'un élément $f$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les $e_n$, où $|n| \leqslant p$, est la somme partielle $S_p(f)$.
Relation

$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d\,(f,\mathcal{P}_p)^2.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leqslant (\|f\|_2)^2.$$

En particulier, l'application qui à tout élément $P$ de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f-P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément $f$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers $f$.
L'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

Formule de Parseval : expressions du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

### c) Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque $f$ est $2\pi$-périodique continue sur **R** et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**, les sommes $\displaystyle\sum_{n=p}^{p} |(c_n(f)|$ sont majorées. Dans ces conditions, les sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de $f$ convergent uniformément vers $f$ sur **R**.

En particulier, pour tout nombre réel $x$, la série de Fourier de $f$ converge en ce point, et sa somme est égale à $f(x)$.

Théorème de Dirichlet : soit $f$ une fonction $2\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur **R**, alors pour tout nombre réel $x$, la série de Fourier de $f$ converge en ce point et sa somme est égale à $\frac{1}{2}\lim_h \big[f(x+h)+f(x-h)\big]$ où $h$ tend vers 0, $h > 0$. En particulier, en tout point $x$ où $f$ est continue, la somme de la série de Fourier de $f$ est égale à $f(x)$.

La démonstration du théorème de Dirichlet n'est pas exigible des étudiants.

# IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

*Il convient de relier l'étude des équations différentielles à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance.*

## 1- Équations différentielles linéaires

*Les applications considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle $I$ de* **R** *et à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$ de dimension finie sur* **R** *ou* **C**.

### a) Équations linéaires d'ordre 1

Définition d'une solution sur $I$ de l'équation différentielle linéaire $x' = a(t)\,x + b(t)$ où $a$ désigne une application continue de $I$ dans $\mathcal{L}(F)$ et $b$ une application continue de $I$ dans $F$.

Traduction en termes matriciels, en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

Existence et unicité de la solution sur $I$ du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Les solutions sur $I$ de l'équation $x' = a(t)\,x$ constituent un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^1(I)$. En outre, étant donné un élément $\alpha$ de $I$, l'application qui à tout élément $f$ de $\mathcal{E}$ associe $f(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $F$.

En particulier, la dimension de $\mathcal{E}$ est égale à $n = \dim F$.

Définition d'un système fondamental de solutions de l'équation $x' = a(t)\,x$.

Wronskien. Application à la résolution de l'équation différentielle $x' = a(t)\,x + b(t)$ par la méthode de variation des constantes.

**b) Équations linéaires à coefficients constants**

Étude de l'équation $x' = a\,x$, où $a$ est un endomorphisme de $F$.

Traduction matricielle $X' = A\,X$, où $A$ est une matrice à éléments réels ou complexes.

**c) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2**

Équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où $a$, $b$ et $c$ sont continues sur $I$ à valeurs réelles ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque $a$ ne s'annule pas sur $I$.

Équation $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$ où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont continues sur $I$ à valeurs réelles ou complexes. Lorsque $a$ ne s'annule pas sur $I$, système d'ordre 1 associé, existence et unicité de la solution sur $I$ du problème de Cauchy, structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions, wronskien.

Application à la résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.
Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur $I$.

**2- Notions sur les équations différentielles non linéaires**

Définition d'une solution d'une équation différentielle de la forme $x' = f(t,x)$ où $f$ est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbf{R}^2$.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

## V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

**1- Calcul différentiel**

*L'objectif essentiel est d'étudier quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications continûment différentiables, différentielle, difféomorphismes, gradient, points critiques. La notion de fonction différentiable en un point est introduite pour la commodité de l'exposé, mais son étude en dehors du cadre des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ n'est pas un objectif du programme.*

*Le programme comporte en outre quelques notions sur les dérivées partielles d'ordre supérieur.*

*Les applications $f$ considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert $U$ de $E$ à valeurs dans $F$, où $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels de dimension finie. Pour la pratique, le programme se limite au cas où $\dim E \leqslant 3$, $\dim F \leqslant 3$ et où $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*

*Pour l'étude d'une fonction $f$ de plusieurs variables, il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes peuvent se ramener au problème correspondant pour une fonction d'une variable en paramétrant le segment $[a, a+h]$, ce qui permet d'écrire $f(a+h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi_h(t) = f(a+th)$.*

**a) Applications continûment différentiables**

Définition d'une fonction $f$ différentiable en un point $a$ de $U$ et de l'application linéaire tangente à $f$ en $a$, appelée aussi différentielle de $f$ au point $a$ et notée $\mathrm{d}f(a)$.

Interprétation en termes de développement limité de $f$ à l'ordre 1.

Définition de la dérivée de $f$ en un point $a$ de $U$ selon un vecteur $h$, notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Définition des dérivées partielles dans une base de $E$, notées $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à $U$ ; on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si $\varphi_h$ est dérivable à l'origine, on dit que $f$ admet une dérivée en $a$ selon $h$, et l'on pose $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi'_h(0)$.

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment différentiables) sur $U$ : les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$ sont continues sur $U$.

Théorème fondamental : si les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$ sont continues sur $U$, alors $f$ est différentiable en tout point $a$ de $U$.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Si $f$ et $g$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $g \circ f$ l'est aussi ; différentielle de $g \circ f$. Définition d'un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Caractérisation d'une application $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ par ses coordonnées $f_i$ ; en outre, les fonctions $\mathrm{D}_j f_i$ sont les coordonnées de $\mathrm{D}_j f$.

Pour une application de classe $\mathcal{C}^1$, matrice jacobienne ; lorsque $n = p$, jacobien.

Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque.

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où $\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $U$.

Lorsque $f$ est un difféomorphisme, l'image $f(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée $\Gamma$ régulière à l'ordre 1 est une courbe régulière à l'ordre 1 ; détermination d'une tangente à $f(\Gamma)$.

Caractérisation à l'aide du jacobien des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

### b) Fonctions numériques continûment différentiables

Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$, le gradient de $f$ est défini par

$$\mathrm{d}f(a)\,(h) = \mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a) | h).$$

Coordonnées du gradient.

Lorque l'ouvert $U$ est convexe, inégalité des accroissements finis pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

Caractérisation des fonctions constantes sur l'ouvert $U$.

Points critiques d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ ; condition nécessaire d'existence d'un extrémum local.

### c) Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$.

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

### d) Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel $\theta$, par :

$$\vec{u}\,(\theta) = \cos\theta\ \vec{e_1} + \sin\theta\ \vec{e_2},$$

$$\vec{v}\,(\theta) = -\sin\theta\ \vec{e_1} + \cos\theta\ \vec{e_2}$$

où $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
Coordonnées polaires d'un point de $\mathbf{R}^2$.

Relations $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}\,\theta} = \vec{v}$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,\theta} = -\vec{u}$.
Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles de la fonction

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

Détermination principale de l'argument d'un nombre complexe.

Difféomorphisme $(\rho, \theta) \mapsto \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ de $]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$ sur son image.

### e) Notions sur les courbes et les surfaces

*Dans ce paragraphe, les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.*

*L'objectif, très modeste, est d'introduire la notion de tangente à une courbe plane définie par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, et de plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$.*

*Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.*

Définition d'un point régulier d'une surface définie par paramétrage $(u, v) \mapsto f(u, v)$, où $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point régulier où les deux plans tangents sont distincts.

Définition d'un point régulier d'une courbe plane définie par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, où $F$ est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbf{R}^2$. Tangente, normale. Cas d'une surface.

## 2- Calcul intégral

*En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'effectuer une brève extension du calcul intégral aux intégrales triples mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.*
*Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les notions introduites dans ce chapitre.*

### a) Intégrales doubles

Intégrale double d'une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur une partie compacte définie par des conditions simples (rectangles, secteurs circulaires...).

Aucune connaissance sur l'intégration sur des parties non compactes n'est exigible des étudiants.

Formule de Fubini : expressions de l'intégrale double sur un rectangle à l'aide de deux intégrations successives.
Formule de changement de variables dans une intégrale double ; cas du passage en coordonnées polaires.

La démonstration de ces deux résultats est hors programme.

### b) Intégrales curvilignes

Définition d'une forme différentielle $\omega$ de degré 1 de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $U$ de $\mathbf{R}^p$. Définition d'une primitive sur $U$ d'une telle forme ; définition d'une forme exacte sur $U$.

Interprétation en termes de champs de vecteurs.
Écriture $\omega = \sum_{j=1}^{p} a_j \, \mathrm{d}x_j$.

Intégrale curviligne de $\omega$ sur un arc orienté $\Gamma$ de $U$, notation $\int_\Gamma \omega$.

Calcul de l'intégrale curviligne d'une forme exacte à l'aide d'une primitive de $\omega$.

Définition d'une forme de classe $\mathcal{C}^1$ fermée sur $U$. Toute forme de classe $\mathcal{C}^1$ exacte sur $U$ est fermée sur $U$. Réciproque lorsque l'ouvert $U$ est étoilé.

La démonstration de cette réciproque n'est pas exigible des étudiants.