SESSION 2019

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PSI

I - Quelques exemples

1) La fonction g est continue et positive sur $[0,+\infty[$, intégrable sur $[0,+\infty[$ (car négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées). De plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = e^0 - \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 1.$$

Donc, g est une densité sur $[0,+\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g_n\ :\ x \mapsto x^n g(x)$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ car $x^2 g_n(x) = \dfrac{x^{n+2}}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis $m_n(g)$ existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}\,dx = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}\,dx = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}\,dx.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $m_{n+1}(g) = (n+1)m_n(g)$. En tenant compte de $m_0(g) = 1$, on obtient par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m_n(g) = n!.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\varphi_n\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$ d'après un théorème de croissances comparées et donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(\varphi)$ existe dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. En posant $u = \dfrac{x^2}{2}$ et donc $x = \sqrt{2u}$ et $x\,dx = du$, on obtient

$$m_{2p+1}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^{2p}e^{-\frac{x^2}{2}}x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}(2u)^p e^{-u}\,du = \frac{2^p}{\sqrt{2\pi}}m_p(g) = \frac{2^p p!}{\sqrt{2\pi}}.$$

4) Soit $p \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned} m_{2p+2}(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^{2p+1}\times xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[x^{2p+1}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{2p+1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2p}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{2p+1}{2}m_{2p}(\varphi). \end{aligned}$$

En tenant compte de $m_0(\varphi) = 1$, on obtient pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$m_{2p}(\varphi) = \frac{2p-1}{2}\times\frac{2p-3}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times m_0(\varphi) = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)\ldots 2}{2^p((2p)(2p-2)\ldots 2)} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$. Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p}(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}.$$

5) La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ est une densité sur $\mathbb{R}$ mais la fonction $t \mapsto tf(t) = \dfrac{t}{\pi(1+t^2)}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ car équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{\pi t}$. f est un exemple de densité sur $\mathbb{R}$ n'admettant pas de moment d'ordre 1.

II - Théorème de Stone-Weierstrass

6) Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

7) La formule est claire pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour $k \in [\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Donc, pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^{l+1} (1-x)^{n-(l+1)} = nx\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^{l} (1-x)^{n-1-l} \text{ (en posant } l = k-1) \\
&= nx \times 1 \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= nx.
\end{aligned}$$

8) La formule est claire pour $n = 0$ et vraie pour $n = 1$ d'après la question précédente car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$. Soient $n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![2,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
k^2\binom{n}{k} &= \left(k^2 - k + k\right)\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} + n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

et d'autre part, $1^2\binom{n}{1}$. Pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= nx(1-x)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= nx(1-x)^{n-1} + n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + n\sum_{k=2}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n(n-1)x^2\sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^l (1-x)^{n-2-l} + nx\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^l (1-x)^{n-1-l} \\
&= nx + n(n-1)x^2
\end{aligned}$$

9) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + n^2x^2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= nx + n(n-1)x^2 - 2nx \times nx + n^2x^2 = nx - nx^2 = nx(1-x).
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) = -x^2 + x = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4}n.$$

10) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Dans le calcul ci-dessous, si X ou Y est vide, la somme correspondante est nulle par convention.

$$\begin{aligned}|B_n(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\ &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in X}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\end{aligned}$$

Ensuite, d'après la question 6,

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in X}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in X}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\varepsilon\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\varepsilon$$

et d'autre part,

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)\leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$,

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+2\|f\|_\infty\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

11) Si Y est vide, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $|B_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\leqslant 2\varepsilon$. Dorénavant, Y n'est pas vide.

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$,

$$k\in Y\Rightarrow\left|x-\frac{k}{n}\right|\geqslant\alpha\Rightarrow(k-nx)^2\geqslant n^2\alpha^2\Rightarrow\frac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2}\geqslant 1$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\leqslant\frac{1}{n^2\alpha^2}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\in Y}}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{n^2\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant\frac{1}{n^2\alpha^2}\times\frac{n}{4}\ \text{(d'après la question 9)}\\ &=\frac{1}{4n\alpha^2}.\end{aligned}$$

En résumé, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\ |B_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\dfrac{1}{4n\alpha^2}$ puis,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \|B_n-f\|_\infty\leqslant\varepsilon+\frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Puisque $\dfrac{1}{4n\alpha^2}\underset{n\to+\infty}{\to}0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour $n\geqslant n_0$, $\dfrac{1}{4n\alpha^2}\leqslant\varepsilon$. Pour $n\geqslant n_0$, on a $\|B_n-f\|_\infty\leqslant 2\varepsilon$.

III - Le problème des moments sur $[0,1]$

12) Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$.

$$\int_0^1(f(x)-g(x))P(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_0^1x^k(f(x)-g(x))\,dx=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(m_k(f)-m_k(g)\right)=0.$$

13) f et g sont continues sur le segment $[0,1]$ et en particulier bornées sur ce segment. $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$ existent dans $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $h_n = (f-g)P_n$ et $h = (f-g)^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$,

$$(h(x) - h_n(x)| = |f(x) - g(x)|\,|f(x) - g(x) - P_n(x)| \leqslant (\|f\|_\infty + \lg\|_\infty)\,\|f - g - P_n\|_\infty$$

puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|h - h_n\|_\infty \leqslant (\|f\|_\infty + \lg\|_\infty)\,\|f - g - P_n\|_\infty$. Puisque $\|f - g - P_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|h - h_n\|_\infty$. On en déduit que la suite de fonctions (h_n) converge uniformément vers la fonction h sur le segment $[0,1]$. On sait alors que la suite $\left(\int_0^1 h_n(x)\ dx\right)$ converge et a pour limite $\int_0^1 h(x)\ dx$. Plus explicitement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\ dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\ dx.$$

14) D'après les deux questions précédentes, $\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\ dx = 0$. La fonction $(f-g)^2$ est donc une fonction continue et positive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. On sait alors que $(f-g)^2 = 0$ puis que $f = g$.

IV - Transformée de Fourier de la densité gaussienne

15) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{it\xi}\varphi(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel t, $\left|e^{it\xi}\varphi(t)\right| = \varphi(t)$. Donc, $\widehat{\varphi}(\xi)$ existe dans $\mathbb{C}$. Ceci montre que $\widehat{\varphi}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (\xi,t) & \mapsto & e^{it\xi}\varphi(t) \end{array}$ de sorte que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi,t)\ dt$.

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(\xi,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto \Phi(\xi,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(\xi,t) \in \mathbb{R}^2$, $|\Phi(\xi,t)| = \varphi(t)$ où φ est continue par morceaux, positive et intégrable $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $\widehat{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

16) Φ admet de plus sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable Φ définie par :

$$\forall(\xi,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\xi,t) = ite^{it\xi}\varphi(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}e^{it\xi}te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\xi,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\xi,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(\xi,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}(\xi,t)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}|t|e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_1(t)$ où φ_1 est continue par morceaux, positive et intégrable $\mathbb{R}$ car $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}|t|e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $\widehat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme :

$$\forall\xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{it\xi}te^{-\frac{t^2}{2}}\ dt.$$

17) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $t \mapsto e^{it\xi}$ et $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ sont de classe C^1. Une intégration par parties, licite au vu de l'intégrabilité de toutes les fonctions considérées, fournit

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}'(\xi) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[e^{it\xi}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{it\xi}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\ dt\right) \\
&= -\frac{\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \text{ (car } \left|e^{it\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ et donc } e^{it\xi}e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to\pm\infty}{\rightarrow} 0) \\
&= -\xi\widehat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{\varphi}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + \xi y = 0$.

18) On note déjà que $\widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\ dt = 1$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}'(\xi) + \xi\widehat{\varphi}(\xi) = 0 &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}'(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}} + \xi\widehat{\varphi}(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}} = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left(\widehat{\varphi}e^{\frac{\xi^2}{2}}\right)'(\xi) = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}} = \widehat{\varphi}(0)e^0 \\
&\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.
\end{aligned}$$

V - Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

19) f est continue sur $]0, +\infty[$ de plus, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\ln(x)\left(1+\frac{1}{2}\ln(x)\right)}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, l'exposant tend vers $-\infty$ et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 = f(0).$$

Ceci montre que f est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, f est positive sur $[0, +\infty[$. Enfin, en posant $u = \ln(x)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\ du = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\ du = 1.$$

f est une densité sur $[0, +\infty[$.

20) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n f(x)\sin(2\pi\ln(x))$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Puisque pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|x^n f(x)\sin(2\pi\ln(x))| \leqslant x^n f(x)$ et que la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, admet un moment d'ordre n, I_n existe. Ensuite, toujours en posant $u = \ln(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{n\ln(x)-\frac{(\ln(x))^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{nu-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\ du \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{nu-\frac{u^2}{2}}e^{2i\pi u}\ du\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(2\pi-in)u}e^{-\frac{u^2}{2}}\ du\right)
\end{aligned}$$

21) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(2\pi-in)u}e^{-\frac{u^2}{2}}\ du = \widehat{\varphi}(2\pi - in) = e^{-\frac{(2\pi-in)^2}{2}}$ d'après le résultat admis dans la question 18 puis

$$I_n = \mathrm{Im}\left(e^{-\frac{(2\pi-in)^2}{2}}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}}e^{2i\pi n}\right) = e^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}}\sin(2n\pi) = 0.$$

22) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. g_α est continue sur $]0, +\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g_\alpha(0) = 0$ (on note encore g_α le prolongement) car pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|x^n f(x)\sin(2\pi\ln(x))| \leqslant x^n f(x)$ et car $x^n f(x) \underset{x\to 0,\ x>0}{\longrightarrow} 0$. Ensuite, toutes les intégrales considérées étant convergentes,

$$m_n\left(g_\alpha\right) = \int_0^{+\infty} x^n g_\alpha(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\ dx + \alpha I_n = m_n(f).$$

En particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = 1$. Donc, g_α convient si et seulement si $\alpha \neq 0$ et g_α est positive ce qui équivaut à $\alpha \in [-1, 0[\cup]0, 1]$.

