Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PC

I - Préliminaires

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}$ de sorte que $R = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de terme général $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge. On en déduit que $R(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Ceci montre que la fonction R est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $\left|\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et donc $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et donc la série de terme général $\|u_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Ainsi, la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. De plus, chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction R est continue sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Ensuite, $\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 à droite et donc la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite. D'autre part, $|f(x)| \underset{x \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, dx$ est une intégrale convergente.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $\left|f(t)e^{-ixt}\right| = |f(t)|$. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$. Ainsi, la fonction $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)e^{-ixt} \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,t)\, dt$.

- pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour tout réel t, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $|\Phi(x,t)| = |f(t)|$ où $|f|$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$,

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II - Etude de la dérivabilité de R en 0

4) Soit $h > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(nh)| \leqslant \dfrac{C}{n^2h^2+1} \leqslant \dfrac{C}{n^2h^2}$. Puisque la série de terme général $\dfrac{C}{n^2h^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de terme général $f(nh)$ est absolument convergente et donc convergente. Donc, $S(h)$ existe dans $\mathbb{C}$.

5) La fonction ϕ_h est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $t \geqslant 0$,

$$|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leqslant \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1}$$

Puisque $\dfrac{t}{h} - 1 \leqslant \left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor \leqslant \dfrac{t}{h}$, on a $\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t}{h}$ puis $\dfrac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{C}{t^2+1}$. Ceci montre que la fonction $t \mapsto \dfrac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et il en est de même de la fonction ϕ_h.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in [nh, (n+1)h[$, on a $n \leqslant \frac{t}{h} < n+1$ et donc $\phi_h(t) = f(nh)$. Par suite, $\int_{nh}^{(n+1)h} \phi_h(t)\ dt = \int_{nh}^{(n+1)h} f(nh)\ dt = hf(nh)$. Mais alors,

$$\int_0^{+\infty} \phi_h(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} \phi_h(t)\ dt = h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = S(h).$$

6) Soient $h \in]0,1]$ et $t \geqslant 1$. Alors, $\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \geqslant \frac{t}{h} - 1$ puis $h\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \geqslant t - h \geqslant t - 1 \geqslant 0$ puis $\left(h\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor\right)^2 \geqslant (t-1)^2$ et donc

$$|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leqslant \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1} \leqslant \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

7) D'autre part, Si $t \in [0,1[$ et $h \in]0,1]$, alors $0 \leqslant \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \leqslant \frac{t}{h} \times h = t \leqslant 1$ et donc $\left|f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)\right| \leqslant C$. En résumé,

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \forall h \in]0,1],\ |\phi_h(t)| \leqslant \left\{\begin{array}{l} C \text{ si } t \in [0,1[\\ \dfrac{C}{1+(t-1)^2} \text{ si } t \in [1,+\infty[\end{array}\right. = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

• Montrons alors que pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels éléments de $]0,1]$ et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(S(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$. Soit donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels éléments de $]0,1]$ et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $h > 0$, $t - h = h\left(\frac{t}{h} - 1\right) \leqslant h\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor \leqslant h\frac{t}{h} = t$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{h\to 0^+} h\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor = t$. Pat continuité de f en t, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0^+} \phi_h(t) = f(t)$. Puisque la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_{h_n}(t) = f(t)$.
Ainsi, la suite de fonctions (ϕ_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$. De plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

En résumé,
- pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction ϕ_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- la suite de fonctions (ϕ_n) converge simplement vers f sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- il existe une fonction φ, continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,+\infty[$, $|\phi_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

D'après le théorème de convergence dominée $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \phi_{h_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} S(h_n) = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.
Ceci étant vrai pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0,1]$ convergeant vers 0, on a montré que

$$\lim_{h\to 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt.$$

8) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{array}\right.$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour $t \neq 0$

$$\left(t^2+1\right)|f(t)| = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\left|\sin\left(t^2\right)\right| \leqslant 2$$

ce qui reste vrai quand $t = 0$. Donc, la fonction f vérifie les conditions de l'énoncé. On en déduit que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \lim_{h\to 0^+} h\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)\right) = \lim_{h\to 0} h\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n^2h^2\right)}{h^2}\right) = \lim_{h\to 0}\left(h + \frac{R\left(h^2\right)}{h}\right),$$

puis que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R\left(h^2\right)}{h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Par suite, $\frac{R(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et finalement

$$R(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi x}{2}}.$$

En particulier, la fonction R n'est pas dérivable en 0 car $\dfrac{R(x) - R(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} \underset{x \to 0^+}{\to} +\infty$.

III - Formule sommatoire de Poisson

9) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(x + 2n\pi)$ et $F_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x - 2n\pi)$ de sorte que $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$. Vérifions que les fonctions F_1 et F_2 sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x + 2n\pi)^2 + 1 > 0$ puis $|f(x + 2n\pi)| \leqslant \dfrac{C_1}{(x + 2n\pi)^2 + 1}$. La série numérique de terme général $\dfrac{C_1}{(x + 2n\pi)^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et donc la série numérique de terme général $f(x + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Donc, $F_1(x)$ existe. La fonction F_1 est définie sur $\mathbb{R}$.
De même, la série numérique de terme général $\dfrac{C_2}{(x - 2n\pi)^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et donc la série numérique de terme général $f(x - 2n\pi)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Donc, $F_2(x)$ existe. La fonction F_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et finalement, la fonction $F = F_1 + F_2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = f(x + 2n\pi)$ de sorte que $F_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant -\dfrac{A}{2}$ et tout $x \in [A, +\infty[$,

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{C_1}{(x + 2n\pi)^2 + 1} \leqslant \frac{C_1}{(A + 2n\pi)^2 + 1}.$$

puis $\|u_n\|_{\infty,[A,+\infty[} \leqslant \dfrac{C_1}{(A + 2n\pi)^2 + 1}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément sur $[A, +\infty[$. Puisque chaque fonction u_n est continue sur $[A, +\infty[$, la fonction F_1 est continue sur $[A, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel A, on a montré que la fonction F_1 est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $v_n(x) = f(x - 2n\pi)$ de sorte que $F_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant \dfrac{A}{2}$ et tout $x \in [A, +\infty[$, on a $x - 2n\pi \geqslant A - 2n\pi \geqslant 0$ puis

$$|v_n(x)| \leqslant \frac{C_1}{(x - 2n\pi)^2 + 1} \leqslant \frac{C_1}{(A - 2n\pi)^2 + 1}.$$

puis $\|v_n\|_{\infty,[A,+\infty[} \leqslant \dfrac{C_1}{(A - 2n\pi)^2 + 1}$. On en déduit que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement et donc uniformément sur $[A, +\infty[$. Puisque chaque fonction v_n est continue sur $[A, +\infty[$, la fonction F_2 est continue sur $[A, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout réel A, on a montré que la fonction F_2 est continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction $F = F_1 + F_2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction $n \mapsto n + 1$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur lui-même,

$$F(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi + 2n\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2(n+1)\pi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2m\pi) = F(x).$$

La fonction F est 2π-périodique.

10) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $G_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ et $G_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{-inx}$ de sorte que $G(x) = G_1(x) + F_2(x)$. Vérifions que les fonctions G_1 et G_2 sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = \widehat{f}(n)e^{inx}$ de sorte que $G_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel, $|u_n(x)| = \widehat{f}(n) \leqslant \dfrac{C_2}{n^2 + 1}$ puis $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{C_2}{n^2 + 1}$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$. Puisque chaque fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction

G_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En conjuguant, on obtient le fait que la fonction G_2 est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et finalement, la fonction G est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$G(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}e^{2in\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} = G(x).$$

Donc, G est 2π-périodique.

11) Les fonctions F et G sont donc des éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Vérifions que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(G) = c_p(2\pi F)$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$. $c_p(G) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}\ dt$. Comme à la question précédente, les séries de fonctions de termes généraux respectifs $t \mapsto \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}$, $n \in \mathbb{N}$, et $t \mapsto \widehat{f}(n)e^{i(-n-p)t}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$. Chacune de ces fonctions étant continue sur $[0, 2\pi]$, on peut intégrer chacune des deux séries de fonctions terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned} c_p(G) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{f}(p)\ dt + \sum_{n\neq p} \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)\left[\frac{e^{i(n-p)t}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi} \\ &= \widehat{f}(p) \end{aligned}$$

Ensuite, $c_p(2\pi F) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+2n\pi)e^{ipt}\right)\ dt = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(t+2n\pi)e^{ipt}\right)\ dt + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(t-2n\pi)e^{ipt}\right)\ dt.$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, posons $f_n(t) = f(t+2n\pi)e^{ipt}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$\left|f(t+2n\pi)e^{ipt}\right| = |f(t+2n\pi)| \leqslant \frac{C_1}{(t+2n\pi)^2+1} \leqslant \frac{C_1}{4n^2\pi^2+1},$$

puis $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{C_1}{4n^2\pi^2+1}$. La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme. De même, on peut intégrer terme à terme la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(t-2n\pi)e^{ipt}$ et on obtient finalement

$$\begin{aligned} c_p(2\pi F) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{ipt}\ dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)e^{ip(u-2n\pi)}\ du = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(u)e^{ipu}\ du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{ipu}\ du = \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(G) = c_p(2\pi F) = \widehat{f}(p)$. Puisque G et $2\pi F$ sont dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, on en déduit que $G = 2\pi F$ d'après le résultat admis par l'énoncé.

12) Soit $a > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f_1(t) = f\left(\dfrac{at}{2\pi}\right)$. La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$|f_1(t)| = \left|f\left(\frac{at}{2\pi}\right)\right| \leqslant \frac{C_1}{\dfrac{a^2t^2}{4\pi^2}+1} = \frac{C_1}{t^2+1} \times \frac{t^2+1}{\dfrac{a^2t^2}{4\pi^2}+1}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2+1}{\dfrac{a^2t^2}{4\pi^2}+1}$ et continue sur $\mathbb{R}$ et a une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$. Donc, cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

Si on note M un majorant de cette fonction sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel t, $|f_1(t)| \leqslant \dfrac{C_1'}{t^2+1}$ où $C_1' = C_1 M$.

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{f_1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right)e^{-ixt}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{-ix\frac{2\pi u}{a}}\ \frac{2\pi}{a}du = \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ puis, comme précédemment, il existe une constante C_2' telle que pour tout réel x, $\left|\widehat{f_1}(x)\right| \leqslant \dfrac{C_2'}{x^2+1}$. On en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_1(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f_1}(n) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

IV - Etude de la dérivabilité de R en π

13) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. $e^{it^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n}}{n!}$ puis

$$f(t) = \frac{1}{t^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n}}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2(n-1)}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!} = i + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!},$$

ce qui reste vrai quand $t = 0$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = i + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}.$$

Puisque f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, f est en particulier de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

14) Pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(t) = \frac{1}{t^2}\left(2ite^{it^2}\right) - \frac{2}{t^3}\left(e^{it^2} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{t^3} + i\frac{e^{it^2}}{t} - \frac{e^{it^2}}{t^3}\right).$$

Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}^*$, $|f'(t)| \leqslant 2\left(\frac{1}{|t|^3} + \frac{|i|\left|e^{it^2}\right|}{|t|} + \frac{\left|e^{it^2}\right|}{t^2}\right) = 2\left(\frac{1}{|t|^3} + \frac{1}{|t|} + \frac{1}{t^2}\right)$. Ceci montre que $\lim_{t \to \pm\infty} f'(t) = 0$.

Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f''(t) = 2\left(-\frac{3}{t^4} - 2e^{it^2} - i\frac{e^{it^2}}{t^2} - 2i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 3\frac{e^{it^2}}{t^4}\right) = -4e^{it^2} - 6i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 6\frac{e^{it^2}}{t^4} - \frac{6}{t^4}.$$

Puisque $\left|e^{it^2}\right| = 1$, $-6i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 6\frac{e^{it^2}}{t^4} - \frac{6}{t^4} \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et finalement,

$$f''(t) \underset{t \to +\infty}{=} -4e^{it^2} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

15) La fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\, dx$. Soit $A > 1$. En posant $t = x^2$ puis en effectuant ne intégration par parties, on obtient

$$\int_1^A e^{ix^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{it}}{i\sqrt{t}}\right]_1^{A^2} + \frac{1}{2i}\int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\, dt\right)$$
$$= \frac{e^{iA^2}}{2iA} - \frac{e^i}{2i} + \frac{1}{4i}\int_1^{A^2} \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\, dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et dominée par $\frac{1}{t^{3/2}}$ en $+\infty$. Puisque $\frac{3}{2} > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\, dt$ converge en $+\infty$. D'autre part, puisque $\left|\frac{e^{iA^2}}{2iA}\right| = \frac{1}{2A}$, $\frac{e^{iA^2}}{2iA}$ tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$ et en particulier converge en $+\infty$. Finalement, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\, dx$ converge en $+\infty$. Par parité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} e^{ix^2}\, dx$ est aussi une intégrale convergente et finalement

$$\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\, dx \text{ est convergente.}$$

16) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soient A et B deux réels tels que $A < B$. Une intégration par parties fournit

$$\int_A^B f(t)e^{-itx}\, dt = \left[-\frac{1}{ix}f(t)e^{-itx}\right]_A^B + \frac{1}{ix}\int_A^B f'(t)e^{-itx}\, dt.$$

Puisque $\left|-\dfrac{1}{ix}f(t)e^{-itx}\right| = \dfrac{|f(t)|}{x}$ et que $|f(t)| \underset{t\to\pm\infty}{\rightarrow} 0$, on en déduit $-\dfrac{1}{ix}f(t)e^{-itx} \underset{t\to\pm\infty}{\rightarrow} 0$. Quand A tend vers $+\infty$ et B tend vers $-\infty$, on obtient

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,dt = \frac{1}{ix}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}\,dt = -\frac{i}{x}\widehat{f'}(x).$$

En appliquant ce résultat à la fonction f' et en tenant compte de $f'(t) \underset{t\to\pm\infty}{\rightarrow} 0$, on obtient

$$\widehat{f}(x) = \left(-\frac{i}{x}\right)\left(-\frac{i}{x}\right)\widehat{f''}(x) = -\frac{1}{x^2}\widehat{f''}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}\,dt.$$

D'après la question 14, $f''(t) = -4e^{it^2} + g(t)$ où $g(t) \underset{t\to\pm\infty}{\rightarrow} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ de sorte que g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Ensuite, en posant $u = t - \dfrac{x}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}e^{-itx}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(t-\frac{x}{2}\right)^2 - i\frac{x^2}{4}}\,dt = e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2}\,du = Ie^{-i\frac{x^2}{4}}.$$

Finalement,

$$x^2\left|\widehat{f}(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-4e^{it^2} + g(t)\right)e^{-itx}\,dt\right| = \left|Ie^{-i\frac{x^2}{4}} + \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx}\,dt\right| \leqslant |I| + \int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|\,dt.$$

Ceci montre que $\widehat{f}(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

17) Soit $x > 0$.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(n\sqrt{x}\right) = i + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in^2x} - 1}{n^2x} = i + 2\frac{F(x) - F(0)}{x}.$$

Maintenant, f étant paire, le changement de variables $u = -t$ montre que $\widehat{f}$ est paire. D'après la formule sommatoire de Poisson,

$$\begin{aligned} i + 2\frac{F(x) - F(0)}{x} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(n\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{\widehat{f}(0)}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

et finalement

$$F(x) = F(0) + \frac{\widehat{f}(0)}{2}\sqrt{x} - \frac{i}{2}x + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right).$$

Ensuite, une intégration par parties fournit

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{e^{it^2} - 1}{t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{2ite^{it^2}}{t}\,dt = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\,dt = 2iI.$$

Ensuite, puisque $\widehat{f}(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, il existe $A > 0$ et $M > 0$ tels que, pour $t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant \dfrac{M}{t^2}$. Soit alors $x \in \left]0, \dfrac{4\pi^2}{A^2}\right]$. On a donc $\dfrac{2\pi}{\sqrt{x}} \geqslant A$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2n\pi}{\sqrt{x}} \geqslant A$. Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{4\pi^2}{A^2}\right]$, on a donc

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} M\left(\frac{\sqrt{x}}{2n\pi}\right)^2 = \frac{Mx}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Ceci montre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to0^+}{=} O(x)$ puis que

$$F(x) \underset{x\to0^+}{=} F(0) + iI\sqrt{x} - \frac{i}{2}x + O\left(x^{3/2}\right).$$

18) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 est pair si et seulement si n est pair et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{in^2\pi} = e^{in\pi} = (-1)^n$ puis

$$\begin{aligned}F(x+\pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{in^2x}}{n^2} = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{i(2p+1)^2x}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2p)^2x}}{(2p)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2p)^2x}}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i(2p)^2x}}{(2p)^2} \\ &= -F(x) + \frac{2}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{i4p^2x}}{p^2} = -F(x) + \frac{1}{2}F(4x).\end{aligned}$$

19) On note que $R = \mathrm{Im}(F)$. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}F(\pi+x) &= -F(x) + \frac{1}{2}F(4x) \\ &\underset{x\to 0^+}{=} -\left(F(0) + iI\sqrt{x} - \frac{i}{2}x + O\left(x^{3/2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(F(0) + 2iI\sqrt{x} - 2ix + O\left(x^{3/2}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0^+}{=} -\frac{F(0)}{2} - \frac{i}{2}x + o(x) \quad (*)\end{aligned}$$

Puisque $F(0)$ est réel et que $R(\pi) = 0$, en passant à la partie imaginaire dans $(*)$, on obtient

$$\begin{aligned}R(\pi+x) &= \mathrm{Im}(F(\pi+x)) \\ &\underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{Im}\left(-\frac{F(0)}{2} - \frac{i}{2}x + o(x)\right) \underset{x\to 0^+}{=} -\frac{x}{2} + o(x) \\ &\underset{x\to 0^+}{=} R(\pi) - \frac{x}{2} + o(x).\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto R(\pi+x)$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 à droite et donc la fonction R est dérivable en π à droite et de plus $R'(\pi) = -\dfrac{1}{2}$.

