Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaires

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $m \in [\![1, n]\!]$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k<m} kP(X = k) + \sum_{k=m}^{n} kP(X = k) \text{ (si } m = 1, \text{ la première somme est vide et donc sa valeur est } 0)$$
$$\leqslant \sum_{k<m} (m-1) \times 1 + n \sum_{k=m}^{n} P(X = k) = m - 1 + nP(X \geqslant m) \text{ (y compris si } m = 1).$$

2) L'inégalité est claire quand $n = 1$. Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue et croissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[\![k-1, k]\!]$, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=2}^{n} \ln k \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \, dt = \int_{1}^{n} \ln t \, dt = (n \ln n - n) - (1 \ln 1 - 1)$$
$$= n \ln n - n + 1.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geqslant n \ln n - n + 1$ et donc $n! \geqslant e^{n \ln n - n + 1} = e\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \geqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!.$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble U_n est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et donc U_n admet dans $\mathbb{R}$ une borne inférieure et une borne supérieure. On en déduit l'existence dans $\mathbb{R}$ de $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$. Ainsi, les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\underline{u}_n$ est un minorant de $U_{n+1} = \{u_k, \ k \geqslant n+1\}$ et $\underline{u}_{n+1}$ est le plus grand de ces minorants. Donc, $\underline{u}_n \leqslant \underline{u}_{n+1}$. La suite $\underline{u}$ est donc croissante. De même, la suite $\overline{u}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\underline{u}_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant \overline{u}_1$. Donc, la suite $\underline{u}$ est croissante et majorée par $\overline{u}_1$. On en déduit que la suite $\underline{u}$ est convergente. De même, la suite $\overline{u}$ est décroissante et minorée par $\underline{u}_1$ et donc, la suite $\overline{u}$ est convergente.

4) Soit v une suite définie sur $\mathbb{N}^*$, décroissante et plus grande que u. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{u}_n \leqslant v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \geqslant n$, $v_n \geqslant v_k \geqslant u_k$. Donc, v_n est un majorant de l'ensemble U_n. Puisque $\overline{u}_n$ est le plus petit des majorants de U_n, on en déduit que $v_n \geqslant \overline{u}_n$. On a montré que la suite v est plus grande que la suite $\overline{u}$.

Soit v une suite définie sur $\mathbb{N}^*$, croissante et plus petite que u. Alors, $-v$ est une suite décroissante et plus grande que $-u$. On en déduit que $-v$ est plus grande que $\overline{(-u)} = -\underline{u}$ puis que v est plus petite que $\underline{u}$.

5) Soit v une suite plus grande que u. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\overline{v}_n$ est un majorant de V_n et donc de U_n. On en déduit que $\overline{v}_n \geqslant \overline{u}_n$. Ainsi, la suite $\overline{v}$ est plus grande que la suite $\overline{u}$. De même, la suite $\underline{u}$ est plus petite que la suite $\underline{v}$.
Puisque les suites $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont convergentes, quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} \overline{v}_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} v_n,$$

et aussi $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} v_n$.

6) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n$. Si les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont adjacentes, alors les $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont convergentes et ont même limite. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite u converge et que $\lim_{n\to+\infty} u = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$.

Réciproquement, supposons la suite u convergente et notons ℓ sa limite. On sait déjà que la suite $\underline{u}$ est croissante, la suite $\overline{u}$ est décroissante. Donc, les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont adjacentes si et seulement si la suite $\overline{u}-\underline{u}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour $k \geqslant n_0$, $\ell - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant u_k \leqslant \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$. $\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$ est donc un majorant de U_{n_0} et on en déduit que $\overline{u}_{n_0} \leqslant \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$. De même, $\underline{u}_{n_0} \geqslant \ell - \dfrac{\varepsilon}{2}$ puis, la suite $\underline{u}$ étant plus petite que la suite $\overline{u}$,

$$0 \leqslant \overline{u}_{n_0} - \underline{u}_{n_0} \leqslant \varepsilon.$$

Maintenant, la suite $\overline{u}-\underline{u}$ est positive et décroissante en tant que somme de deux suites décroissantes. Par suite, pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \overline{u}_n - \underline{u}_n \leqslant \overline{u}_{n_0} - \underline{u}_{n_0} \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |\overline{u}_n - \underline{u}_n| \leqslant \varepsilon)$. La suite $\overline{u}-\underline{u}$ converge vers 0 et donc les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont adjacentes. Mais alors, de nouveau, $\lim\limits_{n\to+\infty} u = \lim\limits_{n\to+\infty} \underline{u}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u}_n$.

7) Par définition, $m = nq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant n-1$. D'autre part, puisque $m \geqslant 2n$, on a $q \geqslant 2$ et donc aussi $q - 1 \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite u est sous-additive,

$$u_m = u_{(q-1)n+n+r} \leqslant u_{(q-1)n} + u_{n+r} \leqslant \underbrace{u_n + \ldots + u_n}_{q-1 \text{ termes}} + u_{n+r} = (q-1)u_n + u_{n+r}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{u_m}{m} &\leqslant \frac{(q-1)u_n + u_{n+r}}{m} = \frac{n(q-1)}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+r}}{m} = \frac{m-n-r}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+r}}{m} \\ &\leqslant \frac{m-n-r}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_{n+r},\ r \in [\![0, n-1]\!]\}}{m}.\end{aligned}$$

8) En particulier, quand $n = 1$, pour tout $m \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-1}{m} \times \frac{u_1}{1} + \frac{u_1}{m} \leqslant u_1 + u_1 = 2u_1$$

ce qui reste vrai quand $m = 1$. Donc, la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $m \geqslant 2n$, on a

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-(2n-1)}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_{n+r},\ r \in [\![0, n-1]\!]\}}{m}.$$

Par passage à la limite supérieure (d'après la question 5)), on obtient

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} &\leqslant \overline{\lim_{m\to+\infty}} \left(\frac{m-(2n-1)}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_{n+r},\ r \in [\![0, n-1]\!]\}}{m}\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{m-(2n-1)}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_{n+r},\ r \in [\![0, n-1]\!]\}}{m}\right) \text{ (d'après la question 6))} \\ &= \frac{u_n}{n}.\end{aligned}$$

9) On en déduit encore, par passage à la limite inférieure, que $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$ et donc $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m} = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$ (car d'autre part, $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{u_m}{m} \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{u_n}{n}$).

Donc, si pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, les suites $\underline{v}$ et $\overline{v}$ sont adjacentes. D'après la question 6), la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

C. Une application probabiliste

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(X_1 < x) = 1$. Alors, puisque les X_k ont mêmes lois, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_k < x) = 1$. Ensuite,

$$(\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k < x) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k < x \Rightarrow Y_n < x$$

et donc $\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k < x\} \subset \{Y_n < x\}$ puis, les variables X_k étant indépendantes,

$$P(Y_n < x) \geqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k < x\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 1) = 1$$

et finalement $P(Y_n < x) = 1$.

De même, si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X_k \geqslant x$, alors $Y_n \geqslant x$ et donc $\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \geqslant x\} \subset \{Y_n \geqslant x\}$. Si $P(X_1 \geqslant x) > 0$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X_k \geqslant x) > 0$ puis

$$P(Y_n \geqslant x) \geqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k \geqslant x\}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \geqslant x) > 0.$$

11) Si $Y_m \geqslant x$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x$, alors

$$Y_{m+n} = \frac{1}{m+n}\sum_{k=1}^{m+n} X_k = \frac{m}{m+n} \times \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_k + \frac{n}{m+n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant \frac{m}{m+n}x + \frac{n}{m+n}x = x,$$

et donc $\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\} \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}$.

D'après le lemme des coalitions, les variables $Y_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes. D'après la question précédente,

$$P(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant P\left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) = P(Y_m \geqslant x)\, P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right).$$

Maintenant, les variables $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = Y_n$ ont mêmes lois et donc

$$P(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x)\, P(Y_n \geqslant x).$$

12) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = -\ln(P(Y_n \geqslant x))$. La suite u est positive puis, d'après la question précédente, pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$u_{m+n} = -\ln(P(Y_{m+n} \geqslant x)) \leqslant -\ln(P(Y_m \geqslant x)\, P(Y_n \geqslant x)) = -\ln(P(Y_m \geqslant x)) - \ln(P(Y_n \geqslant x)) = u_m + u_n.$$

Donc, la suite u est sous-additive. D'après la question 9), la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel positif ℓ. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -\dfrac{\ln(P_n \geqslant x)}{n}$ et donc

$$(P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}} = e^{-v_n}.$$

On en déduit que la suite $\left((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $e^{-\ell} \in]0,1]$.

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

13) Pour $s \in [\![1, pq+1]\!]$, notons $(\mathscr{P})_s$ la propriété de l'énoncé.

- Supposons qu'il n'y ait qu'une pile. Soient z une valeur de cette pile puis $b_1 = z$. La suite (b_1) convient.
- Soit $s \in [\![1, pq]\!]$. Supposons $(\mathscr{P}_s)$. Considérons alors une configuration à $s+1$ piles et notons z la valeur d'un jeton de la $s+1$ pile. Notons a' la suite obtenue à partir de la suite a en supprimant tous les jetons de la $s+1$-ème pile. Posons $b_{s+1} = z$. Par construction, il existe une valeur de la s-ème pile qui est supérieure à z car sinon, on n'aurait pas posé le jeton sur la $s+1$-ème pile. Notons b_s cette valeur. Par hypothèse de récurrence appliquée à la suite a' (le nombre $pq+1$ de jetons n'intervenant pas dans cette récurrence), il existe une suite $(b_1, \ldots, b_s)$ répondant

aux conditions de l'énoncé. Mais alors, la suite $(b_1, \dots, b_s, b_{s+1})$ convient.

Le résultat est démontré par récurrence.

Remarque. Directement et sans récurrence, si $s \geqslant 2$, la suite constituée des sommets des $s-1$ premières piles et de $b_s = z$ convient.

14) Si l'une des piles contient au moins $p+1$ éléments, alors les valeurs de cette pile, lues de bas en haut constituent une suite croissante extraite de a de longueur au moins $p+1$. Sinon, toutes les piles contiennent au plus p jetons. Mais alors, le nombre s de piles est supérieur ou égal à $q+1$ car, dans le cas contraire, le nombre de jetons serait inférieur ou égal à pq ce qui est faux. La question précédente fournit dans ce cas, une suite décroissante extraite de a de longueur $s \geqslant q+1$.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

15) Soit $\omega \in \Omega$. $\omega \in \{A_1 = 1\} \cap \{A_2 = 1\} \Leftrightarrow B(\omega)(1) = B(\omega)(2) = 1$ ce qui est impossible. Donc, $\{A_1 = 1\} \cap \{A_2 = 1\} = \varnothing$ puis $P(\{A_1 = 1\} \cap \{A_2 = 1\}) = 0$.
Il est d'autre part clair que $P(\{A_1 = 1\}) \times P(\{A_2 = 1\}) \neq 0$ car il existe au moins une permutation σ telle que $\sigma(1) = 1$ et une permutation σ' telle que $\sigma'(2) = 1$.

Donc, $P(\{A_1 = 1\} \cap \{A_2 = 1\}) \neq P(\{A_1 = 1\}) \times P(\{A_2 = 1\})$ et on en déduit que les variables $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas indépendantes.

16) Soit $E = \{\sigma \in \mathscr{S}_n / \ \sigma(s_1) < \dots < \sigma(s_k)\}$. Alors, puisque B suite la loi uniforme,

$$P(A^s) = P(B \in E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(S_n)} = \frac{\text{card}(E)}{n!}.$$

Déterminons le cardinal de E. Pour construire un élément σ de E, on commence par choisir k éléments dans $[\![1, n]\!]$. Il y a $\binom{n}{k}$ tels choix. On ordonne ces k valeurs dans l'ordre croissant : ce sont les valeurs attribuées à $A_{s_1}, \dots, A_{s_k}$. Il reste $(n-k)$ éléments de $[\![1, n]\!]$ pour les autres A_i qui peuvent être permutées de $(n-k)!$ façons. Au total

$$\text{card}(E) = \binom{n}{k} \times (n-k)! = \frac{n!}{k!},$$

et donc

$$P(A^s) = \frac{n!/k!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

17) Soit $\begin{array}{cccc} \varphi : & S_n & \rightarrow & S_n \\ & \sigma & \mapsto & (\sigma(n), \dots, \sigma(1)) \end{array}$. φ est involutive et donc φ est une permutation de S_n.

On a $C_n(\Omega) = D_n(\Omega) = [\![1, n!]\!]$. Soit $k \in [\![1, n!]\!]$. Si σ est une permutation telle que la longueur de la plus longue liste croissante extraite de σ est k, alors $\varphi(\sigma)$ est une permutation telle que la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de $\varphi(\sigma)$ est k et réciproquement. Il y a donc autant de permutations σ telle que la longueur de la plus longue liste croissante extraite de σ est k que de permutations σ telle que la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de σ est k. Puisque B suit la loi uniforme, on en déduit que

$$P(C_n = k) = P(D_n = k).$$

Ceci montre que C_n et D_n suivent la même loi.

Soit $p = E\left(\sqrt{n-1}\right)$. Alors, $p \leqslant \sqrt{n-1} < p+1$ puis $1 + p^2 \leqslant n < 1 + (p+1)^2$. Posons $m = 1 + p^2$. Donc, $n \geqslant m$. D'après la question 14, pour tout σ de $\mathscr{S}_n$, la liste $(\sigma(1), \dots, \sigma(m))$, et donc aussi σ, contient au moins une suite extraite croissante de longueur $p+1$ et une suite extraite décroissante de longueur 1 ou une suite extraite décroissante de longueur $p+1$ et une suite extraite croissante de longueur 1. L'événement $C_n + D_n \geqslant p+2$ est donc l'événement certain.

D'après l'inégalité de Markov,

$$1 = P(C_n + D_n \geqslant p+2) \leqslant \frac{E(C_n + D_n)}{p+2} = \frac{2E(C_n)}{p+2}$$

car C_n et D_n ont même loi, et donc

$$E(C_n) \geqslant \frac{p+2}{2}$$

Maintenant, $(p+2)^2 = p^2 + 4p + 4 = p^2 + 2p + 1 + 3 = (p+1)^2 + 3 > \left(\sqrt{n-1}\right)^2 + 3 = n + 2 > n$ et donc $p + 2 > \sqrt{n}$. On a montré que

$$E(C_n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

18) Notons S_k l'ensemble des listes strictement croissantes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ de k éléments de $[\![1, n]\!]$. S_k est en bijection avec l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$ et donc $\text{card}(S_k) = \binom{n}{k}$.

Maintenant, $\{C_n \geqslant k\} \subset \bigcup_{s \in S_k} A^s$ et donc, d'après la question 16),

$$P(C_n \geqslant k) \leqslant P\left(\bigcup_{s \in S_k} A^s\right) \leqslant \sum_{s \in S_k} P(A^s) = \frac{1}{k!}\text{card}(S_k) = \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

19) Si $\alpha e\sqrt{n}$ n'est pas entier, soit $k = E\left(\alpha e\sqrt{n}\right) + 1$. Alors, k est un entier naturel non nul (car $\alpha e\sqrt{n} \geqslant 0$) vérifiant $k - 1 < \alpha e\sqrt{n} < k$ et en particulier, $k - 1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$.
Si $\alpha e\sqrt{n}$ est un entier, nécessairement non nul car $\alpha e\sqrt{n} > 0$, $k = \alpha e\sqrt{n}$ est un entier naturel non nul tel que $k - 1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$.

Dans tous les cas, on a montré l'existence d'un entier naturel non nul k tel que $k - 1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$. k est ainsi dorénavant défini. Dans tous les cas, k est le plus petit entier supérieur ou égal à $\alpha e\sqrt{n}$.

Puisque C_n est une variable à valeur entière, $\left\{C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}\right\} = \{C_n \geqslant k\}$ puis, si $k \leqslant n$, d'après la question 18,

$$\begin{aligned}
P\left(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}\right) &= P(C_n \geqslant k) = \frac{\binom{n}{k}}{k!} = \frac{1}{k!^2} \times n(n-1)\ldots(n-k+1) \\
&\leqslant \left(\left(\frac{e}{k}\right)^k\right)^2 n^k \text{ (d'après la question 2)} \\
&= \left(\frac{e\sqrt{n}}{k}\right)^{2k} \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k} \quad \text{(par croissance sur } [0, +\infty[\text{ (de } t \mapsto t^{2k} \text{ et car } \frac{e\sqrt{n}}{k} \leqslant \frac{1}{\alpha}) \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}} \quad \text{(par décroissance de } t \mapsto \left(\frac{1}{\alpha}\right)^t \text{ car } \frac{1}{\alpha} < 1).
\end{aligned}$$

Sinon, $k \geqslant n + 1$ et donc $P(C_n \geqslant k) = 1$ et dans ce cas, l'inégalité proposée est clairement fausse. On note tout de même que, α étant fixé, pour n grand, on a $\alpha e\sqrt{n} \leqslant n$ et donc $k \leqslant n$.

20) On suppose que α et n sont tels que $\alpha e\sqrt{n} \leqslant n$. On applique la question 1) quand m est l'entier k de la question précédente. On obtient

$$E(C_n) \leqslant k - 1 + nP(C_n \geqslant k) \leqslant \alpha e\sqrt{n} + n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}.$$

On choisit $\alpha = \alpha_n = 1 + n^{-1/4}$. α est un réel strictement supérieur à 1 et pour n grand, on a $\alpha e\sqrt{n} \leqslant n$ car $\frac{\alpha_n e\sqrt{n}}{n} \sim \frac{e}{\sqrt{n}} \to 0$. Pour n grand, on obtient

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \left(1 + n^{-1/4}\right)e + \varepsilon_n$$

où $\varepsilon_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{1 + n^{-1/4}}\right)^{2\left(1+n^{-1/4}\right)e\sqrt{n}}$.

Or,

$$\begin{aligned}
\ln(\varepsilon_n) &= \frac{1}{2}\ln n - 2\left(1 + n^{-1/4}\right)e\sqrt{n}\ln\left(1 + n^{-1/4}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{2}\ln n - 2en^{1/4} + o\left(n^{1/4}\right) \\
&\underset{n \to +\infty}{=} -2en^{1/4} + o\left(n^{1/4}\right) \text{ (d'après un théorème de croissances comparées)} \\
&\underset{n \to +\infty}{\to} -\infty,
\end{aligned}$$

et donc $\varepsilon_n = \exp\left(\frac{1}{2}\ln n - 2\left(1+n^{-1/4}\right)e\sqrt{n}\ln\left(1+n^{-1/4}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

D'après les questions 5 et 6, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{E\left(C_n\right)}{\sqrt{n}}$ existe puis

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{E\left(C_n\right)}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left(\left(1+n^{-1/4}\right)e+\varepsilon_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+n^{-1/4}\right)e+\varepsilon_n\right) = e.$$

