

A. Préliminaires sur les matrices

1) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

• Supposons que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S puis E un vecteur propre unitaire associé. $E^T S E = E^T (\lambda E) = \lambda (E^T E) = \lambda \|E\|_2^2 = \lambda$. Puisque $E \neq 0$, on en déduit que

$$\lambda = E^T S E > 0.$$

Ceci montre que le spectre de S est contenu dans \mathbb{R}^+ .

• Supposons que le spectre de S soit contenu dans \mathbb{R}^+ . Posons $S = P D P^T$ où $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in D_n(]0, +\infty[)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ puis $X' = P^{-1} X = P^T X = (x'_i)_{1 \leq i \leq n}$. Puisque $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $X' \neq 0$ puis

$$X^T S X = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D (P^T X) = X'^T D X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2 > 0$$

car tous les termes de la somme sont positifs, l'un au moins d'entre eux étant strictement positif. Ceci montre que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Posons $P D P^T$ où $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in D_n(]0, +\infty[)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$.

$$S = P D P^T = P D'^2 P^T = P D' D'^T P^T = (P D') (P D')^T = R^T R$$

où la matrice $R = (P D')^T = D' P^T$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles. On a montré que

$$\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \exists R \in GL_n(\mathbb{R}) / S = R^T R.$$

Réciproquement, soient $R \in GL_n(\mathbb{R})$ puis $S = R^T R$. S est symétrique réelle car $S^T = R^T (R^T)^T = R^T R = S$. De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$X^T S X = X^T R^T R X = (R X)^T (R X) = \|R X\|_2^2 > 0$$

car $R X \neq 0$ puisque $X \neq 0$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Par suite, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3) Soient $(S, S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ puis $\lambda \in [0, 1]$. Soit $S'' = \lambda S + (1 - \lambda) S'$. S'' est symétrique réelle car $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$X^T S'' X = \lambda X^T S X + (1 - \lambda) X^T S' X > 0$$

car les deux nombres $\lambda X^T S X$ et $(1 - \lambda) X^T S' X$ sont positifs, l'un d'entre eux est strictement positif. Donc, $S'' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ceci montre que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

4) Soit $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{E}$. Alors, $\text{conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.

$$\left((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}, (x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \right) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

• L'hyperplan affine \mathcal{H}' d'équation $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ est un fermé de \mathbb{R}^{n+1} et $[0, +\infty[^{n+1}$ est un fermé de \mathbb{R}^{n+1} en tant que produit de fermés de \mathbb{R} . Donc, $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \cap [0, +\infty[^{n+1}$ est un fermé de \mathbb{R}^{n+1} en tant qu'intersection de fermés de \mathbb{R}^{n+1} . D'autre part, \mathcal{H} est une partie bornée de \mathbb{R}^{n+1} car pour tout $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in \mathcal{H}$, $\|\lambda\|_\infty \leq 1$. \mathcal{H} est donc un fermé, borné de \mathbb{R}^{n+1} qui est de dimension finie et donc \mathcal{H} est un compact de \mathbb{R}^{n+1} d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

• $\mathcal{H} \times K$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{E}$ en tant que produit de compacts.

• L'application ϕ est $2n+2$ linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{E}^{n+1}$ et donc l'application ϕ est continue sur $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{E}^{n+1}$.

• Finalement, $\text{conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$ est un compact de E en tant qu'image directe d'un compact par une application continue.

5) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Posons $k = \|g(e_1)\|$.

Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. $\langle e_1 + e_i, e_1 - e_i \rangle = e_1^2 - e_i^2 = 1 - 1 = 0$. Mais alors $\langle g(e_1 + e_i), g(e_1 - e_i) \rangle = 0$. Ceci fournit $(g(e_i))^2 = (g(e_1))^2$ puis $\|g(e_i)\| = k$.

Soit alors $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Puisque la famille $(g(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale,

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i g(e_i), \sum_{j=1}^n x_j g(e_j) \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|g(e_i)\|^2 \\ &= k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

et donc, $\|g(x)\| = k\|x\|$.

Si $k = 0$, alors $g = 0 = 0 \circ \text{Id}_E$. Dans ce cas, g est la composée d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal.

Si $k \neq 0$, $\frac{1}{k}g$ conserve la norme. Donc, $\frac{1}{k}g$ est un certain automorphisme orthogonal h ou encore $g = k\text{Id}_E \circ h$ où $h \in O(E)$. Dans ce cas aussi, g est la composée d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal.

6) On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

• $\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

• Soient $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $h : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ A & \mapsto & (A^T, A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{array}$$

g est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. h est continue sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie.

$f = h \circ g$ est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

C. Quelques propriétés de la compacité

7) Soient $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante sur \mathbb{N} puis $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Par hypothèse, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq p, \|v_n - v_p\| \geq \varepsilon$. Si on suppose par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain élément ℓ de E , il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0, \|v_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Mais alors,

$$\|v_{n_0+1} - v_{n_0}\| \leq \|v_{n_0+1} - \ell\| + \|\ell - v_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

8) On montre par l'absurde que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ puis x_1, \dots, x_p élément de K (erreur probable d'énoncé au vu de la suite) tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^p pB(x_i, \varepsilon)$

Le résultat est immédiat si K est vide. On suppose dorénavant que K n'est pas vide.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(u_i)_{1 \leq i \leq p} \in K^p, K \not\subset \bigcup_{i=1}^p B(u_i, \varepsilon)$.

Construisons par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq p, \|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$ (*).

• Puisque $K \neq \emptyset$, on peut choisir $x_0 \in K$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons avoir construit des éléments $x_k, 0 \leq k \leq n$, de K tels que si $(k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ et $k \neq l$, alors $\|x_k - x_l\| \geq \varepsilon$. Par hypothèse, $K \not\subset \bigcup_{k=0}^n nB(x_k, \varepsilon)$. Donc, il existe un élément x_{n+1} de K n'appartenant pas à $\bigcup_{k=0}^n nB(x_k, \varepsilon)$ ou encore vérifiant pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \|x_{n+1} - x_k\| \geq \varepsilon$.

On a construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq p$, $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

Puisque K est compact, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente ce qui contredit le résultat établi à la question précédente.

On a montré par l'absurde que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et x_1, \dots, x_p des éléments de K tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

9) Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_\alpha \in K$ tel que, pour tout $i \in I$, $B(x_\alpha, \alpha) \not\subset \Omega_i$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que, pour tout $i \in I$, $B\left(x_n, \frac{1}{n+1}\right) \not\subset \Omega_i$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite du compact K . On peut en extraire une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, de limite $y \in K$.

$y \in K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ et donc il existe $i_0 \in I$ tel que $y \in \Omega_{i_0}$ puis, puisque Ω_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset \Omega_{i_0}$.

Les deux suites $\left(\frac{1}{\varphi(n)+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\|y_n - y\|)_{n \in \mathbb{N}}$. On choisit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\varphi(n_0)+1} \leq \frac{r}{4}$ et $\|y_{n_0} - y\| \leq \frac{r}{4}$.

Soit $z \in B\left(y_{n_0}, \frac{1}{\varphi(n_0)+1}\right)$.

$$\|z - y\| \leq \|z - y_{n_0}\| + \|y_{n_0} - y\| \leq \frac{1}{\varphi(n_0)+1} + \frac{r}{4} \leq \frac{r}{2} < r$$

et donc $B\left(x_{\varphi(n_0)}, \frac{1}{\varphi(n_0)+1}\right) \subset B(y, r) \subset \Omega_{i_0}$ ce qui est une contredit le fait que pour tout $i \in I$, $B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)+1}\right) \not\subset \Omega_i$.

On a montré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha) \subset \Omega_i$. D'après la question précédente, on peut choisir $p \in \mathbb{N}^*$ puis x_1, \dots, x_p éléments de K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha) \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$.

10) Pour $i \in I$, posons $\Omega_i = {}^c F_i$ de sorte que pour tout i de I , Ω_i est un ouvert de E . Par hypothèse, $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Par passage au complémentaire, $K \subset E = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ puis $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$

tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$ ou encore $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset {}^c K$. Puisque les F_{i_k} sont des parties de K , on a aussi $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset K$ et donc

$\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset K \cap {}^c K = \emptyset$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de MARKOV-KAKUTANI

11) Soit $x \in E$. Soit $f : \mathcal{L}(E) \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathcal{L}(E) \mapsto E$ et $h : E \mapsto \mathbb{R}$. g est continue sur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \mapsto & \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \mapsto & \|\mathbf{u}(x)\| \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \mapsto & E \\ \mathbf{u} & \mapsto & \mathbf{u}(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E & \mapsto & \mathbb{R} \\ \mathbf{y} & \mapsto & \|\mathbf{y}\| \end{array}$$

l'espace de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ car linéaire et on sait que h est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Donc, $f = h \circ g$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.

$\{\|\mathbf{u}(x)\|, \mathbf{u} \in G\} = f(G)$ est un compact de \mathbb{R} en tant qu'image d'un compact de $\mathcal{L}(E)$ par l'application continue f . De plus, G est non vide (car G est un groupe) et donc $\{\|\mathbf{u}(x)\|, \mathbf{u} \in G\}$ est non vide. Un compact étant borné, on en déduit que $\{\|\mathbf{u}(x)\|, \mathbf{u} \in G\}$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . Donc, $N_G(x)$ existe.

Vérifions que N_G est une norme sur E .

- D'après le début de la question, N_G est une application de E dans \mathbb{R}^+ .

- Soit $x \in E$. Si $N_G(x) = 0$, alors $\forall \mathbf{u} \in G$, $\|\mathbf{u}(x)\| \leq 0$ puis $\mathbf{u}(x) = 0$. G n'est pas vide et donc il existe $\mathbf{u}_0 \in G$ tel que $\mathbf{u}_0(x) = 0$. Puisque \mathbf{u}_0 est un automorphisme, on en déduit que $x = 0$.

- Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $\mathbf{u} \in G$, $\|\mathbf{u}(\lambda x)\| = |\lambda| \|\mathbf{u}(x)\| \leq |\lambda| N_G(x)$ et donc $N_G(\lambda x) \leq |\lambda| N_G(x)$ (car $N_G(\lambda x)$ est le plus petit des majorants de $\{\|\mathbf{u}(\lambda x), \mathbf{u} \in G\}$). Inversement, si $\lambda = 0$, $|\lambda| N_G(x) \leq N_G(\lambda x)$ et si $\lambda \neq 0$, $N_G(x) = N_G\left(\frac{1}{\lambda} \lambda x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N_G(\lambda x)$ puis de nouveau $|\lambda| N_G(x) \leq N_G(\lambda x)$. Finalement, $N_G(\lambda x) = |\lambda| N_G(x)$.

- Soit $(x, y) \in E^2$. Pour tout $\mathbf{u} \in G$, $\|\mathbf{u}(x+y)\| = \|\mathbf{u}(x) + \mathbf{u}(y)\| \leq \|\mathbf{u}(x)\| + \|\mathbf{u}(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$ et donc $N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$ (car $N_G(x+y)$ est le plus petit des majorants de $\{\|\mathbf{u}(x+y)\|, \mathbf{u} \in G\}$).

On a montré que N_G est une norme sur E .

12)

• Soient $x \in E$ et $u \in G$. $N_G(u(x)) = \sup\{\|v(u(x))\|, v \in G\}$. Pour tout $v \in G$, $v \circ u \in G$ puis $\|v(u(x))\| \leq N_G(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$ et tout $u \in G$, $N_G(u(x)) \leq N_G(x)$. Ensuite, pour $x \in E$ et $u \in G$, $u^{-1} \in G$ et donc $N_G(x) = N_G(u^{-1}(u(x))) \leq N_G(u(x))$. Finalement, pour tout x de D et tout $u \in G$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$.

• Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$. Alors pour tout $u \in G$, $u(x) \neq 0$ car $G \subset GL(E)$.

Puisque, pour tout $z \in E$, l'application $f : \mathcal{L}(E) \mapsto \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$ et que G est un compact de

$$u \mapsto \|u(z)\|$$

$\mathcal{L}(E)$, pour tout $z \in E$, il existe $u_z \in G$ tel que $N_G(z) = \|u_z(z)\|$. Par suite,

$$N_G(x + y) = \|u_{x+y}(x + y)\| \leq \|u_{x+y}(x)\| + \|u_{x+y}(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$$

avec égalité si et seulement si chacune des inégalités écrites est une égalité. Puisque $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne et que $u_{x+y}(x) \neq 0$, l'égalité $\|u_{x+y}(x + y)\| \leq \|u_{x+y}(x)\| + \|u_{x+y}(y)\|$ impose l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $u_{x+y}(y) = \lambda u_{x+y}(x) = u_{x+y}(\lambda x)$. Puisque u_{x+y} est un automorphisme, on en déduit que $y = \lambda x$.

Réciproquement, si $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $N_G(x + y) = N_G((1 + \lambda)x) = (1 + \lambda)N_G(x) = N_G(x) + \lambda N_G(x) = N_G(x) + N_G(y)$.

13) $u^0(x) = x \in K$ puis par récurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u^i(x) \in K$. Puisque K est convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} u^i(x) \in K.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments du compact K . On peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente, vers un certain élément a de K .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u(x_n) - x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^{i+1}(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (u^{i+1}(x) - u^i(x)) = \frac{1}{n} (u^n(x) - x)$. Puisque x et $u^n(x)$

sont dans K ,

$$\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n} \|u^n(x) - x\| \leq \frac{\delta(K)}{n}.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\delta(K)}{\varphi(n)}$. On en déduit que la suite $(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)})$ converge vers 0.

D'autre part, u est un endomorphisme de l'espace E qui est de dimension finie. On en déduit que u est continu sur E et en particulier en a . Donc, la suite $(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)})$ converge aussi vers $u(a) - a$. Finalement, $u(a) = a$.

14) Soit $x \in K$. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u_i(x) \in K$. Puisque K est convexe, on en déduit que $u(x) \in K$. Donc, K est stable par u . D'après la question précédente, il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15) D'après la question 12, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ puis $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(a) = N_G(a)$.

Donc,

$$N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(u(a)) = N_G(a) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)).$$

On en déduit encore $N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$.

Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

$$\begin{aligned} N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) &\leq N_G\left(u_j(a) + \sum_{i \neq j} u_i(a)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right). \end{aligned}$$

Donc, $N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{i \neq j} u_i(a)\right)$.

16) Mais alors, d'après la question 12, si $u_j(\mathbf{a}) \neq 0$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sum_{i \neq j} u_i(\mathbf{a}) = \lambda_j u_j(\mathbf{a})$ ou encore $ru(\mathbf{a}) - u_j(\mathbf{a}) =$

$\lambda_j(\mathbf{a})$ ou enfin, $u(\mathbf{a}) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(\mathbf{a})$.

Le résultat reste clair si $u_j(\mathbf{a}) = 0$ car alors $\mathbf{a} = 0$ (u_j étant un automorphisme).

17) Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. L'égalité $u(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ fournit

$$N_G(\mathbf{a}) = N_G(u(\mathbf{a})) = N_G\left(\frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(\mathbf{a})\right) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G(u_j(\mathbf{a})) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G(\mathbf{a})$$

(d'après la question 12). Si $\mathbf{a} = 0$, \mathbf{a} est un point fixe de chaque élément de G . Sinon, on obtient $\frac{\lambda_j + 1}{r} = 1$ puis $u_j(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Dans tous les cas, \mathbf{a} est un point fixe de u_j .

On a montré que \mathbf{a} est un point fixe u_1, \dots, u_r .

18) Posons $G = (u_i)_{i \in I}$ puis pour $i \in I$, posons $F_i = \{x \in K / u_i(x) = x\} = \text{Ker}(u_i - \text{Id}_E) \cap K$. Pour chaque $i \in I$, F_i est un fermé de E contenu dans K . Si par l'absurde $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, alors d'après la question 10, il existe une sous-famille finie

$(F_{i_1}, \dots, F_{i_r})$ telle que $\bigcap_{i=1}^r F_{i_k} = \emptyset$. Ceci contredit le résultat de la question précédente car toute famille finie d'éléments de G admet un point fixe commun dans K .

Donc, il existe $\mathbf{a} \in K$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$.

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

19) Soit $A \in G \subset GL_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\rho_{A^{-1}}(\rho_A(M)) = (A^{-1})^T A^T M A A^{-1} = M$ et donc $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc, $\rho_A \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $(\rho_A)^{-1} = \rho_{A^{-1}}$.

- Ainsi, $H \subset GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. De plus, I_n est dans le sous-groupe G et donc $\text{Id}_{GL_n(\mathbb{R})} \rho_{I_n} \in H$.
- Il est clair que pour tout $(A, A') \in G^2$, le produit AA' est dans le sous-groupe G puis $\rho_A \circ \rho_{A'} = \rho_{AA'} \in H$.
- Pour tout $A \in G$, A^{-1} est dans le sous-groupe G puis $(\rho_A)^{-1} = \rho_{A^{-1}} \in H$.

Ainsi, H est un sous-groupe de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Comme à la question 6, l'application $\rho : A \mapsto \rho_A$ est la composée d'une application bilinéaire et d'une application linéaire en dimension finie). L'application ρ est donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, $H = \rho(G)$ est un compact de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Finalement, H est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

20) Soit $f : A \mapsto \rho_A(I_n) = A^T A$. f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $\Delta = f(G)$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 2, pour tout $A \in G$, $A^T A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi, Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Mais alors, $K = \text{conv}(\Delta)$ est compact d'après la question 4 et $K = \text{conv}(\Delta)$ est contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 3.

Soit $(A, A') \in G^2$. $\rho_{A'}(A^T A) = A'^T (A^T A) A' = (AA')^T (AA') \in \Delta$ car $AA' \in G$. Donc, Δ est stable par tous les éléments de H . Par linéarité, $K = \text{conv}(\Delta)$ est stable par tous les éléments de H .

21) K est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stable par tous les éléments du groupe H . D'après la question 18, il existe $M \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in G$, $\rho_A(M) = M$.

D'après la question 2, il existe $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = N^T N$. Pour tout $A \in G$,

$$\begin{aligned} A^T M A = M &\Rightarrow A^T N^T N A = N^T N \Rightarrow (N^{-1})^T A^T N^T N A N^{-1} = I_n \Rightarrow (N A N^{-1})^T (N A N^{-1}) = I_n \\ &\Rightarrow N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc, il existe $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in G$, $N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit $G_1 = N G N^{-1}$. G_1 est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ (image du groupe G par le morphisme de groupes $A \mapsto N A N^{-1}$) tel que $G = N^{-1} G_1 N$.

22) $(g \circ \sigma_P \circ g^{-1}) \circ (g \circ \sigma_P \circ g^{-1}) = g \circ \sigma_P^2 \circ g^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Donc, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie.

Notons S_P la matrice de σ_P dans la base canonique de \mathbb{R}^n . La matrice de $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ dans la base canonique est alors $N S_P N^{-1}$. Puisque la base canonique est orthonormée, $S_P \in O_n(\mathbb{R})$. Mais alors, par hypothèse

$$NS_P N^{-1} \in NO_n(\mathbb{R})N^{-1} \subset NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $NS_P N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Puisque la base canonique est orthonormée, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est un automorphisme orthogonal de \mathbb{R}^n et donc une symétrie orthogonale.

Puisque g est un automorphisme, $g(P)$ est un hyperplan de \mathbb{R}^n . Si $x \in g(P)$, il existe $y \in P$ tel que $x = g(y)$ et donc

$$g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(x) = g(\sigma_P(y)) = g(y) = x.$$

Donc, tout x de P est invariant par la symétrie orthogonale $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$. On en déduit que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$ ou $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Mais si $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, alors $\sigma_P = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, ce qui n'est pas. Donc, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$.

Soit $x \in E \setminus 0$. Soit $P = x^\perp$. P est un hyperplan de \mathbb{R}^n et P est constitué des vecteurs orthogonaux à x . Pour tout $y \in P$,

$$\sigma_{g(P)}(g(y)) = g(y)$$

et

$$\sigma_{g(P)}(g(x)) = g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(g(x)) = g(\sigma_P(x)) = -g(x).$$

Donc, puisqu'une réflexion est un automorphisme orthogonal,

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle \sigma_P(g(x)), \sigma_{g(P)}(g(y)) \rangle = \langle -g(x), g(y) \rangle = -\langle g(x), g(y) \rangle,$$

et finalement, $\langle g(x), g(y) \rangle = 0$. Ainsi, l'image de tout vecteur orthogonal à x par g est un vecteur orthogonal à $g(x)$. Ceci montre que g conserve l'orthogonalité.

Puisque g conserve l'orthogonalité, d'après la question 5, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ et $h \in O(\mathbb{R}^n)$ tels que $g = kh$. Puisque $g \in GL(\mathbb{R}^n)$, $k \neq 0$ puis $g^{-1} = \frac{1}{k}h^{-1}$. En notant N' la matrice de h dans la base canonique, $N' \in O_n(\mathbb{R})$ (car la base canonique est orthonormée).

On a alors $NKN^{-1} = kN'K\frac{1}{k}N'^{-1} = N'KN'^{-1}$ et donc $N'KN'^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$ puis $K \subset N'^{-1}O_n(\mathbb{R})N' \subset O_n(\mathbb{R})$. Puisque d'autre part, $O_n(\mathbb{R}) \subset K$, on a montré que

$$K = O_n(\mathbb{R}).$$