Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaires sur les matrices

1) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

• Supposons que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S puis E un vecteur propre unitaire associé. $E^T SE = E^T(\lambda E) = \lambda(E^T E) = \lambda\|E\|_2^2 = \lambda$. Puisque $E \neq 0$, on en déduit que

$$\lambda = E^T SE > 0.$$

Ceci montre que le spectre de S est contenu dans $\mathbb{R}^+$.

• Supposons que le spectre de S soit contenu dans $\mathbb{R}^+$. Posons $S = PDP^T$ où $D = \text{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n\,(]0,+\infty[)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ puis $X' = P^{-1}X = P^T X = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Puisque $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $X' \neq 0$ puis

$$X^T SX = X^T PDP^T X = \left(P^T X\right)^T D\left(P^T X\right) = X'^T DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 > 0$$

car tous les termes de la somme sont positifs, l'un au moins d'entre eux étant strictement positif. Ceci montre que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Posons PDP^T où $D = \text{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in D_n\,(]0,+\infty[)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $D' = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$S = PDP^T = PD'^2P^T = PD'D'^TP^T = (PD')(PD')^T = R^T R$$

où la matrice $R = (PD')^T = D'P^T$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles. On a montré que

$$\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists R \in GL_n(\mathbb{R})/\ S = R^T R.$$

Réciproquement, soient $R \in GL_n(\mathbb{R})$ puis $S = R^T R$. S est symétrique réelle car $S^T = R^T\left(R^T\right)^T = R^T R = S$. De plus, pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$X^T SX = X^T R^T RX = (RX)^T(RX) = \|RX\|_2^2 > 0$$

car $RX \neq 0$ puisque $X \neq 0$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Par suite, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3) Soient $(S, S') \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^2$ puis $\lambda \in [0,1]$. Soit $S'' = \lambda S + (1-\lambda)S'$. S'' est symétrique réelle car $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$X^T S'' X = \lambda X^T SX + (1-\lambda)X^T S'X > 0$$

car les deux nombres $\lambda X^T SX$ et $(1-\lambda)X^T S'X$ sont positifs, l'un d'entre eux est strictement positif. Donc, $S'' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ceci montre que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

4) Soit $\phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} & \to & E \\ \left((\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}, (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}\right) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}$. Alors, $\text{conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.

• L'hyperplan affine $\mathcal{H}'$ d'équation $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $[0,+\infty[^{n+1}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ en tant que produit de fermés de $\mathbb{R}$. Donc, $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \cap [0,+\infty[^{n+1}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^{n+1}$. D'autre part, $\mathcal{H}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^{n+1}$ car pour tout $\lambda = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1} \in \mathcal{H}$, $\|\lambda\|_\infty \leqslant 1$. $\mathcal{H}$ est donc un fermé, borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est de dimension finie et donc $\mathcal{H}$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

• $\mathcal{H} \times K$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+1} \times E$ en tant que produit de compacts.

• L'application ϕ est $2n+2$ linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^{n+1}\times E^{n+1}$ et donc l'application ϕ est continue sur $\mathbb{R}^{n+1}\times E^{n+1}$.

• Finalement, $\mathrm{conv}(K)=\phi(\mathcal{H}\times K^{n+1})$ est un compact de E en tant qu'image directe d'un compact par une application continue.

5) Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E. Posons $k=\|g(e_1)\|$.
Soit $i\in[\![2,n]\!]$. $\langle e_1+e_i,e_1-e_i\rangle=e_1^2-e_i^2=1-1=0$. Mais alors $\langle g(e_1+e_i)),g(e_1-e_i)\rangle=0$. Ceci fournit $(g(e_i))^2=(g(e_1))^2$ puis $\|g(e_i)\|=k$.

Soit alors $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E$. Puisque la famille $(g(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale,

$$\begin{aligned}\|g(x)\|^2&=\langle\sum_{i=1}^{n}x_ig(e_i),\sum_{j=1}^{n}x_jg(e_j)\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\|g(e_i)\|^2\\&=k^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=k^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

et donc, $\|g(x)\|=k\|x\|$.

Si $k=0$, alors $g=0=0\circ \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, g est la composée d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal.

Si $k\neq 0$, $\dfrac{1}{k}g$ conserve la norme. Donc, $\dfrac{1}{k}g$ est un certain automorphisme orthogonal h ou encore $g=k\mathrm{Id}_E\circ h$ où $h\in O(E)$. Dans ce cas aussi, g est la composée d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal.

6) On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$.

• $\forall A\in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2=\sqrt{\mathrm{Tr}(A^TA)}=\sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)}=\sqrt{n}$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de l'espace euclidien $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\langle\ ,\ \rangle)$.

• Soient $f:\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R})&\to&\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\A&\mapsto&A^TA\end{array}$, $g:\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R})&\to&(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2\\A&\mapsto&(A^T,A)\end{array}$ et $h:\begin{array}{ccc}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2&\to&\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\(M,N)&\mapsto&MN\end{array}$.

g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. h est continue sur $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie.

$f=h\circ g$ est donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, $O_n(\mathbb{R})=f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

C. Quelques propriétés de la compacité

7) Soient $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante sur $\mathbb{N}$ puis $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Par hypothèse, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\neq p$, $\|v_n-v_p\|\geqslant\varepsilon$. Si on suppose par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain élément ℓ de E, il existe un rang n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, $\|v_n-\ell\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4}$. Mais alors,

$$\|v_{n_0+1}-v_{n_0}\|\leqslant\|v_{n_0+1}-\ell\|+\|\ell-v_{n_0}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

8) On montre par l'absurde que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ puis $x_1,\ldots,x_p$ élément de K (erreur probable d'énoncé au vu de la suite) tel que $K\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p}B(x_i,\varepsilon)$

Le résultat est immédiat si K est vide. On suppose dorénavant que K n'est pas vide.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et tout $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}\in K^p$, $K\not\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p}B(u_i,\varepsilon)$.

Construisons par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\neq p$, $\|x_n-x_p\|\geqslant\varepsilon$ $(*)$.

• Puisque $K\neq\varnothing$, on peut choisir $x_0\in K$.

• Soit $n\geqslant 0$. Supposons avoir construit des éléments x_k, $0\leqslant k\leqslant n$, de K tels que si $(k,l)\in[\![0,n]\!]^2$ et $k\neq l$, alors $\|x_k-x_l\|\geqslant\varepsilon$. Par hypothèse, $K\not\subset\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}B(x_k,\varepsilon)$. Donc, il existe un élément x_{n+1} de K n'appartenant pas à $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}B(x_k,\varepsilon)$ ou encore vérifiant pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\|x_{n+1}-x_k\|\geqslant\varepsilon$.

On a construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\neq p$, $\|x_n-x_p\|\geqslant\varepsilon$.

Puisque K est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente ce qui contredit le résultat établi à la question précédente.

On a montré par l'absurde que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\ldots,x_p$ des éléments de K tels que $K\subset\bigcup_{i=1}^{p}B(x_i,\varepsilon)$.

9) Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha>0$, il existe $x_\alpha\in K$ tel que, pour tout $i\in I$, $B(x_\alpha,\alpha)\not\subset\Omega_i$. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in K$ tel que, pour tout $i\in I$, $B\left(x_n,\dfrac{1}{n+1}\right)\not\subset\Omega_i$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact K. On peut en extraire une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, de limite $y\in K$.

$y\in K\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ et donc il existe $i_0\in I$ tel que $y\in\Omega_{i_0}$ puis, puisque Ω_{i_0} est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(y,r)\subset\Omega_{i_0}$.

Les deux suites $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\|y_n-y\|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0. On choisit alors $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{\varphi(n_0)+1}\leqslant\dfrac{r}{4}$ et $\|y_{n_0}-y\|\leqslant\dfrac{r}{4}$.

Soit $z\in B\left(y_{n_0},\dfrac{1}{\varphi(n_0)+1}\right)$.

$$\|z-y\|\leqslant\|z-y_{n_0}\|+\|y_{n_0}-y\|\leqslant\frac{1}{\varphi(n_0)+1}+\frac{r}{4}\leqslant\frac{r}{2}<r$$

et donc $B\left(x_{\varphi(n_0)},\dfrac{1}{\varphi(n_0)+1}\right)\subset B(y,r)\subset\Omega_{i_0}$ ce qui est une contredit le fait que pour tout $i\in I$, $B\left(x_{\varphi(n)},\dfrac{1}{\varphi(n)+1}\right)\not\subset\Omega_i$.

On a montré qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in K$, il existe $i\in I$ tel que $B(x,\alpha)\subset\Omega_i$. D'après la question précédente, on peut choisir $p\in\mathbb{N}^*$ puis $x_1,\ldots,x_p$ éléments de K tels que $K\subset\bigcup_{k=1}^{p}B(x_k,\alpha)\subset\bigcup_{k=1}^{p}\Omega_{i_k}$.

10) Pour $i\in I$, posons $\Omega_i={}^c F_i$ de sorte que pour tout i de I, Ω_i est un ouvert de E. Par hypothèse, $\bigcap_{i\in I}F_i=\varnothing$. Par passage au complémentaire, $K\subset E=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$. D'après la question précédente, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ puis $\left(\Omega_{i_1},\ldots,\Omega_{i_p}\right)$ tels que $K\subset\bigcup_{k=1}^{p}\Omega_{i_k}$ ou encore $\bigcap_{k=1}^{p}F_{i_k}\subset{}^cK$. Puisque les F_{i_k} sont des parties de K, on a aussi $\bigcap_{k=1}^{p}F_{i_k}\subset K$ et donc $\bigcap_{k=1}^{p}F_{i_k}\subset K\cap{}^cK=\varnothing$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^{p}F_{i_k}=\varnothing$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11) Soit $x\in E$. Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E)&\mapsto&\mathbb{R}\\u&\mapsto&\|u(x)\|\end{array}$, $g:\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E)&\mapsto&E\\u&\mapsto&u(x)\end{array}$ et $h:\begin{array}{ccc}E&\mapsto&\mathbb{R}\\y&\mapsto&\|y\|\end{array}$. g est continue sur l'espace de dimension finie $\mathscr{L}(E)$ car linéaire et on sait que h est continue sur l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$. Donc, $f=h\circ g$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$.

$\{\|u(x)\|,\ u\in G\}=f(G)$ est un compact de $\mathbb{R}$ en tant qu'image d'un compact de $\mathscr{L}(E)$ par l'application continue f. De plus, G est non vide (car G est un groupe) et donc $\{\|u(x)\|,\ u\in G\}$ est non vide. Un compact étant borné, on en déduit que $\{\|u(x)\|,\ u\in G\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Donc, $N_G(x)$ existe.

Vérifions que N_G est une norme sur E.

• D'après le début de la question, N_G est une application de E dans $\mathbb{R}^+$.

• Soit $x\in E$. Si $N_G(x)=0$, alors $\forall u\in G$, $\|u(x)\|\leqslant 0$ puis $u(x)=0$. G n'est pas vide et donc il existe $u_0\in G$ tel que $u_0(x)=0$. Puisque u_0 est un automorphisme, on en déduit que $x=0$.

• Soient $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour tout $u\in G$, $\|u(\lambda x)\|=|\lambda|\|u(x)\|\leqslant|\lambda|N_G(x)$ et donc $N_G(\lambda x)\leqslant|\lambda|N_G(x)$ (car $N_G(\lambda x)$ est le plus petit des majorants de $\{\|u(\lambda x)\|,\ u\in G\}$). Inversement, si $\lambda=0$, $|\lambda|N_G(x)\leqslant N_G(\lambda x)$ et si $\lambda\neq0$, $N_G(x)=N_G\left(\dfrac{1}{\lambda}\lambda x\right)\leqslant\dfrac{1}{|\lambda|}N_G(\lambda x)$ puis de nouveau $|\lambda|N_G(x)\leqslant N_G(\lambda x)$. Finalement, $N_G(\lambda x)=|\lambda|N_G(x)$.

• Soit $(x,y) \in E^2$. Pour tout $u \in G$, $\|u(x+y)\| = \|u(x)+u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\| \leqslant N_G(x) + N_G(y)$ et donc $N_G(x+y) \leqslant N_G(x) + N_G(y)$ (car $N_G(x+y)$ est le plus petit des majorants de $\{\|u(x+y)\|,\ u \in G\}$).

On a montré que N_G est une norme sur E.

12)

• Soient $x \in E$ et $u \in G$. $N_G(u(x)) = \sup\{\|v(u(x))\|,\ v \in G\}$. Pour tout $v \in G$, $v \circ u \in G$ puis $\|v(u(x))\| \leqslant N_G(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$ et tout $u \in G$, $N_G(u(x)) \leqslant N_G(x)$. Ensuite, pour $x \in E$ et $u \in G$, $u^{-1} \in G$ et donc $N_G(x) = N_G\left(u^{-1}(u(x))\right) \leqslant N_G(u(x))$. Finalement, pour tout x de D et tout $u \in G$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$.

• Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$. Alors pour tout $u \in G$, $u(x) \neq 0$ car $G \subset GL(E)$.
Puisque, pour tout $z \in E$, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \mapsto & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \|u(z)\| \end{array}$ est continue sur $\mathscr{L}(E)$ et que G est un compact de $\mathscr{L}(E)$, pour tout $z \in E$, il existe $u_z \in G$ tel que $N_G(z) = \|u_z(z)\|$. Par suite,

$$N_G(x+y) = \|u_{x+y}(x+y)\| \leqslant \|u_{x+y}(x)\| + \|u_{x+y}(y)\| \leqslant N_G(x) + N_G(y)$$

avec égalité si et seulement si chacune des inégalités écrites est une égalité. Puisque $\|\ \|$ est la norme euclidienne et que $u_{x+y}(x) \neq 0$, l'égalité $\|u_{x+y}(x) + u_{x+y}(y)\| = \|u_{x+y}(x)\| + \|u_{x+y}(y)\|$ impose l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $u_{x+y}(y) = \lambda u_{x+y}(x) = u_{x+y}(\lambda x)$. Puisque u_{x+y} est un automorphisme, on en déduit que $y = \lambda x$.

Réciproquement, si $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $N_G(x+y) = N_G((1+\lambda)x) = (1+\lambda)N_G(x) = N_G(x) + \lambda N_G(x) = N_G(x) + N_G(y)$.

13) $u^0(x) = x \in K$ puis par récurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u^i(x) \in K$. Puisque K est convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{n} u^i(x) \in K$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments du compact K. On peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente, vers un certain élément a de K.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u(x_n) - x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^{i+1}(x) - \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(u^{i+1}(x) - u^i(x)\right) = \dfrac{1}{n}\left(u^n(x) - x\right)$. Puisque x et $u^n(x)$ sont dans K,

$$\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\|u^n(x) - x\| \leqslant \frac{\delta(K)}{n}.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|u\left(x_{\varphi(n)}\right) - x_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)}$. On en déduit que la suite $\left(u\left(x_{\varphi(n)}\right) - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0. D'autre part, u est un endomorphisme de l'espace E qui est de dimension finie. On en déduit que u est continu sur E et en particulier en a. Donc, la suite $\left(u\left(x_{\varphi(n)}\right) - x_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers $u(a) - a$. Finalement, $u(a) = a$.

14) Soit $x \in K$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $u_i(x) \in K$. Puisque K est convexe, on en déduit que $u(x) \in K$. Donc, K est stable par u. D'après la question précédente, il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15) D'après la question 12, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ puis $\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(a) = N_G(a)$. Donc,

$$N_G\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u(a)) = N_G(a) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)).$$

On en déduit encore $N_G\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$.

Soit $j \in [\![1, r]\!]$.

$$\begin{aligned} N_G\left(\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) &\leqslant N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{i \neq j} u_i(a)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G\left(\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right). \end{aligned}$$

Donc, $N_G\left(\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a)\right) + N_G\left(\sum_{i\neq j} u_i(a)\right)$.

16) Mais alors, d'après la question 12, si $u_j(a) \neq 0$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sum_{i\neq j} u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$ ou encore $ru(a) - u_j(a) = \lambda u_j(a)$ ou enfin, $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.
Le résultat reste clair si $u_j(a) = 0$ car alors $a = 0$ (u_j étant un automorphisme).

17) Soit $j \in [\![1, r]\!]$. L'égalité $u(a) = a$ fournit

$$N_G(a) = N_G(u(a)) = N_G\left(\frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)\right) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G\left(u_j(a)\right) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G\left(a\right)$$

(d'après la question 12). Si $a = 0$, a est un point fixe de chaque élément de G. Sinon, on obtient $\dfrac{\lambda_j + 1}{r} = 1$ puis $u_j(a) = a$. Dans tous les cas, a est un point fixe de u_j.

On a montré que a est un point fixe $u_1, \ldots, u_r$.

18) Posons $G = (u_i)_{i\in I}$ puis pour $i \in I$, posons $F_i = \{x \in K/\ u_i(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(u_i - \mathrm{Id}_E) \cap K$. Pour chaque $i \in I$, F_i est un fermé de E contenu dans K. Si par l'absurde $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, alors d'après la question 10, il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_r})$ telle que $\bigcap_{i=1}^{r} F_{i_k} = \varnothing$. Ceci contredit le résultat de la question précédente car toute famille finie d'éléments de G admet un point fixe commun dans K.

Donc, il existe $a \in K$ tel que, pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

19) Soit $A \in G \subset GL_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\rho_{A^{-1}}\left(\rho_A(M)\right) = \left(A^{-1}\right)^T A^T M A A^{-1} = M$ et donc $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc, $\rho_A \in GL\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$ et $\left(\rho_A\right)^{-1} = \rho_{A^{-1}}$.

- Ainsi, $H \subset GL\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$. De plus, I_n est dans le sous-groupe G et donc $\mathrm{Id}_{GL_n(\mathbb{R})} = \rho_{I_n} \in H$.
- Il est clair que pour tout $(A, A') \in G^2$, le produit AA' est dans le sous-groupe G puis $\rho_A \circ \rho_{A'} = \rho_{AA'} \in H$.
- Pour tout $A \in G$, A^{-1} est dans le sous-groupe G puis $\left(\rho_A\right)^{-1} = \rho_{A^{-1}} \in H$.

Ainsi, H est un sous-groupe de $GL\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$.

Comme à la question 6, l'application $\rho\ :\ A \mapsto \rho_A$ est la composée d'une application bilinéaire et d'une application linéaire en dimension finie. L'application ρ est donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, $H = \rho(G)$ est un compact de $\mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$. Finalement, H est un sous-groupe compact de $GL\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$.

20) Soit $f\ :\ A \mapsto \rho_A\left(I_n\right) = A^T A$. f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $\Delta = f(G)$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 2, pour tout $A \in G$, $A^T A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi, Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Mais alors, $K = \mathrm{conv}(\Delta)$ est compact d'après la question 4 et $K = \mathrm{conv}(\Delta)$ est contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 3.

Soit $(A, A') \in G^2$. $\rho_{A'}\left(A^T A\right) = A'^T\left(A^T A\right)A' = (AA')^T(AA') \in \Delta$ car $AA' \in G$. Donc, Δ est stable par tous les éléments de H. Par linéarité, $K = \mathrm{conv}(\Delta)$ est stable par tous les éléments de H.

21) K est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, stable par tous les éléments du groupe H. D'après la question 18, il existe $M \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in G$, $\rho_A(M) = M$.

D'après la question 2, il existe $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = N^T N$. Pour tout $A \in G$,

$$\begin{aligned} A^T M A = M &\Rightarrow A^T N^T N A = N^T N \Rightarrow \left(N^{-1}\right)^T A^T N^T N A N^{-1} = I_n \Rightarrow \left(NAN^{-1}\right)^T\left(NAN^{-1}\right) = I_n \\ &\Rightarrow NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc, il existe $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit $G_1 = NGN^{-1}$. G_1 est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ (image du groupe G par le morphisme de groupes $A \mapsto NAN^{-1}$) tel que $G = N^{-1} G_1 N$.

22) $\left(g \circ \sigma_P \circ g^{-1}\right) \circ \left(g \circ \sigma_P \circ g^{-1}\right) = g \circ \sigma_P^2 \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Donc, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie.

Notons S_P la matrice de σ_P dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice de $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ dans la base canonique est alors NS_PN^{-1}. Puisque la base canonique est orthonormée, $S_P \in O_n(\mathbb{R})$. Mais alors, par hypothèse

$$NS_PN^{-1} \in NO_n(\mathbb{R})N^{-1} \subset NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $NS_PN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Puisque la base canonique est orthonormée, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ et donc une symétrie orthogonale.

Puisque g est un automorphisme, $g(P)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in g(P)$, il existe $y \in P$ tel que $x = g(y)$ et donc

$$g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(x) = g\left(\sigma_P(y)\right) = g(y) = x.$$

Donc, tout x de $g(P)$ est invariant par la symétrie orthogonale $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$. On en déduit que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$ ou $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Mais si $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, alors $\sigma_P = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ ce qui n'est pas. Donc, $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$.

Soit $x \in E \setminus 0$. Soit $P = x^{\perp}$. P est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et P est constitué des vecteurs orthogonaux à x. Pour tout $y \in P$,

$$\sigma_{g(P)}(g(y)) = g(y)$$

et

$$\sigma_{g(P)}(g(x)) = g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(g(x)) = g\left(\sigma_P(x)\right) = -g(x).$$

Donc, puisqu'une réflexion est un automorphisme orthogonal,

$$\langle g(x), g(y)\rangle = \langle \sigma_P(g(x)), \sigma_{g(P)}(g(y))\rangle = \langle -g(x), g(y)\rangle = -\langle g(x), g(y)\rangle,$$

et finalement, $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$. Ainsi, l'image de tout vecteur orthogonal à x par g est un vecteur orthogonal à $g(x)$. Ceci montre que g conserve l'othogonalité.

Puisque g conserve l'orthogonalité, d'après la question 5, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ et $h \in O\left(\mathbb{R}^n\right)$ tels que $g = kh$. Puisque $g \in GL\left(\mathbb{R}^n\right)$, $k \neq 0$ puis $g^{-1} = \dfrac{1}{k}h^{-1}$. En notant N' la matrice de h dans la base canonique, $N' \in O_n(\mathbb{R})$ (car la base canonique est orthonormée).

On a alors $NKN^{-1} = kN'K\dfrac{1}{k}N'^{-1} = N'KN'^{-1}$ et donc $N'KN'^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$ puis $K \subset N'^{-1}O_n(\mathbb{R})N' \subset O_n(\mathbb{R})$. Puisque d'autre part, $O_n(\mathbb{R}) \subset K$, on a montré que

$$\boxed{K = O_n(\mathbb{R}).}$$

