SESSION 2017

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaires

1) On sait que $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ et d'autre part $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ par définition. Ensuite, $(\mathcal{P}, +, .)$ est un espace vectoriel et donc un sous-espace de $\mathcal{E}$. Enfin, la fonction nulle sur I est dans $\mathcal{D}$ et il est connu qu'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{D}$. Donc, $\mathcal{D}$ est un sous-espace de $\mathcal{E}$.

2) Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour tout x de I, $|x \sin t| \leqslant |x| \leqslant a$. La fonction $t \mapsto x \sin t$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans I et la fonction $f : y \mapsto f(y)$ est continue sur I. Donc la fonction $t \mapsto f(x \sin t)$ est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis, $u(f)(x)$ existe. Ainsi, $u(f)$ est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $\begin{array}{cccc} F : & I \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (x, t) & \mapsto & \dfrac{2}{\pi} f(x \sin t) \end{array}$ de sorte que pour tout $x \in I$, $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, t)\, dt$.

- Pour tout x de I, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

- Pour tout t de I, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ admet sur $I \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ des partielles à tout ordre par rapport à sa première variable x définies par :

$$\forall (x, t) \in I \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{\partial^K F}{\partial x^k}(x, t) = \frac{2}{\pi} \sin^k t f^{(k)}(x \sin t).$$

De plus,

-Pour tout x de I, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^K F}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

-Pour tout t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^K F}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I.

-Pour tout $(x, t) \in I \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left|\dfrac{\partial^K F}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant \dfrac{2}{\pi} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty = \varphi_k(t)$ (où $\left\|f^{(k)}\right\|_\infty = \sup\left\{\left|f^{(k)}(u)\right|,\ u \in I\right\}$ existe dans $\mathbb{R}$ car la fonction $f^{(k)}$ est continue sur le segment $[-a, a]$). De plus, la fonction constante φ_k est intégrable sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $u(f)$ est de classe C^∞ sur I et de plus,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ (u(f))^{(k)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t f^{(k)}(x \sin t)\, dt.$$

On a montré que la fonction $u(f)$ est définie sur I et élément de $\mathcal{E}$.

Pour tout x de I, $v(f)(x) = f(0) + \dfrac{\pi x}{2} u\left(f'\right)(x)$. Puisque f' est dans $\mathcal{E}$, la fonction $v(f)$ est définie sur I et élément de $\mathcal{E}$.

3) Pour $x \in I$, posons $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Pour tout $x \in I$,

$$u(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\pi} a_k W_k x^k,$$

et donc $u(P) \in \mathcal{P}$. Ensuite, P' est dans $\mathcal{P}$ et pour tout x de I, $v(P)(x) = P(0) + \dfrac{\pi x}{2} u\left(P'\right)(x)$. Donc, $v(P) \in \mathcal{P}$.

On a montré que $\mathcal{P}$ est stable par u et v.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n+1} t \, dt = \left[-\cos t \sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)(n+1)\cos t \sin^n t \, dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t \, dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)\sin^n t \, dt \\ &= (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right) \end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. En multipliant les deux membres de cette égalité par W_{n+1}, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

La suite $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t)\sin^n t \, dt > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive, non nulle). Donc, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

La suite (W_n) est décroissante et minorée par 0. Donc, cette suite converge vers une limite ℓ positive ou nulle. Quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question précédente, on obtient $\ell^2 = 0$ puis $\ell = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Après division des trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif W_n, on obtient $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$ tend vers 1 ou encore $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$. D'après la question précédente, $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ ou encore, puisque la suite (W_n) est strictement positive,

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

B. Etude de la continuité de u et v

6) Pour tout f de $\mathcal{E}$, la fonction $|f|$ est continue sur le segment $I = [-a, a]$ et donc la fonction $|f|$ admet un maximum sur I. Donc, $M(f)$ existe dans $\mathbb{R}$.

u est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ ou encore $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour tout $x \in I$,

$$|u(f(x))| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x\sin t)| \, dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f) \, dt = M(f),$$

puis $M(u(f)) \leqslant M(f)$. Ainsi, l'endomorphisme u vérifie : $\forall f \in \mathcal{E}$, $M(u(f)) \leqslant M(f)$. On sait alors que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.

7) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, posons $f_n(x) = x^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $M\left(f_n\right) = a^n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$,

$$v\left(f_n(x)\right) = \frac{2}{\pi}x\int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1}\sin^{n-1} t \, dt = \frac{2}{\pi}nW_{n-1}x^n.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M\left(v\left(f_n\right)\right) = \dfrac{2}{\pi}nW_{n-1}a^n$. D'après la question précédente, $M\left(v\left(f_n\right)\right) = \dfrac{2}{\pi}n\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}a^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}a^n$.

Mais alors, $\dfrac{M\left(v\left(f_n\right)\right)}{M\left(f_n\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. On en déduit que $\left\{\dfrac{M(v(f))}{M(f)}, \ f \in \mathcal{E}\setminus\{0\}\right\}$ n'est pas majoré et on sait alors que l'endomorphisme v n'est pas continu de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.

8) Pour $f \in \mathcal{E}$, f et f' sont dans $\mathcal{E}$ et donc N est bien définie sur $\mathcal{E}$.

Pour tout $f \in \mathcal{E}$, $N(f) \geqslant 0$ et de plus, $N(f) = 0 \Rightarrow M(f) = M(f') = 0 \Rightarrow f = 0$.
Pour tout $f \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $N(\lambda f) = M(\lambda f) + M(\lambda f') = |\lambda|(M(f) + M(f')) = |\lambda| N(f)$.
Pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, $N(f + g) = M(f + g) + M(f' + g') \leqslant M(f) + M(f') + M(g) + M(g') = N(f) + N(g)$.

Tout ceci montre que N est une norme sur E.

Pour $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$,

$$\begin{aligned}|v(f(x))| &\leqslant |f(0)| + \frac{2}{\pi}|x| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(x \sin t)|\, dt \leqslant M(f) + a\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M(f')\, dt = M(f) + aM(f') \\ &\leqslant (1 + a)(M(f) + M(f')) = (1 + a)N(f).\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $f \in \mathcal{E}$, $M(v(f)) \leqslant (1 + a)N(f)$. On en déduit que l'endomorphisme v est continu de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$.

Si les normes M et N étaient équivalentes, l'application v devrait aussi être continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même, ce qui n'est pas. Donc, les normes M et N ne sont pas équivalentes.

9) Soient $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est continue sur le segment $[-a, a]$, il existe un polynôme q tel que $M(f' - q) \leqslant \varepsilon$ d'après le théorème de WEIERSTRASS. Soit $p : x \mapsto f(0) + \int_0^x q(t)\, dt$. p est un polynôme tel que $p(0) = f(0)$ et pour tout x de I, $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \varepsilon$.

Soient $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. Soit p un polynôme tel que $p(0) = f(0)$ et pour tout x de I, $|f'(x) - p'(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1 + a}$. Pour $x \in I$, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(x) - p(x)| = |(f(x) - p(x)) - (f(0) - p(0))| \leqslant |x - 0| M(f' - p') \leqslant \frac{\varepsilon a}{1 + a}$$

et donc $M(f - p) \leqslant \dfrac{\varepsilon a}{1 + a}$. On en déduit que

$$N(f - p) = M(f - p) + M(f' - p') \leqslant \frac{\varepsilon}{1 + a} + \frac{\varepsilon a}{1 + a} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $N(f - p) \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C. Etude de l'inversibilité de u et v

10) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose $f_n(x) = x^n$. $v(f_0) = f_0 = u(f_0)$ puis $u(v(f_0)) = v(u(f_0)) = f_0$. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in I$,

$$u(f_n)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^n t\, dt = \frac{2}{\pi} W_n x^n = \frac{2}{\pi} W_n f_n(x)$$

et

$$v(f_n)(x) = 0 + x \int_0^{\frac{\pi}{2}} n x^{n-1} \sin^{n-1} t\, dt = n W_{n-1} f_n(x).$$

d'après la question 4. Par suite,

$$v(u(f_n)) = \frac{2}{\pi} W_n v(f_n) = \frac{2}{\pi} n W_n W_{n-1} f_n = f_n.$$

De même,

$$u(v(f_n)) = n W_{n-1} v(f_n) = \frac{2}{\pi} n W_n W_{n-1} f_n = f_n.$$

Ainsi, l'endomorphisme $v \circ u_{/\mathcal{P}}$ (resp. $u \circ v$) coïncide avec $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ sur la base canonique de $\mathcal{P}$. On en déduit que $(v \circ u)_{/\mathcal{P}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ (resp. $(u \circ v)_{/\mathcal{P}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$).

On a vu que u et v laissent $\mathcal{P}$ stable. Ces deux dernières égalités s'écrivent encore $v_{/\mathcal{P}} \circ u_{/\mathcal{P}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et $u_{/\mathcal{P}} \circ v_{/\mathcal{P}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Ainsi, $u_{/\mathcal{P}}$ et $v_{/\mathcal{P}}$ sont des automorphismes de $\mathcal{P}$.

11) Soit $f \in \mathcal{E}$. D'après la question 9, $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace $(\mathcal{E}, N)$. Il existe donc une suite de polynômes (p_n) convergeant vers la fonction f dans l'espace $(\mathcal{E}, N)$. La fonction v est continue de l'espace $(\mathcal{E}, N)$ dans l'espace $(\mathcal{E}, M)$ d'après la question 8 et la fonction u est continue de l'espace $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même. Donc, la fonction $u \circ v$ est continue de l'espace $(\mathcal{E}, N)$ dans l'espace $(\mathcal{E}, M)$. Mais alors, la suite $(u \circ v(p_n)) = (p_n)$ converge vers $u \circ v(f)$ dans l'espace $(\mathcal{E}, M)$.

On note enfin que $M \leqslant N$ et donc $M(p_n - f) \leqslant N(p_n - f) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc, la suite (p_n) converge vers f dans l'espace $(\mathcal{E}, M)$. Par unicité de la limite, $u \circ v(f) = f$.

Ainsi, $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. En particulier, $u \circ v$ est injective et donc v est injective ou encore 0 n'est pas valeur propre de v.

12) Pour $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$,

$$\begin{aligned}
u \circ v(f)(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} v(f)(x\sin t)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(0) + x\sin t\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t\sin u)\ du\right) dt \\
&= f(0) + \frac{2}{\pi}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t\sin u)\sin t\ du\right) dt
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v \circ u(f)(x) &= u(f)(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(f)'(x\sin t)\ dt = f(0) + \frac{2}{\pi}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t\sin u)\sin t\ du\right) dt \\
&= u \circ v(f)(x)
\end{aligned}$$

Donc, $v \circ u = u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. On en déduit que u et v sont des automorphismes de $\mathcal{E}$ et que $v = u^{-1}$.

13) Pour $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on a déjà constaté que $v(f)(x) = f(0) + \dfrac{\pi x}{2}u(f')(x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en posant $z = \tan t$ et donc $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = \dfrac{z^2}{1+z^2}$ et $dt = \dfrac{dz}{1+z^2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
u(\arctan')(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2\sin^2 t}\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2\dfrac{z^2}{1+z^2}}\frac{dz}{1+z^2} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+(1+x^2)z^2}\ dz \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{1+x^2}}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+w^2}\ dw \text{ (en posant } w = z\sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{argsh}'(x)
\end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x) = v(\mathrm{argsh}')(x) = \mathrm{argsh}'(0) + \frac{\pi x}{2}u(\mathrm{argsh}'')(x) = 1 + \frac{\pi x}{2}u(\mathrm{argsh}'')(x).$$

Donc, pour $x \neq 0$, $u(\mathrm{argsh}'')(x) = \dfrac{2}{\pi x}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - 1\right) = -\dfrac{2x}{\pi(1+x^2)}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(\mathrm{argsh}'')(x) = -\frac{2x}{\pi(1+x^2)}.$$

14) Supposons que pour $x \in [-a, a]$, $f(-x) = \varepsilon f(x)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est indépendant de x. Pour $x \in [-a, a]$,

$$u(f)(-x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x\sin t)\ dt = \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin t)\ dt = \varepsilon u(f)(x).$$

De même, si f est impaire, alors $f(0) = 0$ et f' est paire puis pour $x \in [-a, a]$,

$$v(f)(-x) = 0 - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(-x\sin t)\ dt = -x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t)\ dt = -v(f)(x)$$

et donc $v(f)$ est impaire, et si f est paire, f' est impaire puis
pour $x \in [-a, a]$,

$$v(f)(-x) = f(0) - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(-x\sin t)\ dt = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin t)\ dt = v(f)(x)$$

et $v(f)$ est paire. En résumé, si f est paire (resp. impaire) alors $u(f)$ et $v(f)$ sont paires (resp. impaires).

Réciproquement, si $u(f)$ est paire (resp. impaire), alors $f = v(u(f))$ est paire (resp. impaire) et si $v(f)$ est paire (resp. impaire), alors $f = u(v(f))$ est paire (resp. impaire).

D. Etude des valeurs et vecteurs propres de u et v

15) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une valeur propre de v. Soit f un vecteur propre associé. Alors $f = u(v(f)) = \lambda u(f)$ puis $u(f) = \frac{1}{\lambda} f$ de sorte que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u et f est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. En résumé, si λ est valeur propre de v, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u et $E_\lambda(v) \subset E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$.

En échangeant les rôles de u et v, on a aussi : $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u, alors $\frac{1}{\mu} = \lambda$ est valeur propre de v et $E_{\frac{1}{\lambda}}(u) \subset E_\lambda(v)$. Finalement, λ est valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u et dans ce cas, $E_\lambda(v) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$.

16) Soit $f \in \mathcal{D}$. Il existe $\alpha \in]0, a]$ puis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(t) = a_n x^n \sin^n t$ de sorte que $u(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt$.

- Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| \leqslant |a_n|\,|x|^n$ qui est le terme général d'une série numérique convergente (car $\sum a_n x^n$ converge absolument sur $]-\alpha, \alpha[$). Donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On sait alors que l'on peut intégrer terme à terme. Pour $x \in]-\alpha, \alpha[$, on obtient

$$u(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n W_n x^n.$$

Donc, $u(f) \in \mathscr{D}$. Ceci montre que $\mathcal{D}$ est stable par u.

Si f est dans $\mathcal{D}$, alors f' est dans $\mathcal{D}$ puis $u(f')$ est dans $\mathcal{D}$ puis $v(f) \ : \ x \mapsto f(0) + \frac{\pi x}{2} u(f')(x)$ est dans $\mathcal{D}$. Donc, $\mathcal{D}$ est stable par v.

17) Pour $f \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\left|f^{(n)}\right|$ est continue sur le segment Iet donc m_n existe dans $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda (\in \mathbb{R}^*)$ une valeur propre de u puis f un vecteur propre associé. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$\begin{aligned}
|\lambda| \left|f^{(n)}(x)\right| &= \left|(\lambda f)^{(n)}(x)\right| = \left|u(f)^{(n)}(x)\right| = \frac{2}{\pi} \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t f^{(n)}(x \sin t)\, dt\right| \\
&\leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^n t| \left|f^{(n)}(x \sin t)\right|\, dt \leqslant \frac{2}{\pi} m_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt \\
&= \frac{2 m_n W_n}{\pi}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda| m_n \leqslant \frac{2 m_n W_n}{\pi}$. Supposons par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda| \leqslant \frac{2 W_n}{\pi}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda = 0$ ce qui n'est pas. Donc, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m_n = 0$ ou encore $f^{(n)} = 0$. Ceci montre que f est nécessairement dans $\mathcal{P}$.

18) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$ puis $P \ : \ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n \neq 0$, une fonction polynomiale non nulle de degré n. D'après la question 3,

$$\begin{aligned}
u(P) = \lambda P &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\pi} a_k W_k x^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2W_k}{\pi} - \lambda\right) a_k x^k = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \left(\frac{2W_k}{\pi} - \lambda\right) a_k \text{ (car I est infini)} \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{2W_n}{\pi} \text{ (car } a_n \neq 0\text{) et } \forall k < n,\ a_k = 0 \text{ (car si } k < n,\ W_k \neq W_n) \\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{2W_n}{\pi} \text{ et } P \in \mathrm{Vect}(f_n) \setminus \{0\} \text{ (où } f_n\ :\ x \mapsto x^n).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(u) = \left\{\dfrac{2W_n}{\pi},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. De plus, si pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \dfrac{2W_n}{\pi}$, alors $E_{\lambda_n}(u) = \mathrm{Vect}\,(f_n)$.

D'après la question 15, $\mathrm{Sp}(v) = \left\{\dfrac{\pi}{2W_n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \{(n+1)W_{n+1},\ n \in \mathbb{N}\} = \{nW_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $E_{\frac{1}{\lambda_n}}(v) = \mathrm{Vect}\,(f_n)$.

19) Puisqu'un vecteur propre de u (resp. v) est un polynôme, toute famille libre de vecteurs propres de u engendre un sous-espace de $\mathscr{P}$ ($\underset{\neq}{\subset} \mathcal{E}$) et n'engendre donc pas $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ n'admet pas une base de vecteurs propres de u (resp. v).

Puisque $\dfrac{2W_n}{\pi}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, 0 est adhérent au spectre de u dans $\mathbb{C}$ mais n'est pas dans ce spectre. Donc, $\mathrm{Sp}(u)$ n'est pas un fermé de $\mathbb{C}$.

$\mathrm{Sp}(v) = \{nW_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Cette fois-ci, la suite $(nW_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Sp}(v)$ qui converge doit être bornée et donc ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathrm{Sp}(v)$. Puisque cette suite converge, elle est donc constante à partir d'un certain rang. Mais alors, la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathrm{Sp}(v)$. Donc, $\mathrm{Sp}(v)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

