Epreuve de Mathématiques 2 PC

Question préliminaire. Soit a un réel non nul. La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x+ia}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel x,

$$\frac{1}{x+ia} = \frac{x-ia}{(x+ia)(x-ia)} = \frac{x-ia}{x^2+a^2} = \frac{x}{x^2+a^2} - ia\frac{1}{x^2+a^2}.$$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) - i\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$, $C \in \mathbb{C}$.

1)

1.1. Soit $(\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. $t^\alpha e^{-\lambda t} \underset{t\to 0,\ t>0}{\sim} t^\alpha$ et donc $\lim\limits_{t\to 0,\ t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \geqslant 0$. Par suite, $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

1.2. Soit $(\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. $f_{\alpha,\lambda}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Puisque $\lambda > 0$, d'après un théorème de croissances comparées, $t^2 f_{\alpha,\lambda}(t) = t^{\alpha+2}e^{-\lambda t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ et donc $f_{\alpha,\lambda}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et donc que $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur un voisinage de 0.

Or, $f_{\alpha,\lambda}(t) \underset{t\to 0,\ t>0}{\sim} t^\alpha > 0$ et donc $f_{\alpha,\lambda}$ est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $\alpha > -1$.
On en déduit que $B =]-1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux fonctions $u\ :\ t \mapsto \dfrac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}$ et $v\ :\ t \mapsto \dfrac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}$ sont continues sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $t > 0$, $|u(t)| \leqslant f_{-\frac{1}{2},1}(t)$ et $|v(t)| \leqslant f_{-\frac{1}{2},1}(t)$. Puisque $-\dfrac{1}{2} > -1$, la fonction $f_{-\frac{1}{2},1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente et il en est de même des fonctions u et v.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, $U(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(-xt)}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,dt = U(x)$ et $V(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(-xt)}{\sqrt{t}}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,dt = -V(x)$.

La fonction U est paire et la fonction V est impaire.

4) La fonction $u \mapsto u^2$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, bijective de $]0,+\infty[$ sur lui-même. On peut poser $t = u^2$ et on obtient

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\,2u\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

5)

5.1. Pour tout réel x, $W(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(\cos(xt)+i\sin(xt))}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Posons $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ (x;t) & \mapsto & \dfrac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $W(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x,t)\,dt$.

• Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2 (car u et v sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et donc $u+iv$ est intégrable sur $]0,+\infty[$).

• La fonction Φ admet sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = \frac{ite^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} = i\sqrt{t}e^{(-1+ix)t}.$$

De plus,

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,

- pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

 © Jean-Louis Rouget, 2019. Tous droits réservés.

- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}e^{-t} = f_{\frac{1}{2},1}(t) = \varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 1 puisque $\dfrac{1}{2} > -1$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ W'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\ dt = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{(-1+ix)t}\ dt.$$

5.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto i\sqrt{t}$ et $t \mapsto \dfrac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A i\sqrt{t}e^{-(1-ix)t}\ dt &= \left[i\sqrt{t}\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{i}{2(-1+ix)}\frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\ dt \\ &= i\sqrt{A}\frac{e^{(-1+ix)A}}{-1+ix} - i\sqrt{\varepsilon}\frac{e^{(-1+ix)\varepsilon}}{-1+ix} + \frac{i}{2(1-ix)}\int_\varepsilon^A \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\ dt\end{aligned}$$

Puisque $\left|\sqrt{A}e^{(-1+ix)A}\right| = \sqrt{A}e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} i\sqrt{A}\dfrac{e^{(-1+ix)A}}{-1+ix} = 0$. Quand A tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0, on obtient

$$W'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-(1-ix)t}\ dt = \frac{i}{2(1-ix)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}}\ dt = \frac{i}{2(1-ix)}W(x).$$

Ainsi, W est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \dfrac{i}{2(1-ix)}y = 0$.

5.3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, W est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

- W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en particulier, W est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$. Le résultat est donc vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons W de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Alors $W' : x \mapsto \dfrac{i}{2(1-ix)}W(x)$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto \dfrac{i}{2(1-ix)}$ est elle-même de classe C^n sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Mais alors, W est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

Le résultat est démontré par récurrence. Ainsi, W est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $U = \mathrm{Re}(W)$ et $V = \mathrm{Im}(W)$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.4. Pour tout réel x

$$\begin{aligned}U'(x) + iV'(x) = W'(x) = \frac{i}{2(1-ix)}W(x) &= \frac{i(1+ix)}{2(1-ix)(1+ix)}(U(x)+iV(x)) = \frac{-x+i}{2\left(1+x^2\right)}(U(x)+iV(x)) \\ &= \frac{-xU(x)-V(x)}{2\left(1+x^2\right)} + i\frac{U(x)-xV(x)}{2\left(1+x^2\right)}.\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} U'(x) = -\dfrac{xU(x)+V(x)}{2\left(1+x^2\right)} \\ V'(x) = \dfrac{U(x)-xV(x)}{2\left(1+x^2\right)} \end{array}\right..$$

6) g est continue sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $t > 0$, $|g(t)| \leqslant f_{-\frac{1}{2},1}(t)$. Donc, g est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 1.

7)

7.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $t = u + n\pi$, on obtient

 © Jean-Louis Rouget, 2019. Tous droits réservés.

$$a_n=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-\lambda t}\sin(t)}{\sqrt{t}}\ dt=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-\lambda t}\sin(t-n\pi)}{\sqrt{t}}\ dt=\int_0^{\pi}\frac{e^{-\lambda(u+n\pi)}\sin(u)}{\sqrt{u+n\pi}}\ du$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)\ dt \text{ (la variable d'intégration étant muette).}$$

7.2. Pour $u>0$, posons $h(u)=\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}=e^{-u}\times\dfrac{1}{\sqrt{u}}$. La fonction h est décroissante sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions positives et décroissantes sur $]0,+\infty[$.
Soit alors $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[0,\pi]$ si $n\geqslant 1$ et $]0,\pi]$ si $n=0$, $t+(n+1)\pi\geqslant t+n\pi\geqslant\pi>0$ et donc

$$\frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}}=h(t+(n+1)\pi)\leqslant h(t+n\pi)=\frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}$$

puis $\dfrac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}}\sin(t)\leqslant\dfrac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)$ car $\sin(t)\geqslant 0$. En intégrant, on obtient $a_{n+1}\leqslant a_n$.
Ceci montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7.3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant a_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)\ dt\leqslant\int_0^{\pi}\frac{e^{-\lambda(n\pi)}}{\sqrt{n\pi}}\times 1\ dt=\frac{\pi e^{-\lambda n\pi}}{\sqrt{n\pi}}$ (par décroissance de la fonction h sur $]0,+\infty[$). Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi e^{-\lambda n\pi}}{\sqrt{n\pi}}=0$ d'après un théorème de croissances comparées, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

8)

8.1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. Donc, la série de terme général $(-1)^k a_k$, $k\in\mathbb{N}$, converge d'après le critère spécial aux séries alternées.

8.2. On sait que $S\geqslant S_1=a_0-a_1=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}}-\frac{e^{-\lambda(t+\pi)}}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin(t)\ dt>0$ (intégrale d'une fonction continue, positive (par décroissance de h) et non nulle). Donc, $S>0$.

8.3. Soit $N\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n=\sum_{k=0}^{N}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}g(t)\ dt=\int_0^{(N+1)\pi}g(t)\ dt$. Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\ dt$ est une intégrale convergente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{(N+1)\pi}g(t)\ dt=\int_0^{+\infty}g(t)\ dt.$$

9) Soit $x>0$. Soit $\lambda=\dfrac{1}{x}>0$. En posant $u=tx$, on obtient

$$V(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\ dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}\sin(u)}{\sqrt{\frac{u}{x}}}\ \frac{du}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}u}}{\sqrt{u}}\sin(u)\ du=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}g(u)\ du=S>0.$$

10)

10.1. D'après la question 5, U et V sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x\mapsto\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, R se prolonge par continuité en 0. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0}R(x)=\sqrt{U^2(0)+V^2(0)}=\sqrt{\pi}$.
D'après la question 5.3, la fonction V est continue sur $\mathbb{R}$ et d'après la question 3, la fonction V est impaire. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0}V(x)=V(0)=0$ et de plus, pour $x>0$, on a $V(x)>0$ d'après la question 9.
D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0}U(x)=\sqrt{\pi}>0$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0}\frac{U(x)}{V(x)}=+\infty$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ x>0}T(x)=\frac{\pi}{2}$. La fonction T se prolonge par continuité en 0 en posant $T(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

10.2. Les fonctions U et V sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ d'après la question 5.3. De plus, la fonction V est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction U^2+V^2 est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$ puis la fonction R

 © Jean-Louis Rouget, 2019. Tous droits réservés.

est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. D'autre part, la fonction $\dfrac{U}{V}$ de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ puis la fonction T est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

10.3. D'après la question 5.4, pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}R'(x) &= \frac{U'(x)U(x)+V'(x)V(x)}{\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}} = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\frac{-(xU(x)+V(x))U(x)+(U(x)-xV(x))V(x)}{\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}}\\ &= \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\frac{-x\left(U^2(x)+V^2(x)\right)}{\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}} = -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}\\ &= -\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}R(x)\end{aligned}$$

Donc, R est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y'+\dfrac{x}{2\left(1+x^2\right)}y=0 \quad (E_1)$.

Pour tout réel $x>0$,

$$T'(x) = \frac{\dfrac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{V^2(x)}}{\dfrac{U^2(x)}{V^2(x)}+1} = \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\frac{-(xU(x)+V(x))V(x)-U(x)(U(x)-xV(x))}{U^2(x)+V^2(x)} = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Donc, T est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)} \quad (E_2)$.

10.4. Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto -\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)+\lambda_2$, $\lambda_2\in\mathbb{R}$. Ensuite, soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)+\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}y(x)=0 &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ e^{\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)}y'(x)+\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}e^{\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)}y(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \left(e^{\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)}y\right)'(x)=0 \Leftrightarrow \exists\lambda_1\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt[4]{1+x^2}\,y(x)=\lambda_1\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda_1\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\frac{\lambda_1}{\sqrt[4]{1+x^2}}.\end{aligned}$$

10.5. Il existe $\lambda_2\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$, $T(x)=-\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)+\lambda_2$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}T(x)=\dfrac{\pi}{2}$ ce qui fournit $\lambda_2=\dfrac{\pi}{2}$. Donc,

$$\forall x>0,\ T(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)+\frac{\pi}{2}.$$

Ensuite, il existe λ_1 tel que pour tout $x>0$, $R(x)=\dfrac{\lambda_1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$. La condition $\lim\limits_{x\to 0}R(x)=\sqrt{\pi}$ fournit $\lambda_1=\sqrt{\pi}$. Donc,

$$\forall x>0,\ R(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}},$$

ce qui reste vrai pour $x=0$ par continuité de R en 0 puis pour tout réel x, par parité.

11) Pour tout réel $x>0$, $\tan(T(x))=\dfrac{U(x)}{V(x)}$ puis $U(x)=V(x)\tan(T(x))$. Ensuite, $T(x)\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(T(x))>0$. Mais alors, pour tout réel $x>0$, en tenant compte de $V(x)>0$,

$$R(x)=\sqrt{V^2(x)\tan^2(T(x))+V^2(x)}=V(x)\sqrt{\frac{1}{\cos^2(T(x))}}=\frac{V(x)}{\cos(T(x))}$$

et donc $V(x)=R(x)\cos(T(x))=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right)$, ce qui reste vrai pour $x=0$ par continuité puis pour tout réel x par parité.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ V(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right).$$

 © Jean-Louis Rouget, 2019. Tous droits réservés.

Ensuite, pour $x > 0$, $U(x) = V(x)\tan(T(x)) = \dfrac{V(x)}{\tan\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right)$, ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité puis pour tout réel x par parité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right).$$

12) D'après la question préliminaire

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R},\ W'(x) - \frac{i}{2(1-ix)}W(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ W'(x) + \frac{1}{2(x+i)}W(x) = 0\\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - i\operatorname{Arctan}(x)\right)\right)W'(x) + \frac{1}{2(x+i)}\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - i\operatorname{Arctan}(x)\right)\right)W(x) = 0\\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - i\operatorname{Arctan}(x)\right)\right)W\right)'(x) = 0\\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - i\operatorname{Arctan}(x)\right)\right)W(x) = e^0 W(0)\\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt[4]{1+x^2}\exp\left(-\frac{i}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right)W(x) = \sqrt{\pi}\\
&\qquad \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ W(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+x^2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)\right)\right)
\end{aligned}$$

et on retrouve les expressions de U et V en prenant les parties réelle et imaginaire.

13)

13.1. Pour tout réel x, $U_2(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\left(1+\cos(2t)\right)\ dt = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\pi} + U(2x)\right)$.

De même, pour tout réel x, $V_2(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\left(1-\cos(2t)\right)\ dt = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\pi} - U(2x)\right)$.

13.2. Soit $x > 0$ fixé. Pour $t \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos^n(xt)$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\ dt$.

Pour tout entier naturel n, $|U_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n(t)|\ dt$. Montrons alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|u_n(t)|\ dt = 0$.

Pour $t > 0$, $|\cos(xt)| = 1 \Leftrightarrow xt \in \pi\mathbb{N}^* \Leftrightarrow t \in \dfrac{\pi}{x}\mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{E} = \dfrac{\pi}{x}\mathbb{N}^* = \left\{\dfrac{k\pi}{x},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Si $t \in \mathcal{E}$, alors pour tout entier naturel n, $|u_n(t)| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$. Dans ce cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|u_n(t)| = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$.
Si $t \notin \mathcal{E}$, alors $|\cos(xt)| < 1$ et dans ce cas, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|u_n(t)| = 0$.
Ainsi, la suite de fonctions $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $u = f_{-\frac{1}{2},1}1_{\mathcal{E}}$ où $1_{\mathcal{E}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{E}$. De plus, la fonction u est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $|u_n(t)| = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}|\cos(xt)|^n \leqslant \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}| = f_{-\frac{1}{2},1}(t) = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 1.2.

En résumé,

- chaque fonction $|u_n|$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$,
- la suite de fonctions $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $u = f_{-\frac{1}{2},1}1_{\mathcal{E}}$ et de plus, la fonction u est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- il existe une fonction φ, continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \varphi$, à savoir $\varphi = f_{-\frac{1}{2},1}$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- la fonction u est intégrable sur $]0,+\infty[$,

 © Jean-Louis Rouget, 2019. Tous droits réservés.

- la suite $\left(\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\ dt = \int_0^{+\infty} u(t)\ dt$.

Ceci fournit explicitement $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n(t)|\ dt = \int_0^{+\infty} f_{-\frac{1}{2},1}(t)1_{\mathcal{E}}(t)\ dt = 0$ (car sur tout segment de $]0,+\infty[$, la fonction $f_{-\frac{1}{2},1}1_{\mathcal{E}}$ est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points). Mais alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = 0$. Ce résultat reste vrai si $x < 0$ par parité. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt = \sqrt{\pi}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(0) = \sqrt{\pi}$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{\pi} \text{ si } x = 0\\ 0 \text{ si } x \neq 0\end{array}\right. .$$

 © Jean-Louis Rouget, 2019. Tous droits réservés.