Epreuve de Mathématiques 1 PC

Exercice 1

1) Question de cours : La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1} - s_p = \dfrac{1}{n+p+1} > 0$. Donc, la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_p = \displaystyle\sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. L'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est constante quand p varie. D'autre part, la série de terme général $\dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, diverge vers $+\infty$. Donc, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} = +\infty$ puis $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} s_p = +\infty$.

La suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

2.2. Puisque $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} s_p = +\infty$, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier non nul m tel que, si $p \geqslant m$, alors $s_p \geqslant A$. En particulier, pour $A = 2$, il existe un entier p tel que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+p} = s_p \geqslant 2 > 1$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant n$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. En particulier, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

4) Soit $n \geqslant 2$. Alors, $n - 1 \geqslant 1 > 0$ puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ termes}} = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

D'autre part, pour $n \geqslant 2$, posons $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{3n-2}$. Pour $n \geqslant 2$, $(3n-2) - (n+1) = 2n - 3 \geqslant 4 - 3 > 0$ et donc $3n - 2 \geqslant n + 1$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n-2}\right) \\
&= \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+1} - \frac{2}{3n} \\
&= \frac{3n(3n+1) + 3n(3n-1) - 2(3n-1)(3n+1)}{3n(3n-1)(3n+1)} = \frac{2}{3n(3n-1)(3n+1)} > 0
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est donc strictement croissante. Par suite, pour $n \geqslant 2$,

$$v_n \geqslant v_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > 1.$$

5) La question précédente montre que pour $n \geqslant 2$, $n - 1 < p_n \leqslant 2n - 2$ ou encore $2n - 1 < a_n \leqslant 3n - 2$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant 2,\ 2 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} = u_n \leqslant 3 - \frac{2}{n}.$$

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un certain réel ℓ, par passage à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient $2 \leqslant \ell \leqslant 3$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de p_n, $1 < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$. D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \leqslant 1$ et donc $p_n \geqslant 1$.

Ensuite, par définition de p_n, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+p_n-1} \leqslant 1$ et donc

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p_n-1} + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $a_n \geqslant n+1$.
L'inégalité $1 < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$ fournit en particulier $1 \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$ ou encore $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$.
L'inégalité $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+p_n-1} + \dfrac{1}{a_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{a_n}$ s'écrit encore $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n-1} \leqslant 1$. Ensuite, par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$,

$$\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_{n}^{a_n} \frac{dt}{t}$$

et

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{a_n-1} = \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_{n}^{a_n} \frac{dt}{t}.$$

8) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_n^{a_n} \frac{dx}{x} \leqslant 1$. Mais $\displaystyle\int_n^{a_n} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{1-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant e.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} e^{1-\frac{1}{n}} = e$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e.$$

Exercice 2

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $P \in E$. $\deg\left(\left(\dfrac{1}{4} - X^2\right) P'\right) \leqslant 2 + 2n - 1 = 2n+1$ et $\deg(aXP) \leqslant 1 + 2n = 2n+1$. Donc, $\deg(\Phi_a(P)) \leqslant \operatorname{Max}\left\{\deg\left(\left(\dfrac{1}{4} - X^2\right) P', aXP\right)\right\} \leqslant 2n+1$. De plus, si on note α_{2n} le coefficient de X^{2n} dans P, le coefficient de X^{2n+1} dans $\Phi_a(P)$ est $-2n\alpha_{2n} + a\alpha_{2n} = (a-2n)\alpha_{2n}$.

Si $a = 2n$, alors pour tout $P \in E$, $\Phi_a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$. Dans ce cas, Φ_a est une application de E dans E.
Si $a \neq 2n$, $\Phi_a\left(X^{2n}\right)$ est un polynôme de degré $2n+1$ car le coefficient de X^{2n+1} dans $\Phi_a\left(X^{2n}\right)$ est $(a-2n)\alpha_{2n} \neq 0$. Dans ce cas, Φ_a n'est pas une application de E dans E.

En résumé, Φ_a est une application de E dans E si et seulement si $a = 2n$. Dorénavant $a = 2n$. Vérifions alors que dans ce cas, Φ_a est linéaire. Soient $(P,Q) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}(\lambda P + \mu Q) &= \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P + \mu Q)' + 2nX(\lambda P + \mu Q) \\
&= \lambda\left(\left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + 2nXP\right) + \mu\left(\left(\frac{1}{4} - X^2\right) Q' + 2nXQ\right) \\
&= \lambda\Phi_{2n}(P) + \mu\Phi_{2n}(Q).
\end{aligned}$$

Φ_{2n} est donc un endomorphisme de E. En résumé, Φ_a est un endomorphisme de E si et seulement si $a = 2n$.

2) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$. Soit $P = \left(X + \dfrac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^{\beta}$. P est dans E si et seulement si $\alpha + \beta \leqslant 2n$ puis

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}(P) &= -\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha\left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta} + \beta\left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\right) + 2nXP \\
&= -\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right)P - \beta\left(X + \frac{1}{2}\right)P + 2nXP \\
&= \left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)P.
\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $P \neq 0$, $\Phi_{2n}(P) = \lambda P \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2n - \alpha - \beta = 0 \\ \dfrac{\alpha - \beta}{2} = \lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 2n \\ \alpha - \beta = 2\lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = n + \lambda \\ \beta = n - \lambda \end{array}\right.$.

Réciproquement, puisque $\lambda \in [\![-n, n]\!]$, $\alpha = n + \lambda \geqslant 0$ et $\beta = n - \lambda \geqslant 0$. En particulier, α et β sont des entiers naturels (λ étant un entier) puis P est bien un polynôme. Ensuite, $\alpha + \beta = 2n$ et donc P est un polynôme de degré $2n$ et en particulier, P est un élément de E.

Finalement, si $\lambda \in [\![-n, n]\!]$, $P = \left(X + \dfrac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^{n-\lambda}$ est un élément de E tel que $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$.

3) Pour $k \in [\![-n, n]\!]$, posons $P_k = \left(X + \dfrac{1}{2}\right)^{n+k}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)^{n-k}$. Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, P_k est un polynôme non nul tel que $\Phi_{2n}(P_k) = kP_k$. Ceci montre que pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, k est valeur propre de Φ_{2n} et que P_k est un vecteur propre associé. On vient de trouver $2n + 1$ valeurs propres de Φ_{2n} deux à deux distinctes. Puisque $\dim(E) = 2n + 1$, on a trouvé toutes les valeurs propres de Φ_{2n} et de plus ces valeurs propres sont toutes simples :

$$\mathrm{Sp}(\Phi_{2n}) = (-n, -(n-1), \ldots -1, 0, 1, \ldots, (n-1), n).$$

Puisque les valeurs propres de Φ_{2n} sont simples, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles et donc

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ E_k(\Phi_{2n}) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

4) Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $\Phi_{2n}(X^k) = \left(\dfrac{1}{4} - X^2\right) kX^{k-1} + 2nX^{k+1} = \dfrac{k}{4}X^{k-1} + (2n-k)X^{2k+1}$. D'autre part, $\Phi_{2n}(1) = 2nX$ et $\Phi_{2n}(X^{2n}) = -\dfrac{n}{2}X^{2n-1}$. Donc, la matrice de Φ_{2n} dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^{2n})$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2n & 0 & \frac{2}{4} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2n-1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2n-2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & \frac{2n}{4} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $\mathrm{Sp}(A) = [\![-n, n]\!]$ et donc $\mathrm{Sp}(A + nI_{2n+1}) = (k+n)_{-n \leqslant k \leqslant n} = [\![0, 2n]\!]$. La matrice tridiagonale

$$B = A + nI_{2n+1} = \begin{pmatrix} n & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2n & n & \frac{2}{4} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2n-1 & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2n-2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n & \frac{2n}{4} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & n \end{pmatrix},$$

a tous ses coefficients diagoanaux égaux entre eux et vérifie $\mathrm{Sp}(B) = [\![0, 2n]\!]$.

5) D'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(\Phi_{2n} + n\mathrm{Id}_E) = (0, 1, 2, 3, \ldots, 2n)$. Mais alors, $\mathrm{Sp}\left((\Phi_{2n} + n\mathrm{Id}_E)^2\right) = (0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, (2n)^2) = (0, 1, 4, 9, \ldots, 4n^2)$. L'endomorphisme $\Psi = (\Phi_{2n} + n\mathrm{Id}_E)^2$ de E convient.

Exercice 3

1)

1.1. • Φ est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus, pour $(u, v) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(\lambda u+\mu v)=(\lambda u_0+\mu v_0,\lambda u_1+\mu v_1,\lambda u_2+\mu v_2)=\lambda\,(u_0,u_1,u_2)+\mu\,(v_0,v_1,v_2)=\lambda\Phi(u)+\mu\Phi(v).$$

Donc, $\Phi\in\mathscr{L}\left(\mathcal{E},\mathbb{R}^3\right)$.

• Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Soit u la suite définie par $u_0=a$, $u_1=b$, $u_2=c$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}=u_n$. u est un élément de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(u)=(a,b,c)$. Ceci montre que Φ est surjective.

• Soit $u\in\mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors, $u_0=0$, $u_1=0$, $u_2=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}=u_n$. Montrons par récurrence (triple) que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$.

- Le résultat est vrai pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $u_n=u_{n+1}=u_{n+2}=0$. Alors, $u_{n+3}=u_n=0$.

On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi)=\{0\}$ et donc Φ est injectif.

• Finalement, Φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$ et en particulier une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$.

1.2. Puisque les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes, $\dim(\mathcal{E})=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=3$.

2)

2.1. Puisque Φ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^3$, Φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{E}$. L'image d'une base de $\mathbb{R}^3$ par Φ^{-1} est une base de $\mathcal{E}$. Par suite, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\left(\Phi^{-1}(e_1),\Phi^{-1}(e_2),\Phi^{-1}(e_2)\right)$ est une base de $\mathcal{E}$.

2.2. Par définition de ε_1, $\varepsilon_1(0)=1$, $\varepsilon_1(1)=0$ et $\varepsilon_1(2)=0$ puis pour $p\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_1(3p)=\varepsilon_1(0)=1$, $\varepsilon_1(3p+1)=\varepsilon_1(1)=0$ et $\varepsilon_1(3p+2)=\varepsilon_1(2)=0$. Ainsi, $\varepsilon_1=(1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\dots)$. De même, $\varepsilon_2=(0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1\dots)$ et $\varepsilon_3=(0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1\dots)$.
On a aussi $\varepsilon_1=\left(\delta_{n,3\left[\frac{n}{3}\right]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x et δ est le symbole de Kronecker. De même, $\varepsilon_2=\left(\delta_{n,3\left[\frac{n}{3}\right]+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varepsilon_3=\left(\delta_{n,3\left[\frac{n}{3}\right]+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3)

• $(\ |\ )$ est une application de $\mathcal{E}^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(u,v)\in\mathcal{E}^2$. $(u|v)=\displaystyle\sum_{i=0}^{2}u_iv_i=\sum_{i=0}^{2}v_iu_i=(v|u)$. Donc, $(\ |\ )$ est symétrique.

• Soient $(u,u',v)\in\mathcal{E}^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$((\lambda u+\mu u')|v=\sum_{i=0}^{2}\left(\lambda u_i+\mu u'_i\right)v_i=\lambda\sum_{i=0}^{2}u_iv_i+\mu\sum_{i=0}^{2}u'_iv_i=\lambda(u|v)+\mu(u'|v).$$

$(\ |\ )$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $u\in\mathcal{E}$. $(u|u)=\displaystyle\sum_{i=0}^{2}u_i^2\geqslant 0$ et de plus

$$(u|u)=0\Rightarrow\sum_{i=0}^{2}u_i^2=0\Rightarrow u_0=u_1=u_2=0\Rightarrow u\in\mathrm{Ker}(\Phi)\Rightarrow u=0.$$

Ainsi, $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive, sur $\mathcal{E}$ et donc $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

4) Pour $i\in[\![0,2]\!]$, $(\varepsilon_i|\varepsilon_i)=1^2+0^2+0^2=1$. Donc, chaque ε_i, $0\leqslant i\leqslant 2$, est unitaire.
$(\varepsilon_1|\varepsilon_2)=1\times 0+0\times 1+0\times 0=0$ et de même $(\varepsilon_1|\varepsilon_3)=(\varepsilon_2|\varepsilon_3)=0$. En résumé, $\forall(i,j)\in[\![0,2]\!]^2$, $(\varepsilon_i|\varepsilon_j)=\delta_{i,j}$. La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une famille orthonormale de l'espace euclidien $(\mathcal{E},(\ |\ ))$. De plus, $\mathrm{card}\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=3=\dim(\mathcal{E})<+\infty$ et finalement, la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $(\mathcal{E},(\ |\ ))$.

5)

5.1. Soient $u\in\mathcal{E}$ puis $w=d(u)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+3}=u_{n+4}=u_{n+1}=w_n$ et donc $w\in\mathcal{E}$. d est donc une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Soient $(u,u')\in\mathcal{E}^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(d(\lambda u+\mu u'))_n=\lambda u_{n+1}+\mu u'_{n+1}=\lambda(d(u))_n+\mu(d(u'))_n=(\lambda d(u)+\mu d(u'))_n$$

et donc $d(\lambda u+\mu u')=\lambda d(u)+\mu d(u')$. On en déduit que $d\in\mathscr{L}(\mathcal{E})$.

5.2. $d\left(\varepsilon_1\right)=(0,0,1,0,0,1,0,0,1,\dots)=\varepsilon_3$. De même, $d\left(\varepsilon_2\right)=\varepsilon_1$ et $d\left(\varepsilon_3\right)=\varepsilon_2$. Donc,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. $\chi_d = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix} = X^3 - 1$. Les racines de χ_d dans $\mathbb{C}$ sont 1, j et j^2 avec $j \notin \mathbb{R}$ et $j^2 \notin \mathbb{R}$. Donc, χ_d n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ puis d n'est pas diagonalisable.

5.4. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ puis $u = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$.

$$\begin{aligned} d(u) = u &\Leftrightarrow a\varepsilon_3 + b\varepsilon_1 + c\varepsilon_2 = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 \Leftrightarrow (a-b)\varepsilon_1 + (b-c)\varepsilon_2 + (c-a)\varepsilon_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = b - c = c - a = 0 \text{ (car } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est libre)} \\ &\Leftrightarrow a = b = c. \end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}\,(d - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \mathrm{Vect}\,((1)_{n \in \mathbb{N}}) = \{(\lambda)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\mathrm{Ker}\,(d - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$ est donc l'ensemble des suites constantes.

5.5. L'image par d de la base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est $(d(\varepsilon_1), d(\varepsilon_2), d(\varepsilon_3)) = (\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ qui est aussi une base orthonormale de $(\mathcal{E}, (\ |\ ))$. On en déduit que d est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(\mathcal{E}, (\ |\ ))$ ou encore, d est une isométrie de cet espace.

Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, $d^3(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$. L'endomorphisme d^3 de $\mathcal{E}$ coïncide avec $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ sur une base de $\mathcal{E}$ et donc $d^3 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

5.6. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ puis $u = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$. Puisque $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est orthonormale,

$$\begin{aligned} u \in H^\perp &\Leftrightarrow u \in (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^\perp \Leftrightarrow a \times 1 + b \times 1 + c \times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a + b + c = 0. \end{aligned}$$

$H^\perp$ est le plan d'équation $a + b + c = 0$. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$ puis $u = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 \in H^\perp$. $d(u) = a\varepsilon_3 + b\varepsilon_1 + c\varepsilon_2 = b\varepsilon_1 + c\varepsilon_2 + a\varepsilon_3$ avec $b + c + a = 0$. Donc, $d(u) \in H^\perp$. Ceci montre que $H^\perp$ est stable par d.

5.7. Notons d' l'endomorphisme de $H^\perp$ induit par d. d' est un automorphisme orthogonal du plan $H^\perp$ car, par restriction, d' conserve la norme. Ensuite, $d'^3 = \mathrm{Id}_{H^\perp}$ puis $(\det(d'))^3 = \det\left(d'^3\right) = \det\left(\mathrm{Id}_{H^\perp}\right) = 1$. Mais alors, $\det(d') = 1$ car $\det(d') \in \mathbb{R}$. Ainsi, d' est un automorphisme orthogonal positif du plan $H^\perp$ et donc d' est une rotation.

On fixe une orientation de $H^\perp$. On note θ l'angle de la rotation d'. Puisque $d'^3 = \mathrm{Id}_{H^\perp}$, $3\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc, en fonction de l'orientation de $H^\perp$ choisie, d' est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ ou $-\dfrac{2\pi}{3}$ (puisque $d' \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$).

Exercice 4

1) Question de cours 1 : Pour tout complexe z, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. La série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence infini.

2) Question de cours 2 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient M et N deux matrices carrées de format $d \in \mathbb{N}^*$ semblables. Donc, il existe $P \in GL_d(\mathbb{K})$ telle que $N = P^{-1}MP$. Si $p = 0$, $M^p = I_d$ et $N^p = I_d$ sont semblables car égales et si $p = 1$, $M^1 = M$ et $N^1 = N$ sont semblables.
Soit $p \geqslant 2$.

$$N^p = \left(P^{-1}MP\right)^p = \underbrace{\left(P^{-1}MP\right)\left(P^{-1}MP\right)\ldots\left(P^{-1}MP\right)\left(P^{-1}MP\right)}_{p \text{ facteurs}} = P^{-1}\underbrace{(MM\ldots MM)}_{p \text{ facteurs}}P = P^{-1}M^pP.$$

Donc les matrices M^p et N^p sont semblables.

3)

3.1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $s(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n - (-i)^n}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(i^n\right) \frac{z^n}{n!}$.
Dans cette somme, si $n = 2p$ est pair, $i^n = i^{2p} = (-1)^p$ est réel et donc $\mathrm{Im}\left(i^n\right) = 0$. Il reste

$$
\begin{aligned}
s(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\left(i^{2p+1}\right) \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\left((-1)^p i\right) \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}.
\end{aligned}
$$

3.2. De même, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $c(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!}$.

4) Pour tout entier naturel n, $A^{2n+1} = \gamma^{2n+1} I_2$. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \\ x & \mapsto & xI_2 \end{array}$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie. Donc,

$$
\begin{aligned}
\varphi(A) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\gamma^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) I_2 \right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\gamma^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\gamma^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) I_2 = s(\gamma) I_2 = \begin{pmatrix} s(\gamma) & 0 \\ 0 & s(\gamma) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5)

5.1. On suppose que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres distinctes α et β dans $\mathbb{C}$. A est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ puis il existe $P \in GL_2(C)$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\alpha, \beta) = B$.

5.2. $\varphi(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathrm{diag}(\alpha, \beta)^{2n+1} = \mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \mathrm{diag}(s(\alpha), s(\beta))$.

Ensuite, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Puisque $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est de dimension finie, f est continu sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\varphi(A) = \varphi\left(PBP^{-1}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(PBP^{-1}\right)^{2k+1} \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(P \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} B^{2k+1} \right) P^{-1} \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} f\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} B^{2k+1} \right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} B^{2k+1} \right) \text{ (par continuité de f)} \\
&= f(\varphi(B)) = P\mathrm{diag}(s(\alpha), s(\beta))P^{-1}.
\end{aligned}
$$

6)

6.1. On sait que tout élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est triangulable. Donc, il existe une matrice triangulaire supérieure C et une matrice inversible Q telles que $C = Q^{-1}AQ$. De plus, $\chi_C = \chi_A = (X - \alpha)^2$ et donc C est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{C}$.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $C = \alpha I_2 + yE_{1,2}$. Puisque les matrices αI_2 et $yE_{1,2}$ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire, en tenant compte du fait que $E_{1,2}^2 = 0$,

$$
\begin{aligned}
C^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha I_2)^{n-k} (yE_{1,2})^k = (\alpha I_2)^n (yE_{1,2})^0 + n (\alpha I_2)^{n-1} (yE_{1,2})^1 \\
&= \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1} y E_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, $C^0 = I_2$.

6.3. Comme à la question 5.2, $\varphi(A) = \varphi\left(QCQ^{-1}\right) = Q\varphi(C)Q^{-1}$ (par continuité de f) avec

$$\varphi(C)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}C^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\begin{pmatrix}\alpha^{2n+1} & (2n+1)\alpha^{2n}y\\ 0 & \alpha^{2n+1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} & \displaystyle y\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}\\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s(\alpha) & yc(\alpha)\\ 0 & s(\alpha)\end{pmatrix}.$$

Donc, $\varphi(A)=Q\begin{pmatrix}s(\alpha) & yc(\alpha)\\ 0 & s(\alpha)\end{pmatrix}Q^{-1}$.

7) Un élément A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a soit deux valeurs propres distinctes, soit une valeur propre double. Dans les deux cas, $\varphi(A)$ existe d'après les questions 5 et 6.

8) Soit X une éventuelle solution de l'équation proposée. Posons $T=\begin{pmatrix}1 & 2019\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

• Si X admet deux valeurs propres distinctes α et β, $\varphi(X)$ est semblable à $\text{diag}(s(\alpha),s(\beta))$ d'après la question 5. Puisque $\varphi(X)=T$, T est semblable à $\text{diag}(s(\alpha),s(\beta))$. Les matrices T et $\text{diag}(s(\alpha),s(\beta))$ doivent avoir les mêmes valeurs propres ce qui entraîne $s(\alpha)=s(\beta)=1$. Mais alors, T est semblable à I_2 et donc égale à I_2 ce qui est faux. Donc, X ne peut avoir deux valeurs propres distinctes.

• Si X admet une valeur propre double α, $T=\varphi(X)$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}s(\alpha) & yc(\alpha)\\ 0 & s(\alpha)\end{pmatrix}$. Encore une fois, on a nécessairement $s(\alpha)=1$. Mais alors

$$(c(\alpha))^2=\frac{1}{4}\left(e^{2i\alpha}+2+e^{-2i\alpha}\right)=\frac{1}{4}\left(4+e^{2i\alpha}-2+e^{-2i\alpha}\right)=1-\left(\frac{1}{2i}\left(e^{-\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\right)^2=1-(s(\alpha))^2=0.$$

Encore une fois, T est semblable à $\text{diag}(1,1)=I_2$ et donc égale à I_2 ce qui est faux.

Donc, il n'existe pas de matrice X telle que $\varphi(X)=T$.

