Epreuve de Mathématiques 2 MP

Partie I

1)

1.1. tr est une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Soient $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. En posant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B).$$

Ceci montre que tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. En posant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right)}_{\text{coef ligne i, colonne i de } AB} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,j}\right)}_{\text{coef ligne j, colonne j de } BA} = \text{tr}(BA).$$

1.3. Soient $(A, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \text{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \text{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \text{Tr}(A).$$

Ceci montre que deux matrices semblables ont même trace.

2)

2.1. Par hypothèse, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. On sait que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc une matrice inversible C à coefficients réels telle que $C^{-1}AC = D$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

2.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $C^{-1}A^kC = D^k$ et en particulier, les matrices A^k et $D^k = \text{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)$ sont semblables. D'après la question 1.3., $\text{tr}\left(A^k\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Partie II

1) Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(X-a)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^kX^{m-1-k}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(a^kX^{m-k} - a^{k+1}X^{m-(k+1)}\right) \\ &= a^0X^{m-0} - a^{(m-1)+1}X^{m-(m-1+1)} \text{ (somme télescopique)} \\ &= X^m - a^m.\end{aligned}$$

2) $Q' = b_n \sum_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)' \prod_{j\neq i} (X-\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} b_n \prod_{j\neq i} (X-\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q}{X-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i.$

3) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}Q_i(X) = \frac{Q(X)}{X-\alpha_i} = \frac{Q(X) - Q(\alpha_i)}{X-\alpha_i} &= \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X-\alpha_i} = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X-\alpha_i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_i^{k-1-r}X^r = \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{k=r+1}^{n} b_k\alpha_i^{k-1-r}\right)X^r \\ &= \sum_{r'=1}^{n}\left(\sum_{k=r'}^{n} b_k\alpha_i^{k-1-(r'-1)}\right)X^{r'-1} \text{ (en posant } r' = r+1) \\ &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=r}^{n} b_k\alpha_i^{k-r}\right)X^{r-1}\end{aligned}$$

4) Soit $r \in [\![1, r]\!]$. $Q' = \sum_{k=1}^{n} kb_kX^{k-1}$ et donc, rb_r est le coefficient de X^{r-1} dans Q'. Mais d'autre part, d'après les questions 2 et 3,

$$\begin{aligned}Q' &= \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=r}^{n} b_k\alpha_i^{k-r}\right)X^{r-1}\right) = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=r}^{n} b_k\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k-r}\right)\right)X^{r-1}\\ &= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{k=r}^{n} b_kT_{k-r}\right)X^{r-1}\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que pour $r \in [\![1, n]\!]$, en posant $j = k - r$,

$$rb_r = \sum_{k=r}^{n} b_kT_{k-r} = \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r}T_j$$

5) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En appliquant les égalités précédentes avec $r = n - k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{k} b_{n-k+j}T_j = (n-k)b_{n-k}$$

puis

$$T_k = \frac{1}{b_n}\left((n-k)b_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j}T_j\right).$$

6)

6.1. Soit $k \geqslant n$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} b_jT_{k-n+j} &= \sum_{j=0}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k-n+j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\alpha_i^{k-n+j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k-n}\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\alpha_i^{j}\right) \text{ (car } k \geqslant n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k-n}Q\left(\alpha_i\right) = 0.\end{aligned}$$

6.2. Par suite, si $k \geqslant n$, $T_k = -\frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{n-1} b_jT_{k-n+j} = -\frac{1}{b_n}\sum_{j=k-n}^{k-1} b_{k-n+j}T_j$.

7) En résumé, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k = \begin{cases} n \text{ si } k = 0\\ \dfrac{1}{b_n}\left((n-k)b_{n-k} - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j}T_j\right) \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant n-1\\ -\dfrac{1}{b_n}\displaystyle\sum_{j=k-n}^{k-1} b_{k-n+j}T_j \text{ si } k \geqslant n\end{cases}.$$

Si on pose $b_{-1} = b_{-2} = \ldots = 0$, on peut résumer en

$$\forall k \in \mathbb{N},\ T_k = \begin{cases} n \text{ si } k = 0\\ \dfrac{1}{b_n}\left((n-k)b_{n-k} - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} b_{n-k+j}T_j\right) \text{ si } k \geqslant 1\end{cases}.$$

Partie III

1) En posant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} -S_1 \\ -S_2 \\ \vdots \\ -S_n \end{pmatrix}$, le système linéaire (Σ), d'inconnue U, s'écrit encore $AU = S$ où A est de la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & n \end{pmatrix}$. La matrice A est inversible car triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous non nuls. On en déduit que le système (Σ) est un système de CRAMER et donc que le système (Σ) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}^n$.

2) D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on sait que $S_1 = -a_{n-1}$. L'égalité $u_1 = -S_1$ fournit $u_1 = a_{n-1}$.

De même, $a_{n-2} = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left((\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^2 - \left(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2\right)\right) = \frac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right)$. L'égalité $2u_2 + u_1 S_1 + S_2 = 0$ fournit

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(u_1 S_1 + S_2\right) = \frac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right) = a_{n-2}.$$

3) Avec les notations des questions 5 et 6 de la partie II, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} b_{n-k+j} T_j = (n-k) b_{n-k}$. Avec les notations de cette partie, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, cela donne, en tenant compte de $a_n = 1$ et $S_0 = n$,

$$(n-k)a_{n-k} = \sum_{j=0}^{k} a_{n-k+j} S_j = S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \ldots + a_{n-k+1} S_1 + n a_{n-k},$$

et donc

$$S_k + a_{n-1} S_{k-1} + \ldots + a_{n-k+1} S_1 + k a_{n-k} = 0.$$

D'autre part, on rappelle que $a_{n-1} + S_1 = 0$. Ainsi, le n-uplet $(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n) = (a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ est solution du système (Σ).

4) Par unicité de la solution, $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0) = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ ou encore $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = a_{n-k}$.

Partie IV

1) P est le polynôme caractéristique de A. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $P(A) = 0_n$.

2) $a_0 = P(0) = \chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$ et donc $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a_0 \neq 0$.

3) On suppose donc $a_0 \neq 0$. L'égalité $P(A) = 0_n$ s'écrit plus explicitement $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n$ puis

$$I_n = -\frac{1}{a_0}\left(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A\right) = -\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n\right) A.$$

Donc, $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 I_n\right)$. En particulier, A^{-1} est un polynôme en A.

4)

4.1. L'égalité est vraie quand $k = 1$ car $B_1 = A + d_1 I_n$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i} &= d_1 A^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} \left(B_i - B_{i-1}A\right) A^{k-i} = d_1 A^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} \left(B_i A^{k-i} - B_{i-1} A^{k-(i-1)}\right) \\ &= d_1 A^{k-1} + \left(B_k - B_1 A^{k-1}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= B^k - \left(B_1 - d_1 I_n\right) A^{k-1} = B^k - A \times A^{k-1} \\ &= B^k - A^k.\end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$.

4.2. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{aligned} d_k &= -\frac{1}{k}\mathrm{tr}\left(B_{k-1}A\right) = -\frac{1}{k}\mathrm{tr}\left(B_k - d_k I_n\right) = -\frac{1}{k}\mathrm{tr}\left(A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i} - d_k I_n\right) \\ &= -\frac{1}{k}\mathrm{tr}\left(A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i}\right) = -\frac{1}{k}\left(\mathrm{tr}\left(A^k\right) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \mathrm{tr}\left(A^{k-i}\right)\right). \end{aligned}$$

4.3.a. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

Ainsi, $d_1 + S_1 = d_1 - \mathrm{Tr}(A) = 0$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\begin{aligned} S_k + d_1 S_{k-1} + d_2 S_{k-2} + \ldots + d_{k-1} S_1 + k d_k &= -\mathrm{Tr}\left(A^k\right) - d_1 \mathrm{Tr}\left(A^{k-1}\right) - d_2 \mathrm{Tr}\left(A^{k-2}\right) - \ldots - d_{k-1}\mathrm{Tr}\left(A\right) + k d_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $(d_1, \ldots, d_n) = (u_1, \ldots, u_n) = (a_n, \ldots, a_1)$ d'après les questions 1 et 4 de la partie III. On a montré que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d_k = a_{n-k}$.

4.3.b. D'après la question 3 de cette partie,

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= A^{n-1} + d_1 A_{n-2} + d_2 A_{n-3} + \ldots + d_{n-2} A + d_{n-1} I_n \\ &= A^{n-1} + a_{n-1} A_{n-2} + a_{n-2} A_{n-3} + \ldots + a_2 A + a_1 I_n = -a_0 A^{-1}. \end{aligned}$$

4.3.c. $B_n = B_{n-1}A + d_n I_n = -a_0 A^{-1} A + a_0 I_n = 0_n$. Mais ceci était prévisible car

$$B_n = A^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} A^{n-i} = A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = P(A) = 0_n.$$

5) • $a_3 = d_1 = -\mathrm{Tr}(A) = -1$ puis $B_1 = A + d_1 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• $d_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(B_1 A\right)$ avec

$$B_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Donc, $a_2 = d_2 = -\frac{1}{2}(2+4+3+5) = -7$ et $B_2 = B_1 A + d_2 I_4 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

• $d_3 = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(B_2 A\right)$ avec

$$B_2 A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $a_1 = d_3 = -\frac{1}{3}(-5+0+3-1) = 1$ et $B_3 = B_2 A + d_3 I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• $d_4 = -\dfrac{1}{4}\text{tr}\,(B_3A)$ avec

$$B_3A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Donc, $a_0 = d_4 = -\dfrac{1}{4}(-8-8-8-8) = 8$.

Par suite, $\chi_A = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8$ et $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}B_3 = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8 \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6)

6.1.

• fonction1 prend en argument deux matrices carrées (listes de listes) A et B de même format n et retourne leur produit $A \times B$.
• fonction2 prend en argument un réel x et un entier n et retourne la matrice carrée xI_n.
• fonction3 prend en argument une matrice carrée A et retourne sa trace $\text{tr}(A)$.
• fonction4 prend en argument une matrice carrée A et un réel x et retourne la matrice carrée xA.
• fonction5 prend en argument deux matrices carrées A et B de même format n et retourne leur somme $A + B$.

6.2. Programme complété.

```python
d=[1]
A=[[1,0,-1,1],[0,0,0,2],[-1,0,-1,0],[1,2,0,1]]
n=len(A)
dk=-fonction3(A)
Bk=fonction5(A,fonction2(dk,n))
for k in range(2,n+1)
    dk=-1/k*fonction3(fonction1(B,A))
    Bk=fonction5(fonction1(B,A),fonction2(dk,n))
    d=d.append(dk)
print("Les coefficients du polynôme caractéristique, dans l'ordre décroissant des puissances sont :",d)
```

