Epreuve de Mathématiques 1 MP

Exercice 1

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(x)| = \frac{|\alpha|^n |\cos(nx)|}{n!} \leqslant \frac{|\alpha|^n}{n!}.$$

La série de terme général $\dfrac{|\alpha|^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme $e^{|\alpha|}$). Donc, la série de terme général $u_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et en particulier converge. Par suite, $C(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

La fonction C est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ et donc

$$\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{|\alpha|^n}{n!}.$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{|\alpha|^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général $\|u_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$. La série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et en particulier la série de fonctions de terme général u_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
C(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right)}{n!} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n e^{inx}}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{\alpha e^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\alpha\cos(x) + i\alpha\sin(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\alpha\cos(x)}\left(\cos(\alpha\sin(x)) + i\sin(\alpha\sin(x))\right)\right) \\
&= e^{\alpha\cos(x)}\cos(\alpha\sin(x)).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = e^{\alpha\cos(x)}\cos(\alpha\sin(x)).}$$

4)

4.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La série de fonctions de terme général u_p, $p \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers la fonction C sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur le segment $[-\pi, \pi]$. Puisque chaque fonction u_p est continue sur $[-\pi, \pi]$, la fonction C est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$. Par suite, les deux fonctions $x \mapsto \sin(nx)C(x)$ et $x \mapsto \cos(nx)C(x)$ sont continues sur le segment $[-\pi, \pi]$. On en déduit que J_n et I_n existent dans $\mathbb{R}$.

La fonction C est paire et donc la fonction $x \mapsto \sin(nx)C(x)$ est impaire. On en déduit que $J_n = 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [-\pi, \pi]$, posons

$$v_p(x) = \cos(nx)u_p(x) = \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}.$$

Comme à la question 2, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|v_p\|_\infty \leqslant \dfrac{|\alpha|^p}{p!}$. La série de fonctions de terme général v_p, $p \in \mathbb{N}$, est normalement convergente et en particulier uniformément convergente sur le segment $[-\pi, \pi]$.

En résumé,

- chaque fonction v_p, $p \in \mathbb{N}$, est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$,
- la série de fonctions de terme général v_p, $p \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers la fonction C sur le segment $[-\pi, \pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} v_p(x)\right) dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\alpha^p}{p!}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(px)\ dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\alpha^p}{p!}\times\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x)+\cos((n-p)x))\ dx.$$

Ensuite, si $p \neq n$, alors $n-p\neq 0$ et $n+p \geqslant 1 > 0$. Donc,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x)+\cos((n-p)x))\ dx = \left[\frac{\sin((n+p)x)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)x)}{n-p}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Si $p = n \neq 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2nx)\ dx = \left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ puis

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x)+\cos((n-p)x))\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n-n)x)\ dx = \pi.$$

Si $p = n = 0$, $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x)+\cos((n-p)x))\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$. Par suite,

$$\boxed{I_0 = 2\pi \text{ et si } n \neq 0,\ I_n = \frac{\pi\alpha^n}{n!}.}$$

4.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ et d'autre part, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(nx) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2nx))$, $S(x)$ existe (les deux séries ci-dessous étant convergentes) puis (les deux séries ci-dessous étant convergentes),

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha^n\cos(n(2x))}{n!}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x}+C(2x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x}+e^{\alpha\cos(2x)}\cos(\alpha\sin(2x))\right). \end{aligned}$$

Exercice 2

1)

1.1 u est une application de E_2 dans lui-même.
Soient $(A, A') \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Pour $j \in [\![1,2]\!]$, la j-ème colonne de $u(\lambda A+\mu A')$ est

$$\sum_{k=1,\ k\neq j}^{2}(\lambda A_k+\mu A'_k) = \lambda\sum_{k=1,\ k\neq j}^{2} A_j + \mu\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n} A'_j.$$

Pour tout $j \in [\![1,2]\!]$, cette colonne est la j-ème colonne de $\lambda B+\mu B' = \lambda u(A)+\mu u(A')$. Donc, $u(\lambda A+\mu A') = \lambda u(A)+\mu u(A')$.
On a montré que $u \in \mathscr{L}(E_2)$.

1.2 $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ puis $u(K_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = K_3$. $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ puis $u(K_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = K_4$.
$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ puis $u(K_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = K_1$. $K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ puis $u(K_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = K_2$.

La matrice demandée est : $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

En effectuant sur les colonnes de $\det(M)$ les deux transpositions $C_1 \leftrightarrow C_3$ et $C_2 \leftrightarrow C_4$, on obtient

$$\det(M) = (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc, $\det(u) \neq 0$ puis $u \in GL(E_2)$.

1.3 Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $u^2(K_i) = K_i$. L'endomorphisme u^2 coïncide avec Id_{E_2} sur une base de E_2 et donc $u^2 = Id_{E_2}$. On sait alors que u est une symétrie de E_2. Ses éléments caractéristiques $F = \text{Ker}(u - Id_{E_2})$ et $G = \text{Ker}(u + Id_{E_2})$.

$K_1 + K_3$ et $K_2 + K_4$ sont deux éléments de E_2 non colinéaires et invariants par u. Donc, $F = \text{Vect}(K_1 + K_3, K_2 + K_4)$. F est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

$K_1 - K_3$ et $K_2 - K_4$ sont deux éléments de E_2 non colinéaires et changés en leur opposé par u. Donc, $G = \text{Vect}(K_1 - K_3, K_2 - K_4)$. G est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$.

2) Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors $u(A) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$ puis

$$\det(u(A)) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad = -\det(A).$$

Si $A = (A_1, A_2, A_3) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, alors $u(A) = (A_2 + A_3, A_3 + A_1, A_1 + A_2)$ puis, par tri-linéarité,

$$\begin{aligned}
\det(u(A)) &= \det(A_2, A_3, A_1) + \det(A_2, A_3, A_2) + \det(A_2, A_1, A_1) + \det(A_2, A_1, A_2) \\
&\quad + \det(A_3, A_3, A_1) + \det(A_3, A_3, A_2) + \det(A_3, A_1, A_1) + \det(A_3, A_1, A_2) \\
&= \det(A_2, A_3, A_1) + \det(A_3, A_1, A_2) = +\det(A_1, A_2, A_3) + \det(A_1, A_2, A_3) \\
&= 2\det(A).
\end{aligned}$$

3) $\det(u(A)) = \det(S - A_1, S - A_2, \dots, S - A_n)$. Quand on développe ce déterminant par n-linéarité, on obtient une somme de 2^n déterminants. Dans cette somme, quand un déterminant a deux fois la colonne S, il est nul. Il reste

$$\begin{aligned}
\det(u(A)) &= \det(-A_1, -A_2, \dots, -A_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(-A_1, \dots, -A_{j-1}, S, -A_{j+1}, \dots, -A_n) \\
&= (-1)^n \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \det(A_1, \dots, A_{j-1}, S, A_{j+1}, \dots, A_n) \\
&= -(-1)^{n-1} \det(A) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \det(A_1, \dots, A_{j-1}, S, A_{j+1}, \dots, A_n).
\end{aligned}$$

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on effectue sur le déterminant $\det(A_1, \dots, A_{j-1}, S, A_{j+1}, \dots, A_n)$ la transformation $C_j \leftarrow C_j - \sum_{i \neq j} C_i$, ce qui ne modifie pas la valeur du déterminant. On obtient pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\det(A_1, \dots, A_{j-1}, S, A_{j+1}, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) = \det(A).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\det(u(A)) &= -(-1)^{n-1} \det(A) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \det(A) = -(-1)^{n-1} \det(A) + (-1)^{n-1} n \det(A) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)\det(A).
\end{aligned}$$

4)

4.1 Soit $j \in [\![1,n]\!]$. La j-ème colonne de $u(A)$ est $S - A_j$ où $S = \sum_{k=1}^{n} A_k$. La j-ème colonne de $u^2(A)$ est $S' - (S - A_j)$ où

$$S' = \sum_{k=1}^{n} (S - A_k) = nS - S = (n-1)S.$$

La j-ème colonne de $u^2(A)$ est donc $(n-2)S + A_j = (n-2)(S - A_j) + (n-1)A_j$. Cette j-ème colonne est aussi la j-ème colonne de $(n-2)u(A) + (n-1)A$ et donc

$$\forall A \in E_n,\ u^2(A) = (n-2)u(A) + (n-1)A$$

ou encore

$$u^2 - (n-2)u - (n-1)\mathrm{Id}_{E_2} = 0.$$

Le polynôme $P = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est annulateur de u.

4.2 Ce trinôme admet le réel $\lambda_1 = -1$ pour racine et donc aussi le réel $\lambda_2 = n-1$. De plus, pour $n \geqslant 2$, $\lambda_2 \geqslant 1 > -1 = \lambda_1$. Donc, le polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de u. On sait alors que u est diagonalisable.

Les valeurs propres de u sont racines d'un polynôme annulateur et donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, n-1\}$.

• Pour $A \in E_n$, $u(A) = -A \Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!],\ S - A_j = -A_j \Leftrightarrow S = 0$. $E_{\lambda_1}(u)$ est l'ensemble des matrices carrées dont la somme des colonnes est nulle. En particulier, $E_{\lambda_1}(u) \neq \{0\}$ (car $n \geqslant 2$) et donc $\lambda_1 = -1$ est effectivement valeur propre de u.

• Pour $A \in E_n$, $u(A) = (n-1)A \Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!],\ S - A_j = (n-1)A_j \Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!],\ A_j = \dfrac{1}{n}S$. Ceci impose à toutes les colonnes de A d'être égales. Mais réciproquement, si toutes les colonnes de A sont égales, alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ A_j = \dfrac{1}{n}S$ puis $u(A) = (n-1)A$. $E_{\lambda_2}(u)$ est l'ensemble des matrices carrées dont toutes les colonnes sont les mêmes. En particulier, $E_{\lambda_2}(u) \neq \{0\}$ et donc $\lambda_2 = n-1$ est effectivement valeur propre de u.

Finalement, $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, n-1\}$.

5)

5.1 Soit $A \in E_n$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. La j-ème colonne AJ_n est S et la j-ème colonne $-I_nA$ est $-A_j$. Donc, la j-ème colonne de AU_n est $S - A_j$. Ceci montre que $u(A) = AU_n$.

5.2 Pour tout $A \in E_n$, $u^2(A) = u(A)U_n = AU_n^2$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j, de J_n^2 est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$. Donc, $J_n^2 = nJ_n$ puis, puisque J_n et $-I_n$ commutent,

$$U_n^2 = (J_n - I_n)^2 = J_n^2 - 2J_n + I_n = (n-2)J_n + I_n = (n-2)\left(U_n + I_n\right) + I_n = (n-2)U_n + (n-1)I_n.$$

On en déduit que pour tout $A \in E_n$,

$$u^2(A) = AU_n^2 = (n-2)AU_n + (n-1)A = (n-2)u(A) + (n-1)A$$

et donc que $u^2 = (n-2)u + (n-1)\mathrm{Id}_{E_n}$. On retrouve le fait que le polynôme $u^2 - (n-2)X - (n-1)$ est annulateur de u.

Exercice 3

1)

1.1 Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1.2 Soit f une éventuelle solution de $(\mathscr{P})$ (erreur d'énoncé). Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$\int_0^x (t+x)f(x-t)\ dt = \int_x^0 (x-u+x)f(u)\ (-du) = 2x\int_0^x f(u)\ du - \int_0^x uf(u)\ du = 2xF(x) - \int_0^x uf(u)\ du \quad (*).$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)\ du$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction $x \mapsto 1 - \left(2xF(x) - \displaystyle\int_0^x uf(u)\ du\right) = 1 - \displaystyle\int_0^x (t+x)f(x-t)\ dt$. Mais alors, puisque f est solution de $(\mathscr{P})$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f une éventuelle solution de $(\mathscr{P})$. D'après la question précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ensuite, $f(0) = 1 - \displaystyle\int_0^0 (t+0)f(-t)\ dt = 1$. Ensuite, en tenant compte de $(*)$, en dérivant les deux membres de (E_1), on obtient pour tout réel x,

$$f'(x) = 0 - 2(F(x) + xf(x)) + xf(x) = -2\int_0^x f(u)\ du - xf(x)$$

et donc, $f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\ du = 0$. Donc, f est solution de $(\mathscr{P}_1)$.

Réciproquement, soit f une éventuelle solution de $(\mathscr{P}_1)$. La fonction f est en particulier continue sur $\mathbb{R}$. En intégrant l'égalité de la deuxième condition, il existe une constante C telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = -2xF(x) + \int_0^x uf(u)\ du + C = \int_0^x (t+x)f(x-t)\ dt + C.$$

En évaluant en 0, on obtient $C = 1$ et donc, pour tout réel x, $f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)f(x-t)\ dt$ et donc f est solution de $(\mathscr{P})$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ensuite, puisque $F' = f$, f est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si F est solution de $(\mathscr{P}_2)$.

4)

4.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle on suppose à priori que $R_a > 0$. Pour $x \in]-R_a, R_a[$, on pose $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pour $x \in]-R_a, R_a[$,

$$\begin{aligned}
H''(x) + xH'(x) + 2H(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\left((n+1)a_{n+2} + a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

Ensuite, toujours sous l'hypothèse $R_a > 0$,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-R_a, R_a[,\ H''(x) + xH'(x)_2H(x) = 0 \text{ et } H(0) = 0 \text{ et } H'(0) = 1 \\
&\qquad\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\left((n+1)a_{n+2} + a_n\right) = 0 \\
&\qquad\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1} \text{ (car } n+2 \neq 0).
\end{aligned}$$

4.2 Ensuite,

$$\begin{aligned}
a_0 = 0 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1} &\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = -\frac{1}{2p}a_{2p-1} \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0 \text{ et } a_1 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \left(-\frac{1}{2p}\right)\left(-\frac{1}{2p-2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}\right)a_1 \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = (-1)^p\frac{1}{2^p p!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse $R_a > 0$, H est solution sur $]-R_a, R_a[$ si et seulement si pour tout réel $x \in]-R_a, R_a[$, $H(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2^p p!}x^{2p+1} = x\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^p$. Maintenant, pour tout réel x, la série précédente converge et a pour somme $xe^{-x^2/2}$. On en déduit en particulier que $R_a = +\infty$

Ceci valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$. Il existe une et une seule fonction H solution du problème posé sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2^p p!}x^{2p+1} = xe^{-x^2/2}.$$

5) Les deux fonctions $a\ :\ x \mapsto x$ et $b\ :\ x \mapsto 2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème de Cauchy, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une solution y sur $\mathbb{R}$ et une seule vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$. F vérifie de plus $F(0) = 0$.

Donc, F est solution du problème $(\mathscr{P})$ si et seulement si F est solution sur $\mathbb{R}$ de : $y(0)=0$ et $y'(0)=1$ et $y''+2xy'+y=0$. Ceci équivaut à $F=H$ par unicité de la solution au problème de CAUCHY en $(0,0,1)$.

En résumé : f solution de $(\mathscr{P}) \Leftrightarrow F$ solution de $(\mathscr{P})_2 \Leftrightarrow F=H$. Dans ce cas, pour tout réel x,

$$f(x)=H'(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2}.$$

Réciproquement, la primitive de la fonction f ci-dessus qui s'annule en 0 est $F\ :\ x\mapsto xe^{-x^2/2}$. F est solution de $(\mathscr{P}_2)$ et donc f est solution de $(\mathscr{P})$.

Le problème $(\mathscr{P})$ admet une solution et une seule, à savoir la fonction $f\ :\ x\mapsto\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2}$.

Exercice 4

Question de cours. $E^\perp=\{0\}$ ou encore $\dim\left(E^\perp\right)=0$.

1) Soit $P\in E$. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour tout réel x,

$$u(P)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 t^{n-k}P(t)\ dt\right)x^k.$$

Ceci montre que $u(P)\in E$. Donc, u est bien une application de E dans E.

Soient $(P,Q)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout réel x,

$$u(\lambda P+\mu Q)(x)=\int_0^1(x+t)^n(\lambda P(t)+\mu Q(t))\ dt=\lambda\int_0^1(x+t)^nP(t)\ dt+\mu\int_0^1(x+t)^nQ(t)\ dt=(\lambda u(P)+\mu u(Q))(x)$$

et donc $u(\lambda P+\mu Q)=\lambda u(P)+\mu u(Q)$. Ceci montre que $u\in\mathscr{L}(E)$.

Soit $P\in E$.

$$\begin{aligned}
p\in\mathrm{Ker}(u) &\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 t^{n-k}P(t)\ dt\right)x^k=0\\
&\Rightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ \binom{n}{k}\left(\int_0^1 t^{n-k}P(t)\ dt\right)=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \int_0^1 t^{n-k}P(t)\ dt=0\\
&\Rightarrow \forall k\in[\![0,n]\!],\ \langle P|X^{n-k}\rangle=0\Rightarrow\forall k\in[\![0,n]\!],\ \langle P|X^k\rangle=0\\
&\Rightarrow P\in\left(X^0,X^1,\dots,X^n\right)^\perp\Rightarrow P\in\left(\mathrm{Vect}\left(X^0,X^1,\dots,X^n\right)\right)^\perp\\
&\Rightarrow P\in E^\perp\Rightarrow P=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u)=\{0\}$. Puisque E est de dimension finie et que $u\in\mathscr{L}(E)$, on en déduit que $u\in GL(E)$.

2)

2.1 Soit $(p,q)\in[\![0,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
\langle u\left(X^p\right)|X^q\rangle &=\int_0^1\left(\int_0^1(x+t)^nt^p\ dt\right)x^q\ dx=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\int_0^1 t^{n-k+p}\ dt\right)x^q\ dx\\
&=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n+p+1-k}\right)x^q\ dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{n+p+1-k}\int_0^1 x^{k+q}\ dx\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)}.
\end{aligned}$$

2.2 Soit $(p,q)\in[\![0,n]\!]^2$. En posant $k'=n-k$, on obtient

$$\langle u(X^p)|X^q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+q+1)(n+p+1-k)} = \sum_{k'=0}^{n} \frac{\binom{n}{n-k'}}{(n-k'+q+1)(n+p+1-(n-k'))}$$
$$= \sum_{k'=0}^{n} \frac{\binom{n}{k'}}{(k'+p+1)(n+q+1-k')} = \langle u(X^q)|X^p\rangle = \langle X^p|u(X^q)\rangle.$$

Plus généralement, soient $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p$ et $Q = \sum_{q=0}^{n} b_q X^q$ deux éléments de E.

$$\langle u(P)|Q\rangle = \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} a_p b_q \langle u(X^p)|X^q\rangle = \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} a_p b_q \langle X^p|u(X^q)\rangle$$
$$= \langle P|u(Q)\rangle.$$

Donc, u est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

3) Soit $y \in \mathbb{R}$. Le polynôme $Q_y\ :\ x \mapsto (x+y)^n$ est un élément de E. Puisque $(P_j)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, on sait que

$$Q_y = \sum_{j=0}^{n} \langle Q_y|P_j\rangle P_j$$

avec $\langle Q_y|P_j\rangle = \int_0^1 (t+y)^n P_j(t)\ dt = u(P_j)(y) = \lambda_j P_j(y)$. Donc, $Q_y = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j$ ou encore

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(x) P_j(y).$$

4) 1 ère solution. La trace de u est la somme de ses valeurs propres : $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j$. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$2^n x^n = (x+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j^2(x).$$

Or, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^1 P_j^2(x)\ dx = \|P_j\|^2 = 1$ et donc

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \int_0^1 P_j^2(x)\ dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j^2(x)\right) dx = 2^n \int_0^1 x^n\ dx$$
$$= \frac{2^n}{n+1}.$$

2ème solution. D'après la question 2, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $u(X^p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n+p+1-k} X^k$. En particulier, le coefficient de X^p dans $u(X^p)$ est $\frac{\binom{n}{p}}{n+1}$. Donc, les coefficients diagonaux de la matrice de u dans la base canonique de E sont les nombres $\frac{\binom{n}{p}}{n+1}$, $0 \leqslant p \leqslant n$. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\binom{n}{p}}{n+1} = \frac{1}{n+1}(1+1)^n = \frac{2^n}{n+1}.$$

5)

5.1 Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
u\left(Q_y\right)(y) &= \int_0^1 (y+t)^n (t+y)^n \, dt = \int_0^1 (t+y)^{2n} \, dt = \left[\frac{(t+y)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{(y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

5.2 On sait que $\operatorname{Tr}\left(u^2\right) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2$.

D'après la question précédente,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 Q_y(y) \, dy &= \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \left((y+1)^{2n+1} - y^{2n+1}\right) dy = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \left((2^{2n+2} - 1) - (1 - 0)\right) \\
&= \frac{2^{2n+1} - 1}{(n+1)(2n+1)}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $Q_y(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(x) P_j(y)$ puis

$$
u\left(Q_y\right)(x) = u\left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) P_j\right)(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(y) u\left(P_j\right)(x) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j(y) P_j(x).
$$

Par suite, pour tout réel y, $u\left(Q_y\right)(y) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j^2(y)$ puis,comme à la question 4,

$$
\operatorname{Tr}\left(u^2\right) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 = \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j^2 P_j^2(y)\right) dy = \int_0^1 Q_y(y) \, dy = \frac{2^{2n+1} - 1}{(n+1)(2n+1)}.
$$

