Concours ENSAM - ESTP - POLYTECH

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Partie I

1) Si P est un polynôme de degré au plus n, alors $\varphi(P)$ est un polynôme de degré au plus n et donc φ induit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même notée φ_n.

Soient $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_n(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) - (\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') = \lambda_1(P_1 - P_1') + \lambda_2(P_2 - P_2') = \lambda_1 \varphi_n(P_1) + \lambda_2 \varphi_n(P_2).$$

Donc, $\varphi_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2) $\varphi_n(1) = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_n\left(X^k\right) = X^k - kX^{k-1}$. Donc, si $\mathscr{B}_0 = (1, X, \dots, X^n)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

3) On en déduit que $\chi_{\varphi_n} = (X-1)^{n+1}$ ou encore φ_n admet 1 pour valeur propre d'ordre $n+1$. Le sous-espace propre associé $E_1(\varphi_n)$ est constitué des éléments P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P - P' = P$ ou encore $P' = 0$. Donc, $E_1(\varphi_n) = \mathbb{R}_0[X]$.

Si $n = 0$, $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_0[X]}$ et en particulier, φ_0 est diagonalisable.
Si $n \geqslant 1$, la dimension de $E_1(\varphi_n)$, à savoir 1, est strictement plus petite que l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1, à savoir $n+1$ et en particulier, φ_n n'est pas diagonalisable.

4) 0 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme φ_n et donc, puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. $\dfrac{X^i}{i!}$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque φ_n est une bijection, il existe un polynôme s_i et un seul dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.

(b) La famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, de degrés deux à deux distincts et donc la famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\mathrm{card}\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$ et donc la famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Mais alors, $(s_0, \dots, s_n) = \varphi_n^{-1}(\mathscr{B})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ en tant qu'image de la base $\mathscr{B}$ par l'automorphisme φ_n^{-1}.

6) Pour tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\delta^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$ et donc $\delta^{n+1} = 0$. Puisque Id et δ commutent,

$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \dots + \delta^n) = \mathrm{Id} - \delta^{n+1} = \mathrm{Id}.$$

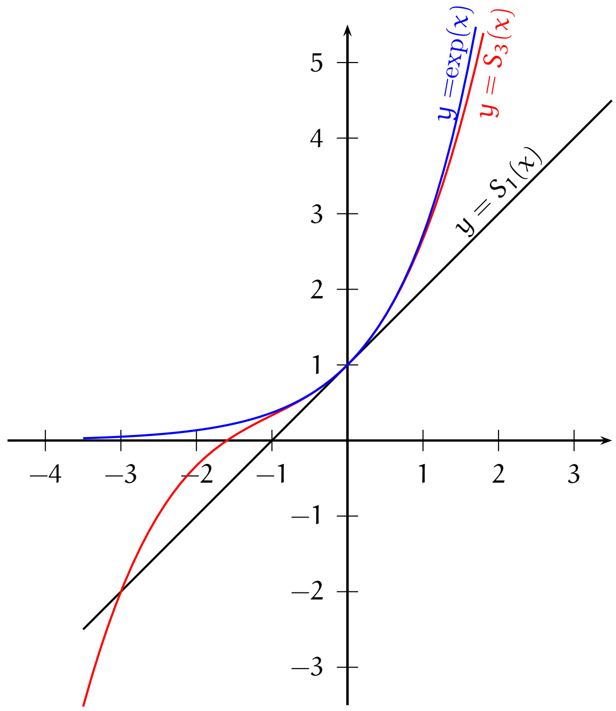
7) Puisque $\varphi_n = \mathrm{Id} - \delta$, on en déduit que $\varphi_n^{-1} = \mathrm{Id} + \delta + \dots + \delta^n$ puis que pour $i \in [\![0, n]\!]$,

$$s_i = \varphi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{n} \delta^k \left(\frac{X^i}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{i} \delta^k \left(\frac{X^i}{i!}\right) \frac{X^i}{i!} + \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} + \dots + \frac{X^1}{1!} + \frac{X^0}{0!} = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}.$$

Partie II

8) Pour tout réel x, $S_3'(x) = S_2(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2} > 0$. S_3 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} S_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} S_3(x) = +\infty$.

Graphes.



9) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, S_{2p} n'a pas de racine racine et S_{2p+1} a une et une seule racine réelle, notée α_{2p+1}, qui de plus est simple.

• C'est vrai pour $p = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_0(x) = 1 > 0$ et $S_1(x) = x + 1$ de sorte que $\alpha_1 = -1$.

• Soit $p \geqslant 0$. Supposons le résultat pour p. S_{2p} ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} S_{2p}(x) = +\infty$ et on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_{2p}(x) > 0$. Puisque $S_{2p+1}' = S_{2p}$, $S_{2p+1}' > 0$. Mais alors, S_{2p+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis strictement négative sur $]-\infty, \alpha_{2p+1}[$ et strictement positive sur $]\alpha_{2p+1}, +\infty[$. S_{2p+2} admet donc un minimum en α_{2p+1} égal à

$$S_{2p+2}(\alpha_{2p+1}) = S_{2p+1}(\alpha_{2p+1}) + \frac{\alpha_{2p+1}^{2p+2}}{(2p+2)!} = \frac{\alpha_{2p+1}^{2p+2}}{(2p+2)!} > 0$$

car $S_{2p+1}(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_{2p+1} \neq 0$. Donc, S_{2p+2} est strictement positive et en particulier ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ensuite, $S_{2p+3}' = S_{2p+2} > 0$ et donc S_{2p+3} est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} S_{2p+3}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} S_{2p+3}(x) = +\infty$ et donc S_{2p+3} est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, S_{2p+3} s'annule une fois et une seule en un certain réel noté α_{2p+3}. Ce réel n'est pas racine de $S_{2p+3}' = S_{2p+2}$ (car S_{2p+2} n'a pas de racine réelle) et donc α_{2p+3} est racine simple de S_{2p+3}.

Le résultat est démontré par récurrence.

10) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) = S_{2n}(\alpha_{2n-1}) + \frac{\alpha_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} > 0 + 0 = 0$. Ainsi, $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) > 0 = S_{2n+1}(\alpha_{2n+1})$. Puisque la fonction S_{2n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\alpha_{2n-1} > \alpha_{2n+1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{2n-1} > \alpha_{2n+1}$ et donc la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(b)

(i) La suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente et en particulier bornée. Soit μ un majorant de la suite $(|v_m|)_{m \in \mathbb{N}}$. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|S_m\left(v_m\right)-e^{v_m}\right| &= \left|\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{v_m^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\left|v_m\right|^k}{k!}\\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{\mu^k}{k!} = e^{\mu}-S_m(\mu).\end{aligned}$$

La suite $\left(e^{\mu}-S_m(\mu)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Il en est donc de même pour la suite $\left(S_m\left(v_m\right)-e^{v_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$.

(ii) Pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\left|S_m\left(v_m\right)-e^{\ell}\right| \leqslant \left|S_m\left(v_m\right)-e^{w_m}\right|+\left|e^{v_m}-e^{\ell}\right|$. D'après la question précédente, $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|S_m\left(v_m\right)-e^{w_m}\right| = 0$ et d'autre part, par continuité de la fonction exponentielle en ℓ, $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|e^{v_m}-e^{\ell}\right| = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|S_m\left(v_m\right)-e^{w_m}\right|+\left|e^{v_m}-e^{\ell}\right| = 0$ et finalement que $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|S_m\left(v_m\right)-e^{\ell}\right| = 0$.

Ceci montre que la suite $\left(S_m\left(v_m\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{ℓ}.

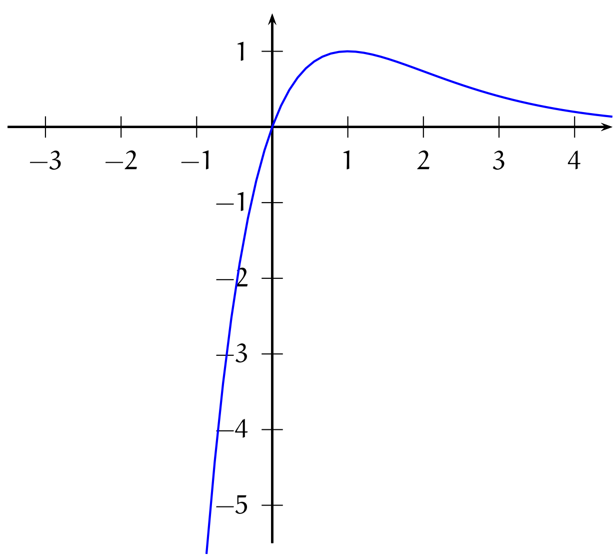
(c) La suite $\left(\alpha_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et donc soit convergente, soit divergente de limite $-\infty$. Supposons par l'absurde que la suite $\left(\alpha_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_{2n}=\ell$ de sorte que la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. D'après la question précédente, la suite $\left(S_n\left(\alpha_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{ℓ} et en particulier la suite $\left(S_{2n+1}\left(\alpha_{2n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e^{\ell}>0$. Mais ceci est absurde car la suite $\left(S_{2n+1}\left(\alpha_{2n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_{2n+1}=-\infty$.

Partie III

11) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x)=(1-x)e^{1-x}$. h est donc strictement croissante sur $]-\infty,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ d'après un théorème de croissances comparées.

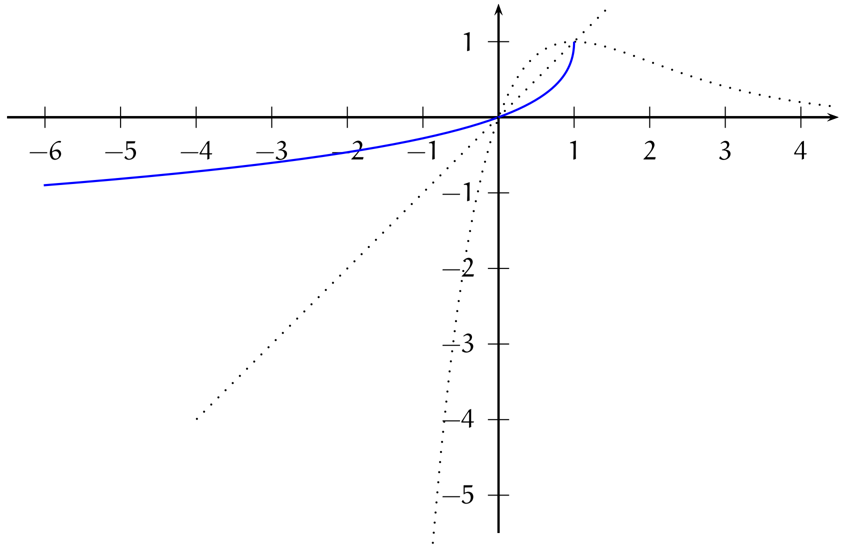
Graphe.



12) La fonction h est continue et strictement croissante sur $]-\infty,1[$. La fonction h réalise donc une bijection, notée h_1, de $]-\infty,1[$ sur $h(]-\infty,1[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(1)\right[=]-\infty,1[$. Soit $g=h_1^{-1}$. Pour tout x de $]-\infty,1[$, on a $h(g(x))=h_1(g(x))=x$.

h_1 est de classe C^{∞} sur $]-\infty,1[$ et la dérivée h_1' de h_1 ne s'annule pas sur $]-\infty,1[$. On en déduit que g est de classe C^{∞} sur $h_1(]-\infty,1[)=]-\infty,1[$.

Graphe de g.



13) Pour tout $x \geqslant 1$, $h(x) > 0$ et en particulier $h(x) \neq -1$. Sinon, h réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur lui-même et donc il existe un unique réel ρ de $]-\infty, 1[$ tel que $h(\rho) = -1$. En résumé, il existe un unique réel ρ tel que $h(\rho) = -1$ et de plus $\rho < 1$. On note que $\rho = g(-1)$.

14) $h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} = -e^{\frac{3}{2}-\ln 2} \leqslant -e^0 = -1$ et donc, puisque h est croissante sur $]-\infty, 1[$, $\rho \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

De même, $h\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}e^{\frac{5}{4}} = -e^{\frac{5}{4}-2\ln 2} \geqslant -e^{\frac{5}{4}-\frac{26}{20}} = -e^{-\frac{1}{20}} \geqslant -e^0 = -1$ et donc $\rho \leqslant -\dfrac{1}{4}$. En résumé, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant -\dfrac{1}{4}$.

15) (a)

$$\begin{aligned}
1 - e^{-nz}T_n(z) &= 1 - e^{-nz}S_n(nz) = 1 - e^{-nz}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}z^k = 1 - e^{-nz}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^k\right)\\
&= 1 - e^{-nz}\left(e^{nz} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^k\right)\\
&= e^{-nz}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^k = \left(e^{-z}\right)^n z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n}\\
&= \left(ze^{-z}\right)^n e^n e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n} = \left(ze^{1-z}\right)^n e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n}.
\end{aligned}$$

(b) On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{-nz}T_n(z)\right| &= \left(|z|\left|e^{1-z}\right|\right)^n e^{-n}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}z^{k-n}\right|\\
&\leqslant e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}|z|^{k-n} \leqslant e^{-n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k}{k!}\\
&= 1 - e^{-n}T_n(1).
\end{aligned}$$

(c) Si $T_n(z) = 0$, alors $1 \leqslant 1 - e^{-n}T_n(1)$ puis $T_n(1) \leqslant 0$ ce qui est faux. Donc, $T_n(z) \neq 0$.

16) Soit n un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Par stricte décroissance, $\alpha_n < \alpha_1 = -1$.

On a admis que $|\alpha_n| < n$ et donc $-n < \alpha_n < -1$.
$T_n\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = S_n(\alpha_n) = 0$. D'après la question précédente, on a $\left|\dfrac{\alpha_n}{n}\right| > 1$ ou $|h(\alpha_n)| > 1$ et donc $\left|h\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)\right| > 1$. Puisque $\alpha_n < 0$, $h\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) < 0$ puis $h\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) < -1 = h(\rho)$. Par stricte croissance de la fonction h sur $]-\infty, 1[$, on en déduit que $\dfrac{\alpha_n}{n} < \rho$ puis que $\alpha_n < n\rho$.

On a montré que si n est un entier naturel impair supérieur ou égal à 3, alors $-n < \alpha_n < n\rho$.

Partie IV

17) Soit u un réel et n un entier naturel. La formule de Taylor-Laplace à l'ordre n fournit

$$e^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \int_0^u \frac{(x-u)^n}{n!} e^x \, dx = S_n(u) + \int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{u-t} \, (-dt) = S_n(u) - e^u \int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt$$

puis $1 = e^{-u} S_n(u) - \displaystyle\int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt$ et finalement $e^{-u} S_n(u) = 1 + \displaystyle\int_u^0 \frac{t^n}{n!} e^{-t} \, dt$.

18) En posant $t = nx$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n}^0 (h(x))^n \, dx &= \int_{\gamma_n}^0 x^n e^{n(1-x)} \, dx = e^n \int_{\gamma_n}^0 x^n e^{-nx} \, dx \\ &= e^n \int_{\alpha_n}^0 \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \, \frac{dt}{n} = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_{\alpha_n}^0 t^n e^{-t} \, dt \\ &= \frac{e^n}{n^{n+1}} n! \left(e^{-\alpha_n} S_n(\alpha_n) - 1\right) \text{ (d'après la question 17)} \\ &= -\frac{e^n n!}{n^{n+1}}.\end{aligned}$$

19) D'après la formule de Stirling, $-\dfrac{e^n n!}{n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{e^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^{n+1}} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $-\dfrac{e^n n!}{n^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et en particulier que $-\dfrac{e^{2m+1}(2m+1)!}{(2m+1)^{(2m+1)+1}} \underset{m\to+\infty}{\to} 0$ et finalement que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{\gamma_{2m+1}}^0 (h(t))^{2m+1} \, dt = 0.$$

20) Soit m un entier naturel. Pour tout $t \leqslant 0$, $h(t) \leqslant 0$ puis $(h(t))^{2m+1} \leqslant 0$. Mais alors, puisque $\rho \leqslant 0$,

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^0 (h(t))^{2m+1} \, dt = \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} (h(t))^{2m+1} \, dt + \int_{\rho}^0 (h(t))^{2m+1} \, dt \leqslant \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} (h(t))^{2m+1} \, dt \leqslant 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} (h(t))^{2m+1} \, dt = 0$.

21) Soit m un entier naturel non nul de sorte que $2m+1$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. Puisque la fonction h est croissante sur $]-\infty, 1[$, pour $t \leqslant \rho$, on a $h(t) \leqslant h(\rho) = -1$ puis $(h(t))^{2m+1} \leqslant (-1)^{2m+1} = -1$. Par suite, puisque $\alpha_{2m+1} \leqslant (2m+1)\rho$ et donc $\gamma_{2m+1} \leqslant \rho$,

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} (h(t))^{2m+1} \, dt \leqslant \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} -1 \, dt = -(\rho - \gamma_{2m+1}) \leqslant 0.$$

Toujours d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} (\gamma_{2m+1} - \rho) = 0$ ou encore $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} = \rho$ ou encore $\dfrac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} \rho$ ou enfin

$$\alpha_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\sim} 2m\rho.$$

Partie V

22) (a) On montre le résultat par récurrence sur p.

- Soient θ_1 un réel strictement positif puis α_1 un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Supposons que $|\theta_1 \alpha_1| = \theta_1$. Alors, $\theta_1 |\alpha_1| = \theta_1$ puis $|\alpha_1| = 1$. Le résultat est donc vrai quand $p = 1$.

- Soit $p \geqslant 1$. Supposons le résultat pour p. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_{p+1}$ des réels strictement positifs puis $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ des nombres complexes de modules inférieur ou égaux à 1. Déjà,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{p+1}\theta_i\alpha_i\right| &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| + \theta_{p+1}\left|\alpha_{2p+1}\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| + \theta_{p+1} \leqslant \sum_{i=1}^{p}\theta_i\left|\alpha_i\right| + \theta_{p+1} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{p+1}\theta_i.\end{aligned}$$

On obtient une égalité si et seulement si chacune des inégalités écrites est une égalité ce qui équivaut à $\left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p}\theta_i$ et $|\alpha_{2p+1}| = 1$ et finalement à $\forall i \in [\![1, p+1]\!]$, $|\alpha_i| = 1$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

(b) $(\theta_1+\theta_2)^2 = |\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2|^2 = \left|\theta_1+\theta_2 e^{it}\right|^2 = \theta_1^2+2\theta_1\theta_2\cos t+\theta_2^2$ et donc $2\theta_1\theta_2\cos t = 2\theta_1\theta_2$ puis $\cos t = 1$ puis $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ et finalement $\alpha_2 = 1$.

(c) Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 2$, $\forall (\theta_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in]0,+\infty[^p$, $\forall (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{U}^p$, $\left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p}\theta_i \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_p$.

- Soient θ_1 et θ_2 deux réels strictement positifs et α_1 et α_2 deux nombres complexes de module 1. $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ est encore un nombre complexe de module 1 et d'après la question précédente,

$$|\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2| = \theta_1+\theta_2 \Rightarrow \left|\theta_1+\theta_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| = \theta_1+\theta_2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Le résultat est donc vrai quand $p = 2$.

- Soit $p \geqslant 2$. Supposons le résultat pour p. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_{p+1}$ $p+1$ réels strictement positifs et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ $p+1$ nombres complexes de module 1 tels que $\left|\sum_{i=1}^{p+1}\alpha_i\theta_i\right| = \sum_{i=1}^{p+1}\theta_i$.

De nouveau, toutes les inégalités de la question (a) sont des égalités. En particulier, $\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\theta_i\right| = \sum_{i=1}^{p}\theta_i$ et donc, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p$ par hypothèse de récurrence. On a donc $\left|\alpha_1\sum_{i=1}^{p}\theta_i+\theta_{p+1}\alpha_{p+1}\right| = \sum_{i=1}^{p+1}\theta_i$ puis

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{p}\theta_i\right)+\theta_{p+1}\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_1}\right| = \left(\sum_{i=1}^{p}\theta_i\right)+\theta_{p+1}.$$

Puisque $\sum_{i=1}^{p}\theta_i > 0$ et que $\dfrac{\alpha_{p+1}}{\alpha_1}$ est de module 1, le cas $p = 2$ permet d'affirmer que $\dfrac{\alpha_{p+1}}{\alpha_1} = 1$ et donc que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = \alpha_{p+1}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

23) (a) $P(0) = a_0 > 0$ et donc 0 n'est pas racine de P. $P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k > 0$ et donc 1 n'est pas racine de P.

(b) $(X-1)P = (X-1)\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)X^k - a_0$.

(c) Soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$. Supposons par l'absurde que $|z| \leqslant 1$. Alors

$$0 = |(z-1)P(z)| = \left|a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)z^k - a_0\right| \leqslant a_n|z|^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k)|z|^k + a_0 \leqslant a_n + \sum_{k=1}^{n}(a_{k-1}-a_k) + a_0 = a_n + a_0 -$$

et donc $\left|a_n z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) z^k - a_0\right| = a_n |z|^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) |z|^k + a_0$. Puisque les coefficients du polynôme $(X-1)P$ sont strictement positifs et que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left|z^k\right| = |z|^k \leqslant 1$, la question 22.c) permet d'affirmer que $z^{n+1} = z^n = \ldots = z = 1$ et en particulier que $z = 1$. Ceci est faux d'après la question a) et donc $|z| > 1$.

24) De nouveau, 0 n'est pas racine de Q car $a_0 \neq 0$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, posons $a'_k = a_{n-k}$ de sorte que $a'_0 = a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_n > 0$.

$$X^n Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \left(\frac{a'_0}{X^n} + \frac{a'_1}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{a'_{n-1}}{X} + a'_n\right) = a'_n X^n + a'_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a'_1 X + a'_0.$$

D'après la question précédente, les racines du polynôme $P = a'_n X^n + a'_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a'_1 X + a'_0$ sont de module strictement supérieur à 1. Puisque 0 n'est pas racine de Q, pour tout complexe z, z est racine de Q si et seulement si $\frac{1}{z}$ est racine de P. Donc, pour tout racine z de Q dans $\mathbb{C}$, $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$ puis $|z| < 1$.

25) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. $T_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!} X^i$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, posons $a_i = \frac{n^i}{i!}$ de sorte que $T_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ $a_i > 0$ puis pour $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{n^i}{n^{i+1}} \frac{(i+1)!}{i!} = \frac{i+1}{n} \leqslant 1$$

avec égalité si et seulement si $i = n-1$. Donc, $a_0 > a_1 > \ldots > a_{n-1} = a_n > 0$. D'après la question précédente, les racines de T_n dans $\mathbb{C}$ sont de module strictement inférieur à 1.

Enfin, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z \text{ racine de } S_n \Leftrightarrow S_n(z) = 0 \Leftrightarrow T_n\left(\frac{z}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{n} \text{ racine de } T_n.$$

D'après ce qui précède, pour tout racine z de S_n dans $\mathbb{C}$, on a $\left|\frac{z}{n}\right| < 1$ et donc $|z| < n$.

