Concours ENSAM - ESTP - POLYTECH

Epreuve de Mathématiques 2 MP

Partie I

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda y.$$

2) Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive.
La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde, à savoir elle-même, est positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

3) Soient $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ puis $\theta \in]0,1[$. Soient $x = \ln a$ et $y = \ln b$ de sorte que $a = e^x$ et $b = e^y$. Puisque la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$,

$$a^\theta b^{(1-\theta)} = e^{\theta x + (1-\theta) y} \leqslant \theta e^x + (1-\theta)e^y = \theta a + (1-\theta) b.$$

Partie II

4) (a) Soit $x > 0$. Soient u et v deux réels tels que $0 < u < v$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur le segment $[u,v]$. Donc, $\displaystyle\int_u^v t^{x-1}\,dt$ existe. De plus,

$$\int_u^v t^{x-1}\,dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_u^v = \frac{v^x - u^x}{x}.$$

(b) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0,1]$. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_u^1 t^{x-1}\,dt$ converge absolument si et seulement si la fonction $u \mapsto \displaystyle\int_u^1 t^{x-1}\,dt$ a une limite réelle quand u tend vers 0.

Pour $u \in]0,1]$, $\displaystyle\int_u^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1-u^x}{x}$. Puisque $x > 0$, quand u tend vers 0, on obtient l'existence de $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ et de plus, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}$.

5) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,1]$. De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ avec $x - 1 > -1$. Donc la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$ ou encore que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge absolument.

6) (a) Puisque $x > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{\frac{x}{2}} \ln t = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.

(b) La fonction $t \mapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$. De plus,

$$t^{1-\frac{x}{2}} \left|(\ln t)t^{x-1}e^{-t}\right| = t^{1-\frac{x}{2}}|\ln t| t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{\frac{x}{2}}|\ln t| \underset{t\to 0}{=} o(1).$$

Par suite, $\left|(\ln t)t^{x-1}e^{-t}\right| \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{-1+\frac{x}{2}}\right)$ avec $-1 + \dfrac{x}{2} > -1$. On en déduit que la fonction $t \mapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$ ou encore que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge absolument.

7) (a) Soit $t \in]0,1]$. La fonction $y \mapsto t^{y-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, $u \leqslant x \Rightarrow t^{x-1} \leqslant t^{u-1}$.
Par suite, pour $u \leqslant x \leqslant v$ et $t \in]0,1]$,

$$\left|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\right| = (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t} \leqslant (\ln t)^2 t^{u-1}e^0 = (\ln t)^2 t^{u-1}.$$

(b) La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$. De plus,

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

$$t^{1-\frac{x}{2}}\left|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\right| \underset{t\to 0}{\sim} t^{\frac{x}{2}}(\ln t)^2 \underset{t\to 0}{=} o(1).$$

Par suite, $\left|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\right| \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{-1+\frac{x}{2}}\right)$ avec $-1+\dfrac{x}{2} > -1$. On en déduit que la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$ ou encore que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge absolument.

8) Soit $u > 0$. Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} [u,+\infty[\times]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$ de sorte que pour $x \in [u,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt$.

• Pour chaque $x \in [u,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (d'après la question 5).
• La fonction f admet sur $[u,+\infty[\times]0,1]$ des dérivées partielles premières et secondes par rapport à sa première variable x et pour $(x,u) \in [u,+\infty[\times]0,1]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}.$$

De plus,

- pour tout $x \in [u,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0,1]$;
- pour tout $t \in]0,1]$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[u,+\infty[$;
- pour tout $(x,t) \in [u,+\infty[\times]0,1]$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|t^{u-1} = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)^2 t^{u-1} = \varphi_2(t)$.

De plus, les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,1]$ car négligeables devant $t^{-1+\frac{u}{2}}$ quand u tend vers 0.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre (théorème de Leibniz), la fonction F est de classe C^2 sur $[u,+\infty[$ et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $u > 0$, on a montré que

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ F'(x) = \int_0^1 (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt \text{ et } F''(x) = \int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt.}$$

Partie III

9) Soit $x > 0$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$

10) (a), (b) et (c) Soit $x > 0$. Les trois fonctions $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, $t \mapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ sont continues par morceaux et positives sur $[1,+\infty[$. De plus, $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \left((\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\right)$ et $(\ln t)t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \left((\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\right)$.
Ensuite,

$$(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t} = (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)\times e^{-\frac{t}{2}} = \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Finalement, les trois fonctions $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, $t \mapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ sont négligeables devant $\dfrac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit que ces trois fonctions sont intégrables sur $[1,+\infty[$.

11) On effectue le même travail qu'à la question 8 à la nuance près qu'on fait varier x dans l'intervalle $]0,\nu]$. Pour tout $(x,t) \in]0,\nu]\times[1,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |\ln t|t^{\nu-1}e^{-t} = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant (\ln t)^2 t^{\nu-1}e^{-t} = \varphi_2(t)$. Les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues par morceaux et intégrables sur $[1,+\infty[$ d'après la question précédente et ceci étant vrai pour tout $\nu > 0$, on a montré que

$$\boxed{G \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ G'(x) = \int_1^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt \text{ et } G''(x) = \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt.}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

Partie IV

12) Soit $x > 0$. Soient $(\varepsilon, A) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_{\varepsilon}^{A} t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{\varepsilon}^{A} + x\int_{\varepsilon}^{A} t^{x-1}e^{-t}\, dt = -A^x e^{-A} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x\int_{\varepsilon}^{A} t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

Quand A tend vers $+\infty$, $-A^x e^{-A}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées et quand ε tend vers 0, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ tend vers 0 car $x > 0$. Quand A tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0, on obtient

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt = x\Gamma(x).$$

13) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 1.$

14) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
- L'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Alors, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \times (n-1)! = ((n+1)-1)!$.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

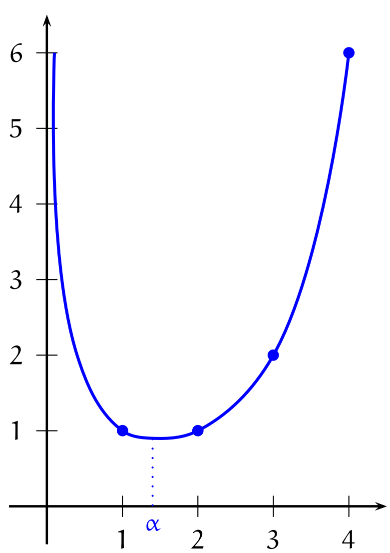
15) La fonction Γ est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$ et vérifie $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

16) Γ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\, dt$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle).
La fonction Γ est donc strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

17) Puisque la fonction Γ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$, la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. En particulier, la fonction Γ' s'annule au plus une fois dans $]0, +\infty[$. D'autre part, la fonction Γ' s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$ d'après la question 15. Finalement, la fonction Γ' s'annule exactement une fois sur $]0, +\infty[$, en un certain réel $\alpha \in]1, 2[$.

Puisque la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que la fonction Γ' est strictement négative sur $]0, \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. Par suite, la fonction Γ admet un minimum global en α.

18) Allure du graphe de la fonction Γ.



Partie V

19) Soi $c \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = e^{ct}$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 1]$.

$$\ln(f(\theta x + (1-\theta)y)) = c(\theta x + (1-\theta)y) = \theta cx + (1-\theta)cy = \theta\ln(f(x)) + (1-\theta)\ln(f(y)).$$

Donc, la fonction f est ln-convexe ($\ln \circ f$ est affine et en particulier convexe).

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

20) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
f(\theta x + (1-\theta)y) &= e^{\ln(f(\theta x+(1-\theta)y))} \\
&\leqslant e^{\theta \ln(f(x))+(1-\theta)\ln(f(y))} \text{ (car f est ln-convexe)} \\
&= (f(x))^{\theta}(f(y))^{1-\theta} \\
&\leqslant \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \text{ (d'après la question 3).}
\end{aligned}$$

Donc, f est convexe sur I.

La réciproque est fausse. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ est convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Soit $g = \ln \circ f$. Pour tout réel x, $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis pour x réel, $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ puis

$$g''(x) = \frac{2\left(\left(x^2+1\right) - x(2x)\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

La fonction g'' est strictement négative sur $]1, +\infty[$ et donc la fonction g n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ ou encore la fonction f n'est pas ln-convexe sur $\mathbb{R}$.

21) (a) Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tel que $x < y$ et soit $\theta \in]0, 1[$. Soit $c > 0$.

$$\begin{aligned}
e^{c(\theta x+(1-\theta)y)} f(\theta x + (1-\theta)y) &= g_c(\theta x + (1-\theta)y) \\
&\leqslant \theta g_c(x) + (1-\theta)g_c(y) = \theta e^{cx} f(x) + (1-\theta)e^{cy} f(y).
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité obtenue par le réel strictement positif $e^{c(\theta x+(1-\theta)y)}$, on obtient

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta e^{cx - c(\theta x+(1-\theta)y)} f(x) + (1-\theta)e^{cy - c(\theta x+(1-\theta)y)} f(y) = \theta e^{c(1-\theta)(x-y)} f(x) + (1-\theta)e^{c\theta(y-x)} f(y).$$

(b) i. Puisque $\theta(y-x) > 0$, $\lim\limits_{c \to +\infty} e^{c\theta(y-x)} = +\infty$ et puisque $(1-\theta)f(y) > 0$, $\lim\limits_{c \to +\infty} (1-\theta)e^{c\theta(y-x)} f(y) = +\infty$. D'autre part, puisque $(1-\theta)(x-y) < 0$, $\lim\limits_{c \to +\infty} \theta e^{c(1-\theta)(x-y)} f(x) = 0$. Finalement, $\lim\limits_{c \to +\infty} H(c) = +\infty$.

ii.

$$\begin{aligned}
H(c_0) &= \theta \left(e^{c_0(x-y)}\right)^{(1-\theta)} f(x) + (1-\theta)\left(e^{-c_0(x-y)}\right)^{\theta} f(y) \\
&= \theta \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{(1-\theta)} f(x) + (1-\theta)\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{\theta} f(y) = (\theta + 1 - \theta) f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta} \\
&= f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

iii. Par hypothèse, H' ne s'annule pas sur $]0, c_0[$ et est continue sur cet intervalle. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, H' est de signe constant sur cet intervalle. De même, H' est de signe constant sur $]c_0, +\infty[$. Puisque $\lim\limits_{c \to +\infty} H(x) = +\infty$, H' est nécessairement strictement positive sur $]c_0, +\infty[$ et puisque H' change de signe en c_0, H' est strictement négative sur $]0, c_0[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction H.

c	0		c_0		$+\infty$
$H'(c)$		$-$	0	$+$	
H		$\searrow$	$f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}$	$\nearrow$	

(c) Soient $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tel que $x < y$ et soit $\theta \in]0, 1[$. D'après (b).i, pour tout réel $c > 0$, $f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant H(c)$. En particulier, pour $c = c_0$, on obtient $f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant H(c_0) = f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}$. En prenant le logarithme des deux membres de cette égalité (qui sont des réels strictement positifs), on obtient

$$\ln(f(\theta x + (1-\theta)y)) \leqslant \theta \ln(f(x)) + (1-\theta)\ln(f(y)).$$

Ceci montre que f est ln-convexe.

22) Soient c et θ deux réels strictement positifs. Pour tout réel $x > 0$, $\varphi_{c,\theta}(x) = e^{-\theta} e^{(x-1)\ln\theta + cx}$ et donc

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

$$\varphi'_{c,\theta}(x) = (\ln\theta + c)\,\varphi_{c,\theta}(x) \text{ puis } \varphi''_{c,\theta}(x) = (\ln\theta + c)^2\,\varphi_{c,\theta}(x).$$

On en déduit que la fonction $\varphi''_{c,\theta}$ est positive sur $]0,+\infty[$ puis que $\varphi_{c,\theta}$ est convexe sur $]0,+\infty[$.

23) Soit $c > 0$. Pour $x > 0$, posons $g_c(x) = e^{cx}\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{t}e^{cx}\ dt = \int_0^{+\infty} \varphi_{t,c}(x)\ dt$.

Soient $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et $\theta \in]0,1[$. Puisque pour tout $t > 0$ la fonction $\varphi_{t,c}$ est convexe sur $]0,+\infty[$, on en déduit que

$$g_c(\theta x + (1-\theta)y) = \int_0^{+\infty} \varphi_{t,c}(\theta x + (1-\theta)y)\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} (\theta\varphi_{t,c}(x) + (1-\theta)\varphi_{t,c}(y))\, dt = \theta g_c(x) + (1-\theta)g_c(y).$$

Donc, pour tout réel $c > 0$, la fonction g_c est convexe. D'après la question 21, on en déduit que la fonction Γ est ln-convexe.

Partie VI

24) Pour $n \geqslant 2$, $g(n) = (n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1\times g(1) = (n-1)!$ ce qui reste vrai pour $n = 1$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = (n-1)!$.

25) (a) Soient $x \in]0,1[$ et $n \geqslant 2$. Par hypothèse, la fonction G est convexe sur $]0,+\infty[$. On sait alors que la fonction pente en tout point est croissante. Par croissance de la fonction pente en n et puisque $n-1 < x+n < n+1$, on a

$$\frac{G(n-1)-G(n)}{(n-1)-n} \leqslant \frac{G(x+n)-G(n)}{(x+n)-n} \leqslant \frac{G(n+1)-G(n)}{(n+1)-n}$$

et donc,

$$G(n) - G(n-1) \leqslant \frac{G(x+n)-G(n)}{x} \leqslant G(n+1) - G(n).$$

(b) Soient $x \in]0,1[$ et $n \geqslant 2$. $G(n) - G(n-1) = \ln\left(\dfrac{g(n)}{g(n-1)}\right) = \ln(n-1)$ et de même $G(n+1) - G(n) = \ln n$. Enfin, $G(n) = \ln(g(n)) = \ln((n-1)!)$. D'après (a),

$$\ln((n-1)!) + x\ln(n-1) \leqslant \ln(g(x+n)) \leqslant \ln((n-1)!) + x\ln n.$$

En prenant l'exponentielle des trois membres de cet encadrement, on obtient

$$(n-1)^x(n-1)! \leqslant g(x+n) \leqslant n^x(n-1)!.$$

26) Soient $x \in]0,1[$ et $n > 2$. $g(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots xg(x)$. D'après la question précédente,

$$(n-1)^x(n-1)! \leqslant (x+n-1)(x+n-2)\ldots xg(x) \leqslant n^x(n-1)!,$$

puis

$$\frac{n-1}{x+n-1} \times \frac{(n-1)^x(n-2)!}{x(x+1)\ldots(x+n-2)} = \frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \leqslant g(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)},$$

et finalement,

$$\frac{n-1}{x+n-1}u_{n-1}(x) \leqslant g(x) \leqslant u_n(x).$$

27) Remarque. L'encadrement de la question 26 fournit $g(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{x+n}{n}g(x)$. Le théorème des gendarmes montre immédiatement que la suite $(u_n(x))$ converge vers $g(x)$.

(a) Soient $x \in]0,1[$ et $\alpha > 0$. La fonction $f\ :\ t \mapsto (1+t)^x$ est continue sur $[0,\alpha]$ et dérivable sur $]0,\alpha[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c \in]0,\alpha[$ tel que $f(\alpha) - f(0) = (\alpha - 0)f'(c)$ ou encore $(1+\alpha)^x - 1 = \alpha x(1+c)^{x-1}$. Maintenant, $1 + c > 1$ et $x - 1 < 0$. Donc, $(1+c)^{x-1} \leqslant 1$ et finalement

$$(1+\alpha)^x - 1 \leqslant \alpha x.$$

(b) Soit $x \in]0,1[$ et $n \geqslant 2$.

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{(n+1)^x}{n^x} \times \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \frac{n}{n+x} \\ &\leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{n}{n+x} \text{ (d'après la question (a))} \\ &= 1.\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in]0,1[$. La suite $(u_n(x))_{n\geqslant 2}$ est donc décroissante et minorée par $g(x)$. Donc, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 2}$ et donc convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question 26, on obtient $\ell(x) \leqslant g(x) \leqslant \ell(x)$ et donc $\ell(x) = g(x)$.

Remarque. L'encadrement de la question 26 fournit $g(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{x+n}{n}g(x)$. Le théorème des gendarmes montre immédiatement que la suite $(u_n(x))$ converge vers $g(x)$.

28) Soit $x \in]0,1[$. La fonction Γ est ln-convexe d'après la question 23 et vérifie $\Gamma(1) = 1$ et $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ d'après les questions 12 et 13. Donc, d'après la question 27,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = g(x).$$

On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)! = g(n)$ d'après la question 24.

Soit $x \in]1,+\infty[\setminus\mathbb{N}^*$. Soit $n = E(x)$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= (x-1)\dots(x-n)\Gamma(x-n) \text{ (d'après la question 12)} \\ &= (x-1)\dots(x-n)g(x-n) \text{ (car } x-n \in]0,1[) \\ &= g(x).\end{aligned}$$

Finalement, $\forall x > 0$, $\Gamma(x) = g(x)$ et donc $g = \Gamma$.

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.