Concours ENSAM - ESTP - POLYTECH

Epreuve de Mathématiques 1 MP

Exercice 1

Partie 1 - Réduction de la matrice A

1) En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ -1 & X+2 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)\left(X^2+3X+1\right) - (X+1) = (X+1)\left[X^2+3X\right] = X(X+1)(X+3).\end{aligned}$$

Par suite, $\mathrm{Sp}(A) = (0, -1, -3)$.

2) La matrice A est symétrique réelle et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale d'après le théorème spectral. Les valeurs propres de A sont simples et donc ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles, deux à deux orthogonales. On détermine une base orthonormée de chacune de ces droites.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y=0 \\ x-2y+z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A+I_3)\,X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x-y+z=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z = -x \text{ et } y = 0.$$

Donc, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\,(e_2)$ où $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_{-3}(A) \Leftrightarrow (A+3I_3)\,X = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = -2x \text{ et } z = x.$$

Donc, $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\,(e_3)$ où $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, $A = PDP^T$ où $D = \mathrm{diag}(0, -1, -3)$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ (P est une matrice orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique).

Partie 2 - Etude de $\mathscr{C}(A)$

3) Puisque $0 \times A = A \times 0 = 0$, $0 \in C(A)$.
Soient $(M, N) \in (\mathscr{C}(A))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A.$$

Donc, $\lambda M + \mu N \in \mathscr{C}(A)$.

Ceci montre que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4) I, A et A^2 sont des polynômes en A et donc commutent avec A ou encore I_3, A et A^2 sont dans $\mathscr{C}(A)$. Puisque $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que $F = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \subset \mathscr{C}(A)$.

5) Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque P est orthgonale,

$$B \in \mathscr{C}(A) \Leftrightarrow BA = AB \Leftrightarrow BPDP^T = PDP^TB \Leftrightarrow P^TBPDP^TP = P^TPDP^TBP \Leftrightarrow P^TBPD = DP^TBP.$$

6) D'après la question précédente, $B \in \mathscr{C}(A) \Leftrightarrow P^TBP \in \mathscr{C}(D)$. Déterminons $\mathscr{C}(D)$. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En posant $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -3$,

$$\begin{aligned} MD = DM &\Leftrightarrow (\lambda_j m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} = (\lambda_i m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ (\lambda_i - \lambda_j)\, m_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ (i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0) \Leftrightarrow M \in \mathscr{D}_3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{C}(D) = \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$. En particulier, $\mathscr{C}(D)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

D'après la remarque initiale, l'application $B \mapsto P^TBP$ est un isomorphisme (car linéaire de réciproque $B \mapsto PBP^T$) de $\mathscr{C}(A)$ sur $\mathscr{C}(D)$. Par suite, $\mathscr{C}(A)$ et $\mathscr{C}(D)$ sont isomorphes et on en déduit que $\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\mathscr{C}(D)) = 3$.

7) Montrons que la famille $\left(I, A, A^2\right)$ est libre. Puisque les valeurs propres de A sont simples, le polynôme minimal de A est $\mu_A = \chi_A = X^3 + 4X^2 + 3X$. On en déduit qu'il n'existe pas de polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 2 et annulateur de A. Donc, pour $(\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^3$, si $\lambda I + \mu A + \nu A^2 = 0$ alors $\lambda = \mu = \nu = 0$. Ceci montre que la famille $\left(I, A, A^2\right)$ est libre puis que $\dim\left(\text{Vect}\left(I, A, A^2\right)\right) = 3 = \dim\left(\mathscr{C}(A)\right) < +\infty$. Puisque d'autre part, $\text{Vect}\left(I, A, A^2\right) \subset \mathscr{C}(A)$, on a montré que $\mathscr{C}(A) = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$.

8) A^3 commute avec A. Donc, $A^3 \in \mathscr{C}(A) = F$. On peut obtenir A^3 explicitement comme combinaison linéaire de I, A et A^2 grâce au théorème de Cayley-Hamilton :

$$\chi_A(A) = 0 \Rightarrow A^3 + 4A^2 + 3A = 0 \Rightarrow A^3 = -4A^2 - 3A.$$

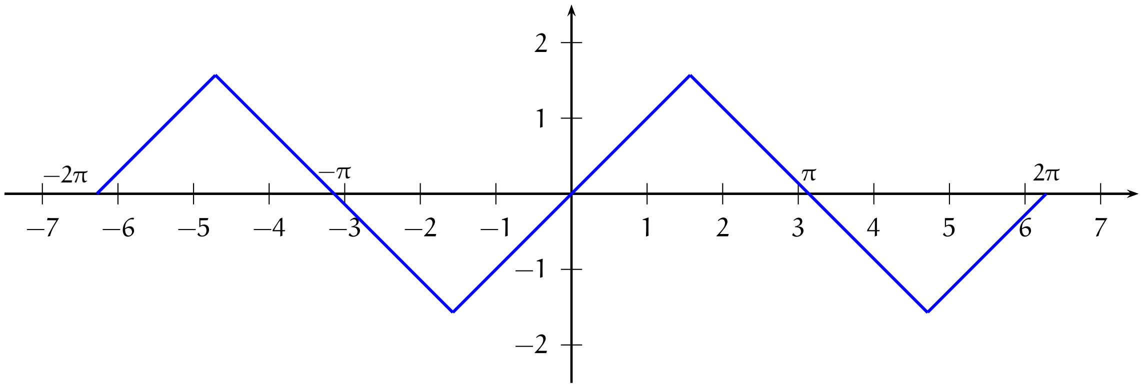
Partie 3 - Etude du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\text{Ker}(A)$

9) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Puisque A est symétrique, l'endomorphisme f est symétrique (pour le produit scalaire canonique). Soit $x \in \mathbb{R}^3$.
Si $x \in \text{Ker}(A) = \text{Ker}(f) = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id})$, alors $p(f(x)) = p(0) = 0$ puis $p(x) = x$ et donc $f(p(x)) = f(x) = 0$. Donc, $p(f(x)) = f(p(x))$.
Si $x \in \text{Ker}(A)^\perp = \text{Ker}(p)$, alors $f(p(x)) = f(0) = 0$. D'autre part, puisque f est symétrique et que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f)$ est stable par f, on sait que $\text{Ker}(A)^\perp$ est stable par f. Par suite, $f(x) \in \text{Ker}(A)^\perp = \text{Ker}(p)$ puis $p(f(x)) = 0$. Encore une fois $p(f(x)) = f(p(x))$.

Ainsi, les endomorphismes $p \circ f$ et $f \circ p$ coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires et donc $p \circ f = f \circ p$. Finalement, $p \in \mathscr{C}(f) = \mathscr{C}(A) = F$.

Exercice 2

1) Représentation graphique.



Partie 1 - Approximation dans un espace préhilbertien réel

2) Vérifions que E est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.
La fonction nulle est 2π-périodique et impaire. Donc, la fonction nulle est dans E.
Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $\lambda f + \mu g$ est 2π-périodique en tant que combinaison linéaire de fonctions 2π-périodiques et est impaire en tant que combinaison linéaire de fonctions impaires. Finalement, $\lambda f + \mu g \in E$.

On a montré que E est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

3) • Si f et g sont deux éléments de E, la fonction fg est continue sur le segment $[0,\pi]$. Donc, $\varphi(f,g)$ existe dans $\mathbb{R}$. φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Pour tout $(f,g) \in E^2$, $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\ dt = \int_0^\pi g(t)f(t)\ dt = \varphi(g,f)$. Donc, φ est symétrique.

• φ est bilinéaire par bilinéarité du produit de deux fonctions et linéarité de l'intégrale.

• Pour tout $f \in E$, $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\ dt \geqslant 0$. Donc, φ est positive.

• Soit $f \in E$ telle que $\varphi(f,f) = 0$. Alors, $\displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\ dt = 0$ puis $\forall t \in [0,\pi]$, $f^2(t) = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle). Par suite, f est nulle sur $[0,\pi]$, puis sur $[-\pi,\pi]$ par parité et enfin sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

4) Chaque s_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est bien un élément de E. Soient n et p deux entiers naturels non nuls et distincts.

$$\begin{aligned}\varphi(s_n,s_p) &= \int_0^\pi \sin(nt)\sin(pt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((n-p)t) - \cos((n+p)t)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-p)t)}{n-p} - \frac{\sin((n+p)t)}{n+p}\right]_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

Donc, la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).

5) Des intégrations par parties, licites, fournissent

$$\begin{aligned}(v|s_1) &= \int_0^\pi v(t)s_1(t)\ dt = \int_0^{\pi/2} t\sin t\ dt + \int_{\pi/2}^\pi (\pi - t)\sin t\ dt \\ &= [-t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos t\ dt + [-(\pi-t)\cos t]_{\pi/2}^\pi - \int_{\pi/2}^\pi \cos t\ dt \\ &= 0 + 1 + 0 - (-1) = 2.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$(s_1|s_1) = \int_0^\pi \sin^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos(2t))\ dt = \frac{1}{2}\left(\pi - \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi\right) = \frac{\pi}{2}.$$

6) Des intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned}(v|s_2) &= \int_0^{\pi/2} t\sin(2t)\ dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\sin(2t)\ dt \\ &= \left[-t\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\ dt + \left[-(\pi - t)\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2t)\ dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

7) Puisque $\text{Vect}\,(s_1, s_2)$ est de dimension finie, v_2 existe d'après le théorème de la projection orthogonale. Une base orthonormée de $\text{Vect}\,(s_1, s_2)$ est (e_1, e_2) où $e_1 = \dfrac{1}{\|e_1\|}e_1$ et $e_2 = \dfrac{1}{\|e_2\|}e_2$. On sait que

$$v_2 = (v|e_1)\,e_1 + (v_2|e_2)\,e_2 = \frac{1}{\|s_1\|^2}\,(v|s_1)\,s_1 + \frac{1}{\|s_2\|^2}\,(v|s_2)\,s_2 = \frac{2}{\pi/2}s_1$$

et donc $v_2 = \dfrac{4}{\pi}s_1$ ou encore $\forall t \in \mathbb{R}$, $v_2(t) = \dfrac{4}{\pi}\sin t$.

8) a) Les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \sin t$ sont continues sur $\mathbb{R}$. On sait que les solutions de l'équation $y' + y = \sin t$ sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Déterminons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+y = \sin t$ (E), de la forme $f\ :\ t \mapsto a\cos t + b\sin t$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (-a\sin t + b\cos t) + (a\cos t + b\sin t) = \sin t \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (b - a)\sin t + (a + b)\cos t = \sin t \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} b - a = 1 \\ a + b = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftarrow a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f_0\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{2}(-\cos t + \sin t)$. D'autre part, les solutions de l'équation $(E_h)\ :\ y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait alors que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} + \dfrac{1}{2}(-\cos t + \sin t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Puisque $v_2 = \dfrac{4}{\pi}s_1$, une solution particulière de l'équation $y' + y = v_2$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{4}{\pi}f_0$ et donc les solutions de l'équation $y' + y = v_2$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} + \dfrac{2}{\pi}(-\cos t + \sin t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $t \mapsto 1$ et v_2 sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une solution et une seule qui s'annule en 0. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $f\ :\ t \mapsto \lambda e^{-t} + \dfrac{2}{\pi}(-\cos t + \sin t)$.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \frac{2}{\pi} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{\pi}.$$

La solution cherchée est la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{\pi}\left(-\cos t + \sin t + e^{-t}\right)$.

Partie 2 - Utilisation de la méthode d'Euler

9) Fonction v_0_pi(t).

```
def v_0_pi(t) :
    if t<pi/2 :
        return t
    else :
        return pi-t
```

10) Fonction v(t).


```
def v(t) :
    n=floor(t/pi)
    if n%2 ==0 :
        return v_0_pi(t-n*pi)
    else :
        return -v_0_pi(t-n*pi)
```

11)

```
t = [ i * pi / N for i in range(N+1)]

y = 0
Y = [y]
for k in range(N) :
    y = y*(1-pi/N) +pi*v(t[k])/N
    Y.append(y)
```

12) Fonction rectangles(u,a,b,n).

```
def rectangles(u,a,b,n) :
    h=(b-a)/n
    S,t=0,a
    for i in range(n) :
        S=S+u(t)
        t=t+h
    return S*h
```

Partie 3 - Utilisation d'un calcul approché d'intégrale

13)

```
def vs3(t) :
    return v(t)*sin(3*t)
def ss3(t) :
    return (sin(3*t))**2 :
p=rectangle(vs3,0,pi,100)/rectangle(ss3,0,pi,100)
print("Une valeur approchée est : " ,p)
```

Exercice 3

1) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+4t^2x^2}\ dt$. De plus, puisque $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4t^2x^2}\ dt = \frac{1}{4x^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}\ dt = \frac{1}{4x^2}\left[\frac{1}{1/2x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{1/2x}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2x}\left(\lim_{t\to+\infty}\operatorname{Arctan}(2xt) - 0\right) = \frac{\pi}{4x}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1+4n^2x^2}$ existe et de plus $\dfrac{1}{1+4n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (car $x \neq 0$). Donc, la série numérique de terme général $\dfrac{1}{1+4n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. On en déduit l'existence de $F(x)$.

F est donc définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2(-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} = F(x).$$

F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et F est paire.

3) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$, posons $f_n(x) = \dfrac{1}{1+4n^2x^2}$.

Chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, b]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$, $f'_n(x) = -\dfrac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f'_n(x)| = \frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2} \leqslant \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}.$$

Puisque $a > 0$ et $b > 0$, $\dfrac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8n^2b}{16n^4a^4} = \dfrac{b}{2n^2a^4} > 0$. Par suite, $\dfrac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série de fonctions de terme général f'_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, b]$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers f sur $[a, b]$;
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, b]$;
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction F est de classe C^1 sur $[a, b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Cei étant vrai pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a montré que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ puis, par parité, sur $\mathbb{R}^*$, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}.$$

4) Soit $x > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2t^2}$ est continue et décroissante sur $[n-1, n]$. Donc,

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4x^2n^2}\,dt = \frac{1}{1+4x^2n^2}.$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt = \frac{\pi}{4x}.$$

5) De même, pour $x > 0$ et $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{1+4x^2n^2}$ puis

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2n^2} = 1 + F(x)$$

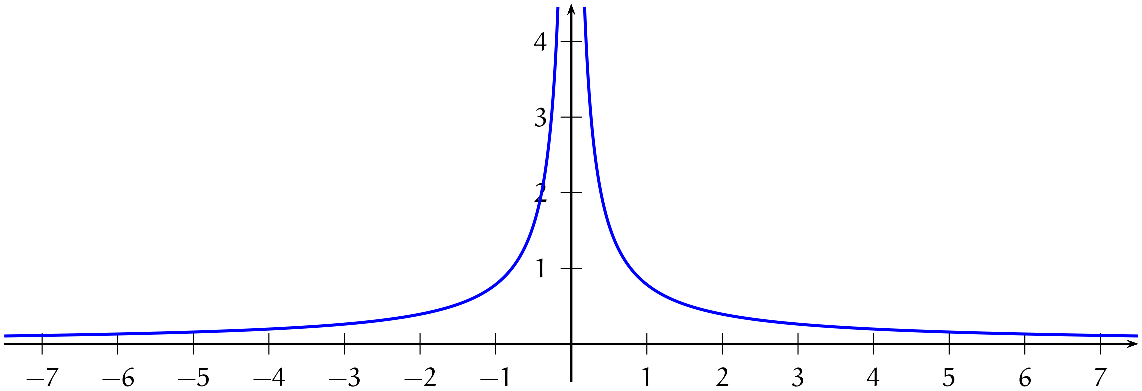
et donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2t^2}\,dt - 1 \leqslant F(x)$. On a montré que

$$\forall x > 0,\ \frac{\pi}{4x} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}.$$

6) Pour $x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4x}$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Pour $x > 0$, $1 - \dfrac{4x}{\pi} \leqslant \dfrac{F(x)}{\pi/4x} \leqslant 1$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\pi/4x} = 1$ et donc $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\pi}{4x}$.

7) Allure du graphe. (en admettant que F est « à peu près convexe sur $]0, +\infty[$ »)



8) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Quand t tend vers 0, $\dfrac{\sin t}{e^{xt}-1} \sim \dfrac{t}{xt} = \dfrac{1}{x}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}$ est prolongeable par continuité en 0 à droite et donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
Quand t tend vers $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}\right| = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $x > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On en déduit l'existence de $G(x)$.

On a montré que la fonction G est définie sur $]0,+\infty[$.

9) Soit $a > 0$. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\sin t}{e^{xt}-1} \end{array}$.

• Pour chaque $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
• Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.
• Pour chaque $(x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$, la fonction $|\Phi(x,t)| = \dfrac{|\sin t|}{e^{xt}-1} \leqslant \dfrac{|\sin t|}{e^{at}-1} = \varphi(t)$ où de plus, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction G est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction G est continue sur $]0,+\infty[$.

10) Soit $\alpha > 0$. Soit $A > 0$.

$$\int_0^A \sin t e^{-\alpha t}\,dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^A e^{it}e^{-\alpha t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left(\int_0^A e^{(-\alpha+i)t}\,dt\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(-\alpha+i)t}}{-\alpha+i}\right]_0^A = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(-\alpha+i)A}-1}{-\alpha+i}\right).$$

Comme $\left|e^{(-\alpha+i)A}\right| = e^{-\alpha A} \underset{A\to+\infty}{\rightarrow} 0$, on en déduit que $e^{(-\alpha+i)A} \underset{A\to+\infty}{\rightarrow} 0$. Donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t e^{-\alpha t}\,dt$ est une intégrale convergente et

$$\int_0^{+\infty} \sin t e^{-\alpha t}\,dt = \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{-\alpha+i}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}\right) = \frac{1}{\alpha^2+1}.$$

11) Soient > 0 et $t > 0$. Alors $e^{-2xt} \in]-1,1[$ puis

$$\frac{\sin t}{e^{2xt}-1} = e^{-2xt}\sin t\frac{1}{1-e^{-2xt}} = e^{-2xt}\sin t\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nxt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin t\, e^{-2(n+1)xt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t\, e^{-2nxt}$$

12) 1ère solution. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,+\infty[$, posons $g_n(t) = \sin t e^{-2nxt}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose encore $G_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k$. La suite de fonctions de terme général G_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2xt}-1}$.
Chaque fonction G_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,+\infty[$,

$$|G_n(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |g_k(t)| = |\sin t|\sum_{k=1}^{n} e^{-2kxt} \leqslant |\sin t|\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2kxt} = \frac{|\sin t|}{e^{2xt}-1} = \varphi(t).$$

De plus, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 8.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} G_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} G_n(t)\,dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} G_n(t)\,dt\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-2kxt}\,dt\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(2kx)^2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1+4k^2x^2} \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x>0$, $F(x)=G(x)$ puis par parité, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $F(x)=G(|x|)$.

Exercice 4

1) On effectue quatre expériences identiques et indépendantes. Chaque expérience a deux éventualités à savoir « le client a acheté le produit A » avec la probabilité p et « le client a acheté le produit B » avec la probabilité $1-p$. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et p et Y suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $1-p$:

$$\forall k\in[\![0,4]\!],\ P(X=k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k} \text{ et } P(Y=k)=\binom{4}{k}p^{4-k}(1-p)^k.$$

Ensuite, $E(X)=4p$ et $E(Y)=4(1-p)$.

$(X,Y)(\Omega)=\{(4,0),(3,1),(2,2),(1,3),(0,4)\}$ et donc $Z(\Omega)=\{2,3,4\}$.

- $P(Z=2)=P((X=2)\cap(Y=2))=P(X=2)=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2=6p^2(1-p)^2$.
- $P(Z=3)=P((X=3)\cap(Y=1))+P((X=1)\cap(Y=3))=P(X=1)+P(X=3)=\binom{4}{1}p(1-p)^3+\binom{4}{3}p^3(1-p)$ $=4p(1-p)^3+4p^3(1-p)=4p(1-p)\left(2p^2-2p+1\right)$.
- $P(Z=4)=P(X=0)+P(X=4)=p^4+(1-p)^4$.

Z est le nombre de boîtes entamées à la fin de la journée.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$. La variable « X sachant que $N=n$ » suit la loi binomiale de paramètres n et p. Donc,

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P_{N=n}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

3) $(X,N)(\Omega)=\left\{(k,n)\in\mathbb{N}^2/\ 0\leqslant k\leqslant n\right\}$. Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $0\leqslant k\leqslant n$.

$$P(X=k,N=n)=P(N=n)\times P_{N=n}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

4) $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k,N=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda p}.
\end{aligned}$$

Donc, X suit la loi de Poisson de paramètre λp. On sait alors que $E(X)=\lambda p$ et $V(x)=\lambda p$.

5) Par symétrie des rôles, Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$. Soit $(k,l)\in\mathbb{N}^2$.

$$
\begin{aligned}
P(X=k, Y=l) = P(X=k, X+Y=k+l) = P(X=k, N=k+l) &= \binom{k+l}{k} p^k (1-p)^{k+l-k} \frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \times \frac{\lambda(1-p)^l}{l!} e^{-\lambda(1-p)} \\
&= P(X=k) \times P(Y=l).
\end{aligned}
$$

Donc, les variables X et Y sont indépendantes.

6) Puisque $N = X + Y$,

$$
\begin{aligned}
\text{Cov}(X, N) &= E(XN) - E(X)E(N) = E\left(X^2 + XY\right) - E(X)(E(X) + E(Y)) \text{ (par linéarité de l'espérance)} \\
&= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 + E(XY) - E(X)E(Y) = V(X) + \text{Cov}(X, Y) \\
&= V(X) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= \lambda p.
\end{aligned}
$$

7) Soit $k \in \mathbb{N}$. $Z \leqslant k \Leftrightarrow \text{Max}(X, Y) \leqslant k \Leftrightarrow X \leqslant k$ et $Y \leqslant k$. Donc,

$$
\begin{aligned}
P(Z \leqslant k) &= P((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant\leqslant k)) = P(X \leqslant k) \times P(Y \leqslant k) \text{ (car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k} P(X=j)\right)\left(\sum_{j=0}^{k} P(Y=j)\right) = \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}\right)\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)}\right) \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda p)^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\lambda} \times S(k, \lambda p) \times S(k, \lambda(1-p)).
\end{aligned}
$$

8) (a) Fonction $S(k,x)$.

```
def S(k,x) :
    s,t=1,1
    for i in range(1,k+1) :
        t=t*x/j
        s=s+t
    return s
```

(b) La probabilité demandée est $P(Z \geqslant 6)$ avec $P(Z \geqslant 6) = 1 - P(Z \leqslant 5) = 1 - e^{-10} \times S(5,5)^2$. La commande demandée est alors

```
print(1-exp(-10)*S(5,5)**2)
```

