Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice I

1) Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ et donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Mais alors, $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

2) $u^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ u(x) \in \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

3) E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$. D'après le théorème du rang, $n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) \geqslant \dim(\mathrm{Im}(u))$ (car $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$) et donc $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dfrac{n}{2}$.

4) a) D'après la question précédente, $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dfrac{2}{2} = 1$. Comme d'autre part $u \neq 0$, on a donc $\mathrm{rg}(u) = 1$. Le théorème du rang fournit ensuite $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2 - \mathrm{rg}(u) = 1$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1 < +\infty$. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$ et que $\mathrm{Im}(u)$ est une droite vectorielle que l'on note D.

b) i) Puisque u et v commutent, v laisse stable $\mathrm{Im}(u) = D$ ou encore $v(D) \subset D$.

ii) Si $v = 0$, alors $u \circ v = 0$.
Sinon, la question a) s'applique à v : $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)$ est une droite vectorielle. La droite D est stable par v. Une telle droite est engendrée par un vecteur propre x_0 de v. v étant nilpotent, 0 est l'unique valeur propre de v et on en déduit que $v(x_0) = 0$ puis que $v_{/D} = 0_{/D}$ ou encore $D \subset \mathrm{Ker}(v)$ puis $D = \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v)$ par égalité des dimensions. Par suite

$$u \circ v(E) = v \circ u(E) = v(D) = \{0\},$$

ou encore $u \circ v = 0$.

c) D'après la question précédente, on a $v = 0$ ou $w = 0$ et dans ce cas, $v \circ w = 0$, ou bien on a $v \neq 0$, $w \neq 0$ et $D = \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Im}(w)$. Mais alors,

$$v \circ w(E) = v(D) = \{0\},$$

et donc $v \circ w = 0$.

5) a) Soit $i \in [\![1, m-1]\!]$. u_{i+1} commute avec $u_1 \circ \ldots \circ u_i$ et donc F_i est stable par u_{i+1}.

b) Si $m = 2$, c'est la question 3. On suppose dorénavant $m \geqslant 3$.
Montrons par récurrence que pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, $\dim(F_i) \leqslant \dfrac{n}{2^i}$.

- C'est vrai pour $i = 1$ d'après la question 3.
- Soit $i \in [\![1, m-2]\!]$. Supposons que $\dim(F_i) \leqslant \dfrac{n}{2^i}$. Soit v_{i+1} la restriction de u_{i+1} à F_i. D'après la question précédente, v_{i+1} induit un endomorphisme de F_i, nilpotent d'indice inférieur ou égal à 2. D'après la question 3,

$$\dim(F_{i+1}) = \dim(u_{i+1}(F_i)) = \dim(v_{i+1}(F_i)) \leqslant \frac{\dim(F_i)}{2} \leqslant \frac{n}{2^{i+1}}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

c) En particulier, $\dim(F_m) \leqslant \dfrac{n}{2^m} < 1$. Donc $F_m = \{0\}$ ou encore $u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_m = 0$.

6) a) Soit u l'endomorphisme de E canoniquement associé à A. Puisque la base canonique est orthonormée, on sait que ${}^tA$ est la matrice de u^* dans la base canonique.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$ et $x' \in \mathrm{Im}(u^*)$. Il existe $y \in E$ tel que $x' = u^*(y)$

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0.$$

Donc, $\mathrm{Im}(u^*) \subset (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$. D'autre part, on sait que u et u^* ont même rang. Donc

$$\dim(\mathrm{Im}(u^*)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim\left((\mathrm{Ker}(u))^{\perp}\right).$$

Finalement, $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$. En particulier, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u^*)$ ou encore $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)$ avec l'identification faite par l'énoncé.

b) Pour tout $x \in E$, $(A + {}^tA)x = Ax + {}^tAx \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$. Donc $\mathrm{Im}(A + {}^tA) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$.
Inversement, soit $y \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$. D'après la question précédente, il existe $(x_1, x_2, x_1', x_2') \in \mathrm{Ker}(A) \times \mathrm{Im}({}^tA) \times \mathrm{Ker}(A) \times \mathrm{Im}({}^tA)$ tel que

$$y = A(x_1 + x_2) + {}^tA(x_1' + x_2').$$

Déjà $Ax_1 = 0$. Ensuite, puisque $A^2 = 0$, on a aussi $({}^tA)^2 = 0$ et donc $\mathrm{Im}({}^tA) \subset \mathrm{Ker}({}^tA)$. Donc ${}^tAx_2' = 0$. Il reste

$$y = Ax_2 + {}^tAx_1'.$$

Maintenant, $x_2 \in \mathrm{Im}{}^tA$ et donc ${}^tAx_2 \in \mathrm{Im}(({}^tA)^2) = \{0\}$ puis ${}^tAx_2 = 0$. De même, $x_1' \in \mathrm{Ker}(A)$ et donc $Ax_1' = 0$. On obtient

$$y = Ax_1' + Ax_2 + {}^tAx_1' + {}^tAx_2 = (A + {}^tA)(x_1' + x_2) \in \mathrm{Im}(A + {}^tA).$$

Ceci montre que $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA) \subset \mathrm{Im}(A + {}^tA)$ et finalement que $\mathrm{Im}(A + {}^tA) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$.

Exercice II

1) Théorème de convergence dominée (pour les suites de fonctions). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :

- chaque fonction f_n est continue par morceaux sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors

- la suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
- la fonction f est intégrable sur I,
- $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

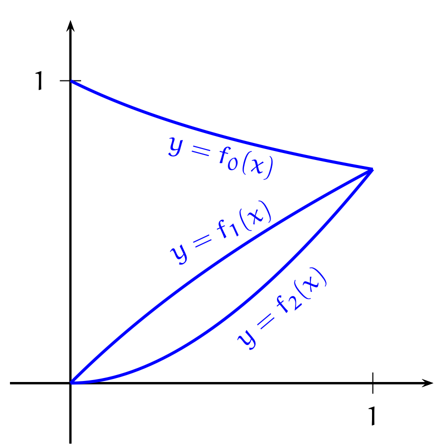
2) a) f_0 est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, $f_0'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}$. f_0 est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= nx^{n-1}(1+x)^{-1/2} + x^n\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} = \frac{1}{2}(2n(1+x) - x)x^{n-1}(1+x)^{-3/2} \\
&= \frac{1}{2}((2n-1)x + 2n)x^{n-1}(1+x)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Pour tout x de $[0,1]$, $(2n-1)x + 2n \geqslant 2n > 0$. Donc, si $n = 1$, f_n' est strictement positive sur $[0,1]$ et si $n \geqslant 2$, f_n' est strictement positive sur $]0,1]$ et s'annule en 0. Dans tous les cas, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) Graphique.



3) Soit $x \in [0,1]$.

• Si $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

• Si $x = 1$, $f_n(x) = f_n(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ si } x = 1 \end{cases}$. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers f sur $[0,1]$, puisque chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$, la fonction f devrait continue sur $[0,1]$ ce qui n'est pas. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout x de $[0,1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ puis $\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}$. En intégrant, on obtient $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\ dx = \dfrac{1}{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}(n+1)u_n &= \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{n+1}}{2(x+1)^{3/2}}\ dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^{3/2}}\ dx.\end{aligned}$$

6) Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^{3/2}}\ dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\ dx = \frac{1}{n+2}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^{3/2}}\ dx = 0$.

D'après la question précédente, quand n tend vers $+\infty$, $(n+1)u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + o(1)$ ou encore $(n+1)u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puis $u_n \sim \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$.

7) Une nouvelle intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)u_n - \frac{n+2}{\sqrt{2}} &= \frac{n+2}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^{3/2}}\ dx \\ &= \frac{n+2}{2}\left(\left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)(x+1)^{3/2}}\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(n+2)(x+1)^{5/2}}\ dx\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^{5/2}}\ dx,\end{aligned}$$

et donc $(n+2)(n+1)u_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} + \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^{5/2}}\ dx$.

8) Comme à la question 6, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^{5/2}}\ dx = 0$ puis, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)\sqrt{2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n\sqrt{2}}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} + \frac{1}{4\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n\sqrt{2}} - \frac{1}{n^2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n\sqrt{2}} - \frac{3}{4\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

9) Soit k un entier naturel non nul. Des intégrations par parties successives, licites car g est de classe C^∞ sur le segment $[0,1]$, fournissent

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n g(x)\,dx &= \frac{g(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}g'(x)\,dx \\
&= \frac{g(1)}{n+1} - \frac{g'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}g''(x)\,dx \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{g(1)}{n+1} - \frac{g'(1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}g^{(k-1)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\int_0^1 x^{n+k}g^{(k)}(x)\,dx \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^i g^{(i)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\int_0^1 x^{n+k}g^{(k)}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

La fonction $g^{(k)}$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc bornée sur ce segment. En posant $\left\|g^{(k)}\right\|_\infty = \sup\left\{\left|g^{(k)}(x)\right|,\ x\in[0,1]\right\}$, on en déduit que

$$\left|\int_0^1 x^{n+k}g^{(k)}(x)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{n+k}\left|g^{(k)}(x)\right|\,dx \leqslant \left\|g^{(k)}\right\|_\infty\int_0^1 x^{n+k}\,dx = \frac{\left\|g^{(k)}\right\|_\infty}{n+k+1}$$

et en particulier, quand n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 x^{n+k}g^{(k)}(x)\,dx = o(1)$. Finalement, quand n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^1 x^n g(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^i g^{(i)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+i+1)} + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Ensuite, chaque suite $\dfrac{(-1)^i g^{(i)}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+i+1)}$ admet un développement limité à l'ordre k quand n tend vers $+\infty$, de la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{\alpha_{i,j}}{n^j} + o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ et on obtient donc un développement limité de la forme

$$\int_0^1 x^n g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_j}{n^j} + o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Pour $k=2$, on a plus explicitement

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n g(x)\,dx &= \frac{g(1)}{n+1} - \frac{g'(1)}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{g(1)}{n} - \frac{g(1)}{n^2} - \frac{g'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\frac{g(1)}{n} - \frac{g(1)+g'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

10) Si on suppose de plus h de classe C^1 sur $[0,1]$, la question précédente montre que $n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\,dx$ tend vers $h(1)$ quand n tend vers $+\infty$. Démontrons que ce résultat persiste quand on suppose simplement h continue sur $[0,1]$. Pour cela, on commence par démontrer que $n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\,dx - n\int_0^1 x^n h(1)\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon>0$. Puisque la fonction h est continue en 1, il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que pour tout $x\in]1-\alpha,1]$, $|f(x)-f(1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\left|n\int_0^1 x^n h(x)\ dx - n\int_0^1 x^n h(1)\ dx\right| &= \left|n\int_0^1 x^n (h(x)-h(1))\ dx\right|\\
&\leqslant \left|n\int_0^{1-\alpha} x^n (h(x)-h(1))\ dx\right| + \left|n\int_{1-\alpha}^1 x^n (h(x)-h(1))\ dx\right|\\
&\leqslant n\int_0^{1-\alpha} x^n (|h(x)|+|h(1)|)\ dx + n\int_{1-\alpha}^1 x^n |h(x)-h(1)|\ dx\\
&\leqslant 2\|h\|_\infty \frac{n(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{n\alpha}{n+1}\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leqslant 2\|h\|_\infty (1-\alpha)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, $2\|h\|_\infty(1-\alpha)^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $2\|h\|_\infty(1-\alpha)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a alors $\left|n\int_0^1 x^n h(x)\ dx - n\int_0^1 x^n h(1)\ dx\right| < \varepsilon$.

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$, $n\int_0^1 x^n h(x)\ dx - \frac{nh(1)}{n+1} = o(1)$ et donc

$$n\int_0^1 x^n h(x)\ dx = \frac{nh(1)}{n+1} + o(1) = h(1) + o(1).$$

On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n h(x)\ dx = h(1)$.

Exercice III

1) $x^2 - y^2 + ax + by = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}$.

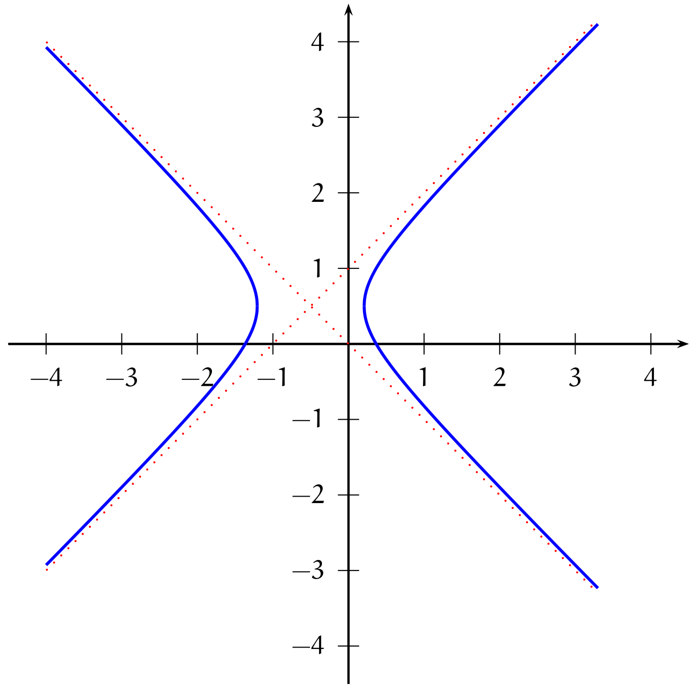
Si $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2} \neq 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole. Si $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2} = 0$, $\mathcal{C}$ est une réunion de deux droites sécantes.

2) Si $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2} = 0$, les axes de $\mathcal{C}$ ne sont pas définis.

Si $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2} > 0$, une équation de $\mathcal{C}$ est $\dfrac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}}\right)^2} - \dfrac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}}\right)^2} = 1$. Dans ce cas, l'axe focal de $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = \frac{b}{2}$ et l'axe non focal de $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $x = -\frac{a}{2}$.

Si $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2} < 0$, une équation de $\mathcal{C}$ est $\dfrac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}}\right)^2} - \dfrac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{-\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}}\right)^2} = -1$. Dans ce cas, l'axe focal de $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $x = -\frac{a}{2}$ et l'axe non focal de $\mathcal{C}$ est la droite d'équation $y = \frac{b}{2}$.

3) Graphique.



4) Soit $\Omega\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$. Dans le repère $\mathscr{R}' = \left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, une équation de $\mathcal{C}$ est $X^2 - Y^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + 2}{4}$.
Par suite, un point $M(X, Y)_{\mathscr{R}'}$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si son symétrique par rapport à Ω à savoir le point $(-X, -Y)_{\mathscr{R}'}$ appartient à $\mathcal{C}$. Ceci montre que ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

5) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $z = x + iy$. Alors $x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$ puis

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 + ax + by - \frac{1}{2} &= \frac{1}{4}(z + \overline{z})^2 + \frac{1}{4}(z - \overline{z})^2 + \frac{a}{2}(z + \overline{z}) + \frac{b}{2i}(z - \overline{z}) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(z^2 + \overline{z}^2 + (a - ib)z + (a + ib)\overline{z} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(z^2 + \overline{z}^2 + (a - ib)z + (a + ib)\overline{z} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z^2 + \overline{z}^2 + \overline{p}z + p\overline{z} - 1 = 0.$$

6) $p \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 2a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a \in \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

7) p et q sont les racines de l'équation $z^2 - (p + q)z + pq = 0$ ou encore $z^2 + z + 2 = 0$. Puisque $b \geqslant 0$, on en déduit que $p = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $q = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ puis $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

8) On sait que $\omega^7 = 1$ et que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$. Donc

$$
\begin{aligned}
\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)\left(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}\right) &= 1 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega + 1 + \omega^{-2} + \omega^3 + \omega^2 + 1 \\
&= 1 + \omega^6 + \omega^4 + \omega + 1 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^2 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 2.
\end{aligned}
$$

9) Ainsi, $\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)\left(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}\right) = pq$. D'autre part,

$$\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right) + \left(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}\right) = \left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right) + \left(\omega^6 + \omega^5 + \omega^3\right) = -1 = p + q.$$

Ainsi, $\left(\omega + \omega^2 + \omega^4\right)$ et $\left(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}\right)$ sont aussi les racines de l'équation $z^2 + z + 2 = 0$. Donc, l'un de deux nombres est p et l'autre est q.

10) $\mathrm{Im}\left(\omega+\omega^2+\omega^4\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) > 0$ et $\mathrm{Im}\left(\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-4}\right) = \mathrm{Im}\left(\overline{\omega+\omega^2+\omega^4}\right) = -\left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) < 0$.

Puisque $\mathrm{Im}(p) > 0$, on a donc $\omega+\omega^2+\omega^4 = p = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-4} = q = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

11) ω, ω^2 et ω^4 sont les racines du polynôme $X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$ où $\sigma_1 = \omega+\omega^2+\omega^4 = p$, $\sigma_3 = \omega\omega^2\omega^4 = \omega^7 = 1$ et

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \omega\omega^2+\omega\omega^4+\omega^2\omega^4 = \omega^3+\omega^5+\omega^6\\ &= \omega^{-4}+\omega^{-2}+\omega^{-1} = q.\end{aligned}$$

Donc, ω, ω^2 et ω^4 sont les racines du polynôme X^3-pX^2+qX-1.

12) Un polynôme de degré 4 dont les racines sont 1, ω, ω^2 et ω^4 est

$$(X-1)(X^3-pX^2+qX-1) = X^4-(1+p)X^3+(p+q)X^2-(q+1)X+1 = X^4+qX^3-X^2+pX+1.$$

Posons $P = X^4+qX^3-X^2+pX+1$.

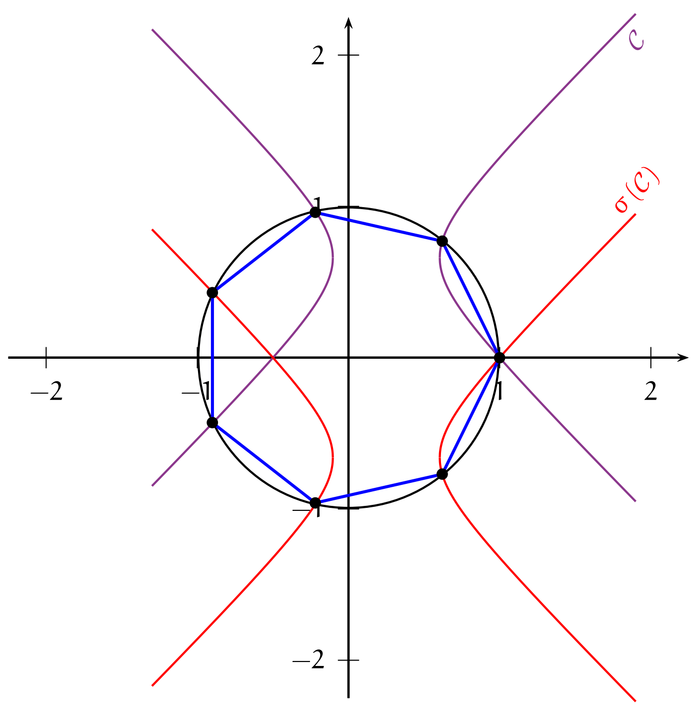
13) Notons U l'ensemble des nombres complexes de module 1. D'après la question 5,

$$\begin{aligned}z\in\mathcal{C}\cap U &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2+\overline{z}^2+qz+p\overline{z} = 1\\ z\overline{z} = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{z} = \frac{1}{z}\\ z^2+\frac{1}{z^2}+qz+p\frac{1}{z} = 1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{z} = \frac{1}{z}\\ z^4+qz^3-z^2+pz+1 = 0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow P(z) = 0 \text{ (car les racines de } P \text{ sont de module } 1)\\ &\Leftrightarrow z\in\{1,\omega,\omega^2,\omega^4\}.\end{aligned}$$

Ainsi, 1, ω, ω^2 et ω^4 sont les points d'intersection de la conique $\mathscr{C}$ avec le cercle de centre 0 et de rayon 1 (quand $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{7}}{2}$).

14) a) $\sigma(p) = \overline{p} = q$.

b)



c) $\mathcal{U} \cap (\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C})) = \{1, \omega, \omega^2, \omega^4, \overline{\omega}, \overline{\omega}^2, \overline{\omega}^4\} = \{1, \omega, \omega^2, \omega^4, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-4}\} = \{\omega^k,\ 0 \leqslant k \leqslant 6\} = U_7$.

