**Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE**

**Epreuve de Mathématiques A MP**

---

# Partie I

**1)** Il est connu que les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles de l'équation $z'' + z = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

**2)** Quand $x$ tend vers $0$, $A\cos(x) + B\sin(x) = A + Bx + o(x)$.

**3)** Si $A \neq 0$, quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, $\left|\dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}\right| \sim \dfrac{|A|}{\sqrt{x}} \to +\infty$.

Si $A = 0$, $\dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{Bx + o(x)}{\sqrt{x}} = B\sqrt{x} + o(x)$. Dans ce cas, $\dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures.

En résumé, $\dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}$ a une limite réelle quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures si et seulement si $A = 0$. Si $B = 0$, $x \mapsto \dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}$ est la fonction nulle et il n'est pas question d'en donner un équivalent. Si $A = 0$ et $B \neq 0$, $\dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}} \sim B\sqrt{x}$ quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures.

# Partie II

**4)** Sur $]0, +\infty[$, $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$ s'écrit encore $y'' + \dfrac{1}{x}y' + \left(1 - \dfrac{1}{4x^2}\right)y = 0$. Puisque les deux fonctions $a\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $b\ :\ x \mapsto 1 - \dfrac{1}{4x^2}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, on sait que les solutions de $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

**5)** Si la fonction $y$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, alors la fonction $z\ :\ x \mapsto \sqrt{x}y(x)$ l'est car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Inversement, si la fonction $z$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, alors la fonction $y\ :\ x \mapsto \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$ l'est. En résumé, $y$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $z$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

Soit donc $y$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, d'après la formule de Leibniz

$$z''(x) = y''(x)\sqrt{x} + 2y'(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + y(x)\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right) = \frac{4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x)}{4x\sqrt{x}}.$$

Par suite, pour tout $x > 0$, $x^2y''(x) + xy'(x) - \dfrac{1}{4}y(x) = z''(x)x\sqrt{x}$ puis

$$x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y(x) = z''(x)x\sqrt{x} + x^2\frac{z(x)}{\sqrt{x}} = 0 = x\sqrt{x}(z''(x) + z(x)).$$

Donc,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } \left(E_{\frac{1}{2}}\right) \text{ sur } ]0, +\infty[ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x\sqrt{x}(z''(x) + z(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ z''(x) + z(x) = 0. \end{aligned}$$

**6)** D'après la partie I, les solutions de l'équation $z'' + z = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et donc les solutions de $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$ sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

**7)** D'après la partie I, les solutions de $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$ sur $]0, +\infty[$ qui admettent une limite finie en $0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto B\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$. Elles constituent un espace vectoriel de dimension 1 : l'espace engendré par la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

 

**8)** La fonction $f_{\frac{1}{2}}$ est à chercher parmi les fonctions non nulles ayant une limite finie en $0$ c'est-à-dire de la forme $f_B\ :\ x \mapsto B\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$, $B \neq 0$. Comme $f_B \sim \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} \Leftrightarrow B\sqrt{x} \sim \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}} \Leftrightarrow B = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, il existe une et une seule solution au problème posé à savoir $f_{\frac{1}{2}}\ :\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

# Partie III

**9)** $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 - 0 = 1$.

Soit $x > 0$. Soient $\varepsilon$ et $A$ deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt = -A^x e^{-A} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Quand $\varepsilon$ tend vers $0$, $\varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ tend vers $0$ car $x > 0$. D'autre part, quand $A$ tend vers $+\infty$, $A^x e^{-A}$ tend vers $0$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand $\varepsilon$ vers $0$ et $A$ tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

**10) a)** $R$ est la borne supérieure de $\{r \in [0, +\infty[/\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

**b)** On sait que $S$ est de classe $C^\infty$ sur $]-R, R[$ et que ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour $x \in ]-R, R[$,

$$\begin{aligned}
xS''(x) + (2\alpha+1)S'(x) + xS(x) &= x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + (2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+2\alpha)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\
&= (2\alpha+1)a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right)x^n.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
S \text{ solution de } (E'_\alpha) \text{ sur } ]-R, R[ &\Leftrightarrow \forall x \in ]-R, R[,\ (2\alpha+1)a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right)x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\alpha+1)a_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \\
&\quad \text{(par unicité des coefficients d'une série entière)} \\
&\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \text{ (car } 2\alpha+1 \neq 0).
\end{aligned}$$

**11) a)** Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $(2p+1)(2p+1+2\alpha)a_{2p+1} + a_{2p-1} = 0$ et donc $a_{2p+1} = -\dfrac{a_{2p-1}}{(2p+1)(2p+1+2\alpha)}$ (car $(2p+1)(2p+1+2\alpha) \neq 0$. Puisque $a_1 = 0$, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.

**b)** Si $a_0 = 0$, alors par récurrence, les $a_{2n}$ sont nuls puis tous les $a_n$ sont nuls car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = -\dfrac{a_{2n-2}}{(2n)(2n+2\alpha)}$. Dans ce cas, $R = +\infty$.
Si $a_0 = 0$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} \neq 0$. Soit alors $x$ un réel non nul.

$$\left|\frac{a_{2n}x^{2n}}{a_{2n-2}x^{2n-2}}\right| = \frac{1}{(2n)(2n+2\alpha)}x^2.$$

Cette expression tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Comme $0 \in [0, 1[$, la règle de d'Alembert permet d'affirmer que la série numérique de terme général $a_{2n}x^{2n}$ converge. Puisque les $a_{2n+1}$ sont nuls, la série de terme général $a_n x^n$ converge.

 

Puisque, pour tout réel $x$, la série numérique de terme général $a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge, on a $R = +\infty$. On a montré dans tous les cas que $R = +\infty$. Ceci valide tous les calculs précédents sur $\mathbb{R}$ : les séries entières solutions de $(E'_\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$ où la suite $(a_n)$ vérifie les relations de la question 10.b.

**c)** On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = -\dfrac{1}{(2n)(2n+2\alpha)}a_{2(n-1)} = -\dfrac{1}{2^2 n(n+\alpha)}a_{2(n-1)}$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{2n} = -\frac{1}{2^2 n(n+\alpha)} \times -\frac{1}{2^2(n-1)(n+\alpha-1)} \times \ldots \times -\frac{1}{2^2 \times 1 \times (1+\alpha)} \times a_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+\alpha)} a_0.$$

Ensuite, d'après la question 9,

$$\prod_{k=1}^{n}(k+\alpha) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)} = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)},$$

(produit télescopique). Donc, $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\alpha+1)}a_0$, ce qui reste vrai pour $n = 0$.

**12)** Sur $]0, +\infty[$, $(E_\alpha)$ s'écrit encore $y'' + \dfrac{1}{x}y' + \left(1 - \dfrac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$. Puisque les deux fonctions $a\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $b\ :\ x \mapsto 1 - \dfrac{\alpha^2}{x^2}$ sont continues sur $]0, +\infty[$, on sait que les solutions de $(E_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

**13)** La fonction $y$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si la fonction $z$. Pour tout réel $x > 0$, on a $y(x) = x^\alpha z(x)$. D'après la formule de Leibniz, pour tout réel $x > 0$, on a

$$y'(x) = x^\alpha z'(x) + \alpha x^{\alpha-1}z(x),$$

et

$$y''(x) = x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}z'(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x).$$

Par suite, pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
x^2y''(x) + xy4(x) + (x^2-\alpha^2)y(x) &= x^2\left(x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}z'(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}z(x)\right) + x\left(x^\alpha z'(x) + \alpha x^{\alpha-1}z(x)\right) \\
&\quad + (x^2-\alpha^2)x^\alpha z(x) \\
&= x^{\alpha+2}z''(x) + (2\alpha+1)x^{\alpha+1}z'(x) + x^{\alpha+2}z(x) \\
&= x^{\alpha+1}\left(xz''(x) + (2\alpha+1)z'(x) + xz(x)\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_\alpha) \text{ sur } ]0, +\infty[ &\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^2y''(x) + xy4(x) + (x^2-\alpha^2)y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^{\alpha+1}\left(xz''(x) + (2\alpha+1)z'(x) + xz(x)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ xz''(x) + (2\alpha+1)z'(x) + xz(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E'_\alpha) \text{ sur } ]0, +\infty[.
\end{aligned}$$

**14)** Pour tout réel $x > 0$, $f_\alpha(x) = \dfrac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n}$ puis

$$x^{-\alpha}f_\alpha(x) = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n}.$$

D'après la question 11.c, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n}$ est solution de $(E'_\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0, +\infty[$ (on a pris $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$). D'après la question 13, la fonction $f_\alpha$ est solution de $(E_\alpha)$ sur $]0, +\infty[$.

 

**15)** La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n}$ est continue en 0 (en tant que somme d'une série entière définie sur $\mathbb{R}$). Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n} = a_0 = \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$. Puisque $a_0 \neq 0$, on obtient $x^{-\alpha}f_\alpha(x) \sim \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$ puis

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}.$$

**16)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)!((n+1)+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)+p-1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+p)!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+p+n)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\
&= 2f_p'(x).
\end{aligned}$$

# Partie IV

**17)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $\begin{array}{cccc} G_p : & \mathbb{R}\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}\\ & (x,t) & \mapsto & \cos(pt - x\sin t)\end{array}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g_p(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi G_p(x,t)\,dt$.

$G_p$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ et pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$, $\dfrac{\partial G_p}{\partial x}(x,t) = \sin t \times \sin(pt - x\sin t)$ puis $\dfrac{\partial^2 G_p}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2 t\times\cos(pt - x\sin t)$.

Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$, $\left|\dfrac{\partial G_p}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1 = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 G_p}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 1 = \varphi_2(t)$, les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ étant continues par morceaux et intégrables sur $[0,\pi]$ (car continues sur le segment $[0,\pi]$).

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto G_p(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$ . De plus, $G_p$ est pourvue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ de dérivées partielles première et seconde par rapport à $x$ vérifiant :

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $i\in\{1,2\}$, $t\mapsto\dfrac{\partial^i G_p}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$,
- pour tout $t\in[0,\pi]$, pour tout $i\in\{1,2\}$, $x\mapsto\dfrac{\partial^i G_p}{\partial x^i}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$, pour tout $i\in\{1,2\}$, $\left|\dfrac{\partial^i G_p}{\partial x^i}(x,t)\right| \leqslant \varphi_i(t)$ où chaque $\varphi_i$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,\pi]$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme, $g_p$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Par suite

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g_p'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\times\sin(pt - x\sin t)\,dt \text{ et } g_p''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\times\cos(pt - x\sin t)\,dt$$

**18)** Soit $x\in\mathbb{R}$. Les deux fonctions $t\mapsto\cos t$ et $t\mapsto\sin(pt - x\sin t)$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0,\pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

 

$$\pi g_p'(x) = \int_0^{\pi} \sin t \times \sin(pt - x\sin t)\ dt = [-\cos t \times \sin(pt - x\sin t)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t \times (p - x\cos t)\cos(pt - x\sin t)\ dt$$
$$= -\cos(\pi)\sin(p\pi) + \int_0^{\pi} \cos t \times (p - x\cos t)\cos(pt - x\sin t)\ dt = \int_0^{\pi} \cos t \times (p - x\cos t)\cos(pt - x\sin t)\ dt.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\pi\left(x^2 g_p''(x) + x g_p'(x) + (x^2 - p^2)g_p(x)\right) &= \int_0^{\pi} \left(-x^2\sin^2 t + x(p - x\cos t)\cos t + (x^2 - p^2)\right)\cos(pt - x\sin t)\ dt \\ &= \int_0^{\pi} p\,(x\cos t - p))\cos(pt - x\sin t)\ dt = [-p\sin(pt - x\sin t)]_0^{\pi} \\ &= -p\sin(p\pi) = 0.\end{aligned}$$

Donc la fonction $g_p$ est solution de $(E_p)$ sur $\mathbb{R}$.

**19) a)** Soit $n \geqslant 2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} w_n &= \int_0^{\pi} \sin t \sin^{n-1} t\ dt = \left[-\cos t \sin^{n-1} t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t \times (n-1)\cos t \sin^{n-2} t\ dt \\ &= (n-1)\int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^{n-2} t\ dt \text{ (car } n-1>0) \\ &= (n-1)\int_0^{\pi} \left(1 - \sin^2 t\right)\sin^{n-2} t\ dt = (n-1)w_{n-2} - (n-1)w_n,\end{aligned}$$

puis $nw_n = (n-1)w_{n-2}$.

**b)** D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} w_{2(n-1)}$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} w_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \frac{1}{2} \times w_0 = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2} \times \pi \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times\ldots\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)^2} \times \pi \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \pi.\end{aligned}$$

**20)** Soit $x \in \mathbb{R}$. $g_1(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t - x\sin t)\ dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos(t)\cos(x\sin t) + \sin(t)\sin(x\sin t))\ dt$. Maintenant,

$$\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(x\sin t)\ dt = \int_{\pi}^{0} \cos(\pi - u)\cos(x\sin(\pi - u))\ (-du) = -\int_0^{\pi} \cos(u)\cos(x\sin u)\ du,$$

et donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\cos(x\sin t)\ dt = 0$. Il reste $g_1(x) = \mathrm{dfrac1}\pi \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(x\sin t)\ dt$.

**21)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t \in [0, \pi]$,

$$g_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\sin^{2n} t\ x^{2n}\right)\ dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \pi]$, posons $h_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\sin^{2n} t\ x^{2n}$. Chaque $h_n$ est continue sur le segment $[0, \pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \pi]$, $|h_n(t)| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. La série numérique de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (vers $\mathrm{ch}(x)$) et donc la série de fonctions de terme général $h_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[0, \pi]$ (vers la fonction $t \mapsto \cos(x\sin t)$.

En résumé, chaque $h_n$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ et la série de fonctions de terme général $h_n$ converge uniformément sur le segment $[0, \pi]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

 

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{\pi}\sin^{2n} t\ dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n w_n}{(2n)!}x^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \text{ (d'après la question 19.b))}\\
&= f_0(x).
\end{aligned}
$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $t \in [0, \pi]$,

$$
g_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin(x\sin t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sin^{2n+2} t\ x^{2n+1}\right)\ dt
$$

Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme (car $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sin^{2n+2} t\ x^{2n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$) et on obtient

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{\pi}\sin^{2n+2} t\ dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n w_{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\pi(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!^2)}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+2)}{2((n+1)!^2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = f_1(x).
\end{aligned}
$$

**22)** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((p-1)t - x\sin t) - \cos((p+1)t - x\sin t)\ dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin(pt - x\sin t)\ dt\\
&= 2g'_p(x) \text{ (d'après la question 17).}
\end{aligned}
$$

**23)** Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g_p = f_p$.

- L'égalité est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$ d'après la question 21.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $g_{p-1} = f_{p-1}$ et que $f_p = g_p$. D'après les questions 16 et 22,

$$
g_{p+1} = g_{p-1} - 2g'_p = f_{p-1} - 2f'_p = f_{p+1}.
$$

Le résultat est démontré par récurrence.

# Partie V

**24)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t + 2\pi) = \mathrm{Re}\left(e^{ix\cos(t+2\pi)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix\cos t}\right) = g(x)$. Donc $g$ est $2\pi$-périodique.

**25)** La fonction $g$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. De plus $g$ est paire. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$
a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)\ dt,
$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\ dt = 0.
$$

La fonction $g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $g$ converge simplement (et même normalement) vers $g$ sur $\mathbb{R}$.

**26)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(g) = 0$.

**27)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t+\pi) = \mathrm{Re}\left(e^{ix\cos(t+\pi)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-ix\cos t}\right) = \cos(x\cos t) = \mathrm{Re}\left(e^{ix\cos t}\right) = g(x)$. Donc $g$ est $\pi$-périodique.

 

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_{2k+1}(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos((2k+1)t)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0} g(\pi-u)\cos((2k+1)(\pi-u))\ (-du) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(u)(-\cos(-(2k+1)u))\ du \text{ (car } g \text{ est } \pi\text{-périodique et paire)} \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(u)\cos((2k+1)u))\ du = -a_{2k+1}(g),
\end{aligned}$$

et donc $a_{2k+1}(g) = 0$.

**28)** Pour $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k}(g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos t)\cos(2kt)\ dt$. D'autre part,

$$2g_{2k}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2kt - x\sin t)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(2kt)\cos(x\sin t) + \sin(2kt)\sin(x\sin t))\ dt$$

Comme à la question 27, en posant $u = \pi - t$, on obtient $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2kt)\sin(x\sin t)\ dt = 0$. Il reste

$$2g_{2k}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2kt)\cos(x\sin t)\ dt.$$

Posons $u = t - \dfrac{\pi}{2}$ ou encore $t = u + \dfrac{\pi}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
2g_{2k}(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2kt)\cos(x\sin t)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\left(2k\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos\left(x\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)\ du \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1)^k\cos(2ku)\cos(x\cos u)\ du \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-1)^k\cos(2ku)\cos(x\cos u)\ du \\
&\text{(par } \pi\text{-périodicité car } \cos(2k(u+\pi))\cos(x\cos(u+\pi))) = \cos(2ku+2k\pi)\cos(-x\cos u) = \cos(2ku)\cos(x\cos u)) \\
&= (-1)^k a_{2k}(g),
\end{aligned}$$

et donc $a_{2k}(g) = 2(-1)^k g_{2k}(x)$.

**29)** D'après les questions précédentes, pour tous réels $t$ et $x$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(e^{ix\cos t}\right) &= \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}(g)\cos(2nt) \\
&= g_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n g_{2n}(x)\cos(2nt).
\end{aligned}$$

 