SESSION 2019

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE PSI

I - Premiers résultats

Q 1. f est nilpotent d'indice si et seulement si $f^1 = 0$ ou encore $f = 0$.

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q 2. Par définition de $p \geqslant 2$, $u^{p-1} \neq 0$ et donc il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q 3. Supposons par l'absurde que $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ soit liée. Il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u^k(x) = 0$.

Soit $i = \text{Min}\{k \in [\![0, p-1]\!] / \ \alpha_k \neq 0\}$. Par définition de i, on a $\displaystyle\sum_{k=i}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0$. On calcule l'image des deux membres par f^{p-1-i} $(p-1-i \geqslant 0)$ et on obtient $\alpha_i f^{p-1}(x) = 0$ (car pour $k \geqslant p$, $f^k = 0$). Ceci est impossible car $\alpha_i \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$. Donc, la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre.

Le cardinal d'une famille libre étant inférieur ou égal à la dimension de E, on en déduit que $p \leqslant 2$ puis que $p = 2$ (car $p \geqslant 2$).

Q 4. Ainsi, $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

$$u^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in E, \ u(u(x)) = 0 \Rightarrow \forall x \in E, \ u(x) \in \text{Ker}(u) \Rightarrow \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u).$$

et en particulier $\dim(\text{Im}(u)) \leqslant \dim(\text{Ker}(u))$. D'après le théorème du rang, $(\dim(\text{Im}(u)), \dim(\text{Ker}(u))) \in \{(0, 2), (1, 1)\}$. Le cas $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$ est exclu car $u \neq 0$. Donc, $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)) = 1$.

En résumé, $\text{Im}(u)$ est un sous-espace de $\text{Ker}(u)$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)) = 1 < +\infty$. On en déduit que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Q 5. Soit $e_1 \in E \setminus \text{Ker}(u)$ puis $e_2 = f(e_1)$. e_2 est un vecteur non nul de $\text{Im}(u)$ qui est une droite vectorielle et donc $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_2)$. Par suite, e_1 n'est pas colinéaire à e_2. (e_1, e_2) est donc une famille libre de E puis une base de E car de cardinal 2. Par construction, $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = 0$. Par suite,

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(f) = J_2.$$

Q 6. Soit N une matrice nilpotente. D'après la question précédente, ou bien $N = 0$ et donc $\det(N) = \text{Tr}(N) = 0$ ou bien N est semblable à J_2 et donc $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(J_2) = 0$ et $\det(N) = \det(J_2) = 0$.
Inversement, si A est une matrice telle que $\text{Tr}(A) = \det(A) = 0$. Alors, $\chi_A = X^2 - (\text{Tr}(A))X + \det A = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 = \chi_A(A) = 0$ et donc A est nilpotente.

I.B - Réduction d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q 7. Par la même démonstration qu'à la question Q4, $u^2 = 0 \Rightarrow \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et en particulier, $r = \dim(\text{Im}(u)) \leqslant \dim(\text{Ker}(u))$. D'après le théorème du rang,

$$r = n - \dim(\text{Ker}(u)) \leqslant n - r$$

et donc $2r \leqslant n$.

Q 8. Si $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$, alors $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)) = r$ puis $n = r + r = 2r$. Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E. Alors, $\dim(S) = n - r = r$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de S.

Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, u(e_1), \ldots, e_r, u(e_r))$ est une base de E.
Puisque $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $u(e_k) \in \text{Ker}(u)$. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{C}^{2r}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r}\alpha_k e_k+\sum_{k=1}^{r}\beta_k u(e_k)=0 &\Rightarrow \sum_{k=1}^{r}\alpha_k e_k=\sum_{k=1}^{r}\beta_k u(e_k)=0 \text{ (car } \sum_{k=1}^{r}\alpha_k e_k\in S \text{ et } \sum_{k=1}^{r}\beta_k u(e_k)\in \mathrm{Ker}(u))\\
&\Rightarrow \forall k\in [\![1,r]\!],\ \alpha_k=0 \text{ et } u\left(\sum_{k=1}^{r}\beta_k e_k\right)=0 \text{ (car } (e_1,\dots,e_r) \text{ est libre)}\\
&\Rightarrow \forall k\in [\![1,r]\!],\ \alpha_k=0 \text{ et } \sum_{k=1}^{r}\beta_k e_k\in \mathrm{Ker}(u)\cap S\\
&\Rightarrow \forall k\in [\![1,r]\!],\ \alpha_k=0 \text{ et } \sum_{k=1}^{r}\beta_k e_k=0\\
&\Rightarrow \forall k\in [\![1,r]\!],\ \alpha_k=\beta_k=0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la famille $\mathscr{B}=(e_1,u(e_1),\dots,e_r,u(e_r))$ est libre. De plus, card $(e_1,u(e_1),\dots,e_r,u(e_r))=2r=n=\dim(E)<+\infty$ et donc $\mathscr{B}$ est une base de E.

Q 9. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
1 & 0 & & & & & & \vdots\\
0 & 0 & \ddots & & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(J_2,\dots,J_2)\in\mathscr{M}_{2r}(\mathbb{C}).$

Q 10. On considère de nouveau un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E puis $(e_1,\dots,e_r)$ une base de S. Comme à la question Q8, la famille $(u(e_1),\dots,u(e_r))$ est une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$ de cardinal r. $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $n-r>r$. Puisque $(n-r)-r=n-2r>0$, on peut compléter la famille libre $(u(e_1),\dots,u(e_r))$ de $\mathrm{Ker}(u)$ en une base $(u(e_1),\dots,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$

Montrons que $\mathscr{B}=(e_1,u(e_1),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ est une base de E.

Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_r,\gamma_1,\dots,\gamma_{n-2r})\in\mathbb{C}^n$. tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k e_k+\sum_{k=1}^{r}\beta_k u(e_k)+\sum_{k=1}^{n-2r}\gamma_k v_k=0$. Comme à la question Q8, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k e_k=\sum_{k=1}^{r}\beta_k u(e_k)+\sum_{k=1}^{n-2r}\gamma_k v_k=0$ puis que $\forall k\in[\![1,r]\!]$, $\alpha_k=\beta_k=0$ et $\forall k\in[\![1,n-2r]\!]$, $\gamma_k=0$.

Ainsi, $\mathscr{B}=(e_1,u(e_1),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ est une famille libre de E, de cardinal $2r+n-2r=n=\dim(E)<+\infty$ et donc $\mathscr{B}$ est une base de E.

Q 11. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\mathrm{diag}(J_2,\dots,J_2,0_{n-2r})$.

I.C - Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Q 12. Si A est nilpotente, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p=0$. Le polynôme X^p est annulateur de A et on sait que toute valeur propre de A est racine de ce polynôme annulateur et est donc nulle. 0 est donc l'unique valeur propre de A.

Q 13. Si A est nilpotente et diagonalisable, alors A est semblable à $\mathrm{diag}(0,\dots,0)=0$ et donc égale à 0. Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.

Q 14. Si A est nilpotente, 0 est l'unique valeur propre de A et donc l'unique racine de son polynôme caractéristique dans $\mathbb{C}$. χ_A est unitaire, de degré n et admet 0 pour racine d'ordre n. Donc, $\chi_A=X^n$.
Inversement, si $\chi_A=X^n$, le théorème de Cayley-Hamilton permet d'affirmer que $A^n=\chi_A(A)=0$ et donc A est nilpotente.

En résumé, A est nilpotente si et seulement si $\chi_A=X^n$.

Q 15. On redit que si 0 est l'unique valeur propre de A, alors $\chi_A=X^n$ puis $A^n=0$ et donc A est nilpotente.

Q 16. Soit T une matrice triangulaire à diagonale nulle. Alors, $\chi_T=X^n$ puis T est nilpotente d'après la question Q14.

Soit N une matrice nilpotente. On sait que toute matrice est triangulable dans $\mathbb{C}$ et donc N est semblable à une matrice triangulaire T. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de T et donc les valeurs propres de N. Ces valeurs propres sont toutes nulles car N est nilpotente et donc la diagonale de T est nulle. En résumé, N est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Q 17. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ puis $P = QX^p$. Alors, $P(A) = Q(A) \times A^p = Q(A) \times 0 = 0$ et donc P est annulateur de A.

Q 18. A est nilpotente et donc 0 est (l'unique) valeur propre de A. Toute valeur propre de A est racine d'un polynôme annulateur de A et donc 0 est racine de P.

Q 19. On note p l'indice de nilpotence de A. Posons $Q = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $a_0 \neq 0$. Si $k = 0$, $Q(A) = a_0 I_n$ est inversible. Supposons $k \geqslant 1$. La matrice $N = -\sum_{i=1}^{k} a_i A^i = A \sum_{i=1}^{k} a_i A^{i-1}$ est nilpotente car, puisque deux polynômes en A commutent, $N^p = A^p \left(-\sum_{i=1}^{k} a_i A^{i-1}\right)^p = 0$.

Mais alors, $\chi_N = X^n$ puis $\det(Q(A)) = \det(a_0 I - N) = \chi_N(a_0) = a_0^n \neq 0$. Donc, $Q(A)$ est inversible.

Puisque $Q(A)$ est une matrice inversible et que toute matrice inversible est simplifiable, $P(A) = 0 \Rightarrow A^m Q(A) = 0 \Rightarrow A^m = 0$. Mais alors $m \geqslant p$ puis $P = X^p X^{m-p} Q$ est un multiple de X^p.

En résumé, p est annulateur de A si et seulement si P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

I.D - Racines carrées de matrices nilpotentes

I.D.1)

Q 20. $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0$. Ensuite, si on note C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, $C_2 = 3C_1$ et $C_3 = -7C_1$ puis $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1)) = 1$ car $C_1 \neq 0$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - 1 = 2$. Donc, 0 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La dernière valeur propre λ de A est fournie par la trace :

$$0 = \mathrm{Tr}(A) = 0 + 0 + \lambda$$

et donc 0 est valeur propre de A d'ordre 3. On en déduit que $\chi_A = X^3$ puis que A est nilpotente d'indice p tel que $2 \leqslant p \leqslant 3$. Une base de $\mathrm{Im}(A)$ est $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est le plan d'équation $x + 3y - 7z = 0$. Puisque $1 + 3 \times 2 - 7 \times 1 = 0$, $C_1 \in \mathrm{Ker}(A)$ puis $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$. Mais alors, $A^2 = 0$ (et $A \neq 0$). A est nilpotente d'indice 2.

Q 21. D'après les questions Q10 et Q11, si $e_1 \notin \mathrm{Ker}(u)$ et si v_1 est un vecteur de $\mathrm{Ker}(u)$ non colinéaire à e_1, $\mathscr{B} = (e_1, u(e_1), v_1)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est $N = \mathrm{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{B}_0 = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$

Déterminons explicitement une telle base $\mathscr{B}$. $\mathrm{Ker}(u)$ est le plan d'équation $x + 3y - 7z = 0$. On prend $e_1 = i = (1, 0, 0)$ (e_1 n'est pas dans $\mathrm{Ker}(u)$) puis $u(e_1) = u(i) = i + 2j + k = (1, 2, 1)$. Le vecteur $v_1 = (3, -1, 0)$ est dans $\mathrm{Ker}(u)$ et n'est pas colinéaire à $u(e_1)$. Donc, le vecteur v_1 convient.

D'après les formules de changement de base, $A = PNP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 22. $u^2 = 0$ et donc $\rho^4 = (\rho^2)^2 = u^2 = 0$. ρ est nilpotent.
$\rho^2 = u$ et donc $\rho \circ u = \rho \circ \rho^2 = \rho^3 = \rho^2 \circ \rho = u \circ \rho$. Donc, ρ et u commutent. On sait alors que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par ρ. Redémontrons-le.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. $u(\rho(x)) = \rho(u(x)) = \rho(0) = 0$ puis $\rho(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par ρ.
Soit $x \in E$. $\rho(u(x)) = u(\rho(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par ρ.

Q 23. Soit $R' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\rho)$. $\mathrm{Im}(u)$ est la droite vectorielle engendrée par $e_2 = u(e_1)$ et donc $\rho(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_2)$. $e_3 = v_1$ est dans $\mathrm{Ker}(u)$ et donc $\rho(e_3) \in \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Donc, R' est de la forme : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & e \\ c & 0 & f \end{pmatrix}$ puis

$$R'^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & e \\ c & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & e \\ c & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ ab+bd+ec & d^2 & de+ef \\ ac+cf & 0 & f^2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $R' = P^{-1}RP$ ou encore $R = PR'P^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} R^2 = A &\Leftrightarrow \left(PR'P^{-1}\right)^2 = PNP^{-1} \Leftrightarrow PR'^2P^{-1} = PNP^{-1} \Leftrightarrow R'^2 = N \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ ab+bd & d^2 & de+ef \\ ac+cf & 0 & f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a = d = f = 0 \text{ et } ec = 1. \end{aligned}$$

Les matrices R' solutions sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(b,c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Déterminons explicitement P^{-1}.

Puisque $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$, $P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i \\ e_2 = i+2j+k \\ e_3 = 3i-j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = e_1 \\ j = 3e_1 - e_3 \\ e_2 = e_1 + 2(3e_1 - e_3) + k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = e_1 \\ j = 3e_1 - e_3 \\ k = -7e_1 + e_2 + 2e_3 \end{array}\right. .$$

Donc, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned} R = PR'P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 3b-1/c & -7b+2/c \\ c & 3c & -7c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b+3c & 3b+9c-\dfrac{1}{c} & -7b-21c+\dfrac{6}{c} \\ 2b-c & 6b-3c-\dfrac{2}{c} & -14b+7c+\dfrac{4}{c} \\ b & 3b-\dfrac{1}{c} & -7b+\dfrac{2}{c} \end{pmatrix} (b,c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

I.D.2)

Q 24. Soit R une éventuelle racine carrée de J_3 dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
$J_3 = E_{2,1} + E_{3,2}$ puis $R^4 = J_3^2 = (E_{2,1} + E_{3,2})(E_{2,1} + E_{3,2}) = E_{3,1}$ puis $R^6 = J_3^3 = J_3^2J_3 = (E_{2,1} + E_{3,2})E_{3,1} = 0$. Donc, R est nilpotente et donc $\chi_R = X^3$. Soit p l'indice de nilpotence de R. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_R = X^3$ est annulateur de A et d'après la question Q19, $\chi_R = X^3$ est un multiple de X^p. Ceci impose $p \leqslant 3$ et donc $R^3 = 0$ puis $R^4 = 0$ ce qui est faux.

Donc, l'équation $R^2 = J_3$ n'a pas de solution dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

I.D.3)

Q 25. Comme à la question précédente, si une matrice carrée de format n est nilpotente d'indice $\alpha \in \mathbb{N}^*$, son polynôme caractéristique X^n est un multiple de X^α d'après la question Q19 et en particulier, $\alpha \leqslant n$.

Soit R une éventuelle racine carrée de V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. R est nilpotente car $R^{2p} = V^p = 0$ d'indice inférieur ou égal à $2p$. De plus, $R^{2p-2} = V^{p-1} \neq 0$ et donc R est nilpotente d'indice $q \in \{2p-1, 2p\}$. En particulier, $2p-1 \leqslant q \leqslant n$. Donc, si l'équation $R^2 = V$ a au moins une solution, nécessairement $2p-1 \leqslant n$. Par contraposition, si $2p-1 > n$, alors l'équation $R^2 = V$ n'a pas de solution.

Q 26. D'après les calculs de la question Q24, $J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$. N est de format 3, nilpotente d'indice 2 et admet au moins une racine carrée à savoir J_3.

Soit $n \geqslant 3$. Soit $V = \text{diag}(N, 0_{n-3}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit $V^2 = \text{diag}\left(N^2, 0_{n-3}\right) = 0_n$ et donc V est une matrice carrée de format $n \geqslant 3$, nilpotente d'indice 2.
Soit $R = \text{diag}(J_3, 0_{n-3}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit

$$R^2 = \operatorname{diag}\left(J_3^2, 0_{n-3}\right) = \operatorname{diag}\left(N, 0_{n-3}\right) = V$$

et donc V admet au moins une racine carrée.

II - Deuxième partie

II.A - Réduction des matrices nilpotentes

Q 27. Pour tout $y \in \operatorname{Im}(u)$, $u(y) \in \operatorname{Im}(u)$ et donc $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u. On note u' l'endomorphisme de $\operatorname{Im}(u)$ induit par u. Pour tout $y \in \operatorname{Im}(u)$, $u'^p(y) = u^p(y) = 0$ et donc u' est nilpotent d'indice inférieur ou égal à p.

Pour tout $x \in E$, $u'^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$ et donc u' est nilpotent d'indice inférieur ou égal à $p-1$. Si $p = 2$, alors u' est nilpotent d'indice 1 ou encore $u' = 0$. Sinon, $p \geqslant 3$. Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Le vecteur $y_0 = u(x_0)$ est un élément de $\operatorname{Im}(u)$ tel que $u'^{p-2}(y_0) = u^{p-2}(u(x_0)) = u^{p-1}(x_0) \neq 0$ et donc $u'^{p-2} \neq 0$.

En résumé, $u'^{p-2} \neq 0$ et $u'^{p-1} = 0$. Donc, u' est nilpotent d'indice $p-1$.

Q 28. Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

$$u\left(C_u(x)\right) = u\left(\operatorname{Vect}\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \operatorname{Vect}\left(u^{k+1}(x)\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Vect}\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}} = C_u(x)$$

et donc $C_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

Soit $\mathscr{E}_x = \left\{k \in \mathbb{N}^* / \ u^k(x) = 0\right\}$. $\mathscr{E}_x$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $p \in \mathscr{E}_x$) et donc $\mathscr{E}_x$ admet un plus petit élément que l'on note $s(x)$. $s(x)$ est par définition un entier naturel non nul tel que $u^{s(x)}(x) = 0$ et $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$.

Q 29. Pour $k \geqslant s(x)$, $u^k(x) = u^{k-s(x)}\left(u^{s(x)}(x)\right) = u^{k-s(x)}(0) = 0$ et donc $C_u(x) = \operatorname{Vect}\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant s(x)-1}$ ou encore, la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant s(x)-1}$ est une famille génératrice de $C_u(x)$.

Vérifions que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant s(x)-1}$ est libre. Supposons par l'absurde qu'il existe $\left(\alpha_0, \ldots, \alpha_{s(x)-1}\right) \in \mathbb{C}^{s(x)} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{s(x)-1} \alpha_k u^k(x) = 0$. Soit i le plus petit des entiers $k \in [\![0, s(x)-1]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Par définition de i, $\displaystyle\sum_{k=i}^{s(x)-1} u^k(x) = 0$. En calculant l'image des deux membres de cette égalité par $u^{s(x)-1-i}$, on obtient $\alpha_i u^{s(x)-1}(x) = 0$ (car pour $k \geqslant s(x)$, $u^k(x) = 0$). Mais ceci est impossible car $\alpha_i \neq 0$ et $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$.

Ainsi, la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant s(x)-1}$ est libre et finalement la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant s(x)-1}$ est une base de $C_u(x)$.

Supposons $s(x) \geqslant 2$. Si pour $k \in [\![1, s(x)]\!]$, on pose $e_k = u^{k-1}(x)$, alors pour tout $k \in [\![1, s(x)-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$ et d'autre part, $u\left(e_{s(x)}\right) = u^{s(x)}(x) = 0$. Donc, si on note u_x l'endomorphisme de $C_u(x)$ induit par u, alors

$$\operatorname{Mat}_{\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)}\left(u_x\right) = J_{s(x)}.$$

Si $s(x) = 1$, alors $C_u(x) = \operatorname{Vect}(x)$ avec $u(x) = 0$ et donc $\operatorname{Mat}_{(x)}\left(u_x\right) = J_1$.

Q 30. Montrons le résultat par récurrence sur $p \geqslant 2$.

- Si $p = 2$, u est nilpotent d'indice 2. D'après la question Q12, il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = \left(e_1, u(e_1), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, \ldots, v_{n-2r}\right)$ où les vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-2r}$ sont dans $\operatorname{Ker}(u)$.
  Posons $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, $\ldots$, $x_r = e_r$, $x_{r+1} = v_1$, $x_{n-r} = v_{n-2r}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $C_u(x_i) = \operatorname{Vect}\left(x_i, u(x_i)\right)$ et pour $r+1 \leqslant i \leqslant n-r$, $C_u(x_i) = \operatorname{Vect}(x_i)$.

  Puisque $\mathscr{B}$ est une base de E, on sait $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(x_i)$.

- Soit $p \geqslant 2$. Supposons le résultat pour p. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice $p+1$. D'après la question Q27, l'endomorphisme u' de $\operatorname{Im}(u)$ induit par u est nilpotent d'indice p. Par hypothèse de récurrence, il existe des vecteurs $y_1, \ldots, y_t$, de $\operatorname{Im}(u)$ tels que $\operatorname{Im}(u) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_{u'}(y_i) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i)$. Chaque $C_u(y_i)$ est de dimension $s(y_i)$ et $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension $r = \operatorname{rg}(u)$. Donc,

$$\sum_{i=1}^{t} s(y_i) = r.$$

Pour chaque vecteur y_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, il existe un vecteur $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$. Pour chaque $i \in [\![1,t]\!]$, on a bien sûr $s(x_i) = s(y_i) + 1$ et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} s(x_i) = r + t$. On a aussi

$$C_{u'}(y_i) = \text{Vect}\left(u(x_i), \ldots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\right) \subset C_u(x_i).$$

Montrons alors que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ est directe. Soit $(\alpha_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant t,\ 0\leqslant j\leqslant s(x_i)-1}$ une famille de nombres complexes telle que

$$\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=0}^{s(x_i)-1} \alpha_{i,j} u^j(x_i)\right) = 0 \quad (*).$$

En prenant l'image des deux membres de cette égalité par u (et en tenant compte de $u^{s(x_i)}(x_i) = 0$ pour chaque i), on obtient

$$\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=0}^{s(x_i)-2} \alpha_{i,j} u^{j+1}(x_i)\right) = 0.$$

Puisque la famille $\left(u(x_1), \ldots, u^{s(x_1)-1}, \ldots, u(x_t), \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t)\right)$ est libre, tous les coefficients de la combinaison linéaire ci-dessus sont nuls. L'égalité $(*)$ s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_{i,s(x_i)-1} u^{s(x_i)-1}(x_i) = 0,$$

et encore une fois, la famille $\left(u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t)\right)$ étant libre, tous les coefficients sont nuls. Ceci montre que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} C_u(x_i)$ est directe.

Comme à la question Q10, la famille $\left(u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t)\right)$ est une famille libre de $\text{Ker}(u)$ de cardinal t que l'on peut compléter en $\left(u^{s(x_1)-1}(x_1), \ldots, u^{s(x_t)-1}(x_t), v_1, \ldots, v_{n-r-t}\right)$ base de $\text{Ker}(u)$. Pour tout $i \in [\![1, n-r-t]\!]$, $C_u(v_i) = \text{Vect}(v_i)$ est une droite vectorielle. On pose $x_{t+1} = v_1$, ..., $x_{n-r} = v_{n-r-t}$. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-r} C_u(x_i)$ est directe.

Montrons alors que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(x_i)$.

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{t} s(x_i) + \sum_{i=1}^{n-r-t} 1 = r + t + n - r - t = n = \dim(E).$$

Ceci montre que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n-r} C_u(x_i)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q 31. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$. D'après la question Q29,

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \text{diag}\left(J_{s(x_1)}, \ldots, J_{s(x_t)}\right).$$

II.B - Partitions d'entiers

Q 32. On reprend la décomposition de E de la question Q30 en posant $k = t$ et on réordonne par ordre décroissant les entiers $s(x_1)$, ..., $s(x_k)$. On obtient des entiers naturels non nuls α_1, ..., α_t, tels que $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_t$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_t = n$. Puis on réordonne les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ et on obtient une base $\mathscr{B}'$ telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \text{diag}(J_{\alpha_1}, \ldots, J_{\alpha_t})$.

Q 33. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Si $\alpha = 1$, $J_\alpha = J_1 = 0$. J_1 est de rang à, nilpotente d'indice 1. Dorénavant, $\alpha \geqslant 2$.

L'écriture de J_α dans la base canonique de $\mathscr{M}_\alpha(\mathbb{C})$ est : $J_\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha-1} E_{i+1,i}$. Montrons par récurrence que pour tout $j \in [\![0, \alpha-1]\!]$, $J_\alpha^j = \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha-j} E_{i+j,i}$.

- L'égalité est vraie quand $j = 0$.

- Soit $j \in [\![0, \alpha - 2]\!]$. Supposons que $J_\alpha^j = \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha-j} E_{i+j,i}$. Alors

$$J_\alpha^{j+1} = (E_{j+1,1} + E_{j+2,2} + \ldots + E_{\alpha,\alpha-j})(E_{2,1} + E_{3,2} + \ldots + E_{\alpha,\alpha-1}) = E_{j+2,1} + E_{j+3,2} + \ldots + E_{\alpha,\alpha-(j+1)}.$$

Le résultat est démontré par récurrence. Ainsi, pour $0 \leqslant j \leqslant \alpha - 1$, $J_\alpha^j = \begin{pmatrix} 0_{j,\alpha-j} & 0_j \\ I_{\alpha-j} & 0_{\alpha-j,j} \end{pmatrix}$. Les j dernières colonnes de J_α^j sont nulles et donc $\mathrm{rg}\left(J_\alpha^j\right) \leqslant \alpha - j$. La matrice extraite $I_{\alpha-j}$, de format $\alpha - j$, est inversible et donc $\mathrm{rg}\left(J_\alpha^j\right) \geqslant \alpha - j$. Finalement, $\forall j \in [\![0, \alpha - 1]\!]$, $\mathrm{rg}\left(J_\alpha^j\right) = \alpha - j$.

Pour $j \in [\![0, \alpha - 1]\!]$, $J_\alpha^j \neq 0$. Ensuite, $J_\alpha^j = (E_{2,1} + E_{3,2} + \ldots + E_{\alpha,\alpha-1}) E_{\alpha,1} = 0$ et donc J_α est nilpotente d'ordre α.

Q 34. Un calcul par blocs fournit : $\forall m \in \mathbb{N}$, $N_\sigma^m = \mathrm{diag}\left(J_{\alpha_1}^m, \ldots, J_{\alpha_k}^m\right)$. Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$N_\sigma^m = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ J_{\alpha_i}^m = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ m \geqslant \alpha_i \Leftrightarrow m \geqslant \alpha_1.$$

Donc, $\alpha_1 = p$.

Q 35. Soit $j \in \mathbb{N}$. Si $j \leqslant p$, Λ_j n'est pas vide car $\alpha_1 = p \geqslant j$ puis, en supprimant les lignes et les colonnes nulles, on obtient $\mathrm{rg}\left(N_\sigma^j\right) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{diag}\left(I_{\alpha_i - j}\right)_{i \in \Lambda_j}\right) = \displaystyle\sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j)$.

Si $j > p$, $\Lambda_j = \varnothing$ et l'égalité est encore vraie car $N_\sigma^j = 0$ et avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle.

Q 36. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On note que $\Lambda_j \subset \Lambda_{j-1}$ et que $\Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j = \{i \in [\![1, k]\!] /\ \alpha_i = j - 1\}$.

$$d_j = \sum_{i \in \Lambda_{j-1}} (\alpha_i - (j-1)) - \sum_{i \in \Lambda_j} (\alpha_i - j) = \sum_{i \in \Lambda_j} 1 + \sum_{i \in \Lambda_{j-1} \setminus \Lambda_j} (\alpha_i - (j-1)) = \mathrm{card}\,(\Lambda_j) + 0 = \mathrm{card}\,(\Lambda_j).$$

Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $d_j = \mathrm{card}\,(\Lambda_j)$.

Q 37. Le nombre k de blocs intervenant dans N_σ est le nombre de blocs J_{α_i} dont la taille est supérieure ou égale 1 ou encore

$$k = d_1 = \mathrm{rg}\,(\mathrm{Id}) - \mathrm{rg}(u) = n - r = \dim(\mathrm{Ker}(u)).$$

Q 38. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Le nombre cherché est le cardinal de $\Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1}$ ou encore est

$$d_j - d_{j+1} = \mathrm{rg}\left(u^{j-1}\right) - 2\mathrm{rg}\left(u^j\right) + \mathrm{rg}\left(u^{j+1}\right).$$

Q 39. Soient σ et σ' telle que N_σ et $N_{\sigma'}$ soient les matrices de u dans deux base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E. La question Q37 montre que le nombre des blocs est uniquement déterminé par u et la question Q38 montre la taille de chacun des blocs est uniquement déterminée par u. Donc, $\sigma = \sigma'$.

Q 40. Toute matrice nilpotente est semblable à une matrice N_σ et si $\sigma \neq \sigma'$, N_σ n'est pas semblable à $N_{\sigma'}$. Donc, le nombre de classes de similitudes de matrices nilpotentes est exactement $\mathrm{card}\,(\Gamma_n)$.

II.C - Applications

Q 41. $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Donc $\mathrm{card}\,(\Gamma_5) = 7$.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

car le déterminant de cette dernière matrice est égal à $1 \neq 0$.
D'après la question Q37, le nombre de blocs de N_σ est $k = 5 - 3 = 2$. Ensuite,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis $\text{rg}\left(u^2\right) = \text{rg}\left(A^2\right) = 1$ puis $\text{rg}\left(u^0\right) - 2\text{rg}(u) + \text{rg}\left(u^2\right) = 5 - 2 \times 3 + 1 = 0$. Donc, il n'y a pas de blocs de taille 1 et il ne reste plus que la possibilité : $\sigma = (3, 2)$. Donc

$$N_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 42. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. $2M$ et M^T sont aussi nilpotentes car $(2M)^p = 2^p M^p = 0$ et $\left(M^T\right)^p = (M^p)^T = 0$.
Soient σ, σ' et σ'' les partitions de n respectivement associées à M, $2M$ et M^T. On sait que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\text{rg}\left((2M)^j\right) = \text{rg}\left(M^j\right)$ et $\text{rg}\left(\left(M^T\right)^j\right) = \text{rg}\left(M^j\right)$. D'après la question Q37 et Q38, $\sigma' = \sigma$ et $\sigma'' = \sigma$. Mais alors, les matrices M, $2M$ et M^T sont toutes trois semblables à N_σ et donc ces matrices sont deux à deux semblables.

Q 43. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que les matrices M et $2M$ soient semblables. M et $2M$ ont en particulier le même polynôme caractéristique ou encore M et $2M$ ont les mêmes valeurs propres.
Soit λ une valeur propre de M. On sait que 2λ est valeur propre de $2M$ et donc de M. Mais alors, λ, 2λ, $2^2\lambda$, $2^3\lambda$, ... sont valeurs propres de M. Si $\lambda \neq 0$, les nombres $2^k\lambda$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts. Ceci est impossible car une matrice carrée de format n admet au plus n valeurs propres. Donc, $\lambda = 0$.

Ainsi, toutes les valeurs propres de M sont nulles et donc M est nilpotente d'après la question Q15.

II.D - Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

Q 44. Il y a une et une seule partition de n telle que $1 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k \geqslant 1$, à savoir la partition σ telle que $k = n$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_{n,1} = 1.$$

Q 45. $y_{n-n,\min(n,n-n)} = y_{0,0} = 1$. Il y a une et une seule partition de n pour laquelle $\alpha_1 = n$ à savoir $\sigma = (n)$. Pour toute autre partition de n telle que $\alpha_1 \leqslant n$, on a en fait $\alpha_1 \leqslant n - 1$. Il y a $y_{n,n-1}$ telles partitions et donc

$$y_{n,n} = y_{n,n-1} + 1 = y_{n,n-1} + y_{n-n,\min(n,n-n)}.$$

Q 46. Soit $j \in [\![2, n-1]\!]$. $Y_{n,j}$ est la réunion disjointe de deux ensembles de partitions, les partitions de n pour lesquelles $\alpha_1 < j$ (type I) et les partitions de n pour lesquelles $\alpha_1 = j$ (type II).
L'ensemble des partitions du type I est $Y_{n,j-1}$. Il y en a $y_{n,j-1}$.
Soit $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ une partition du type II. Puisque $j < n$ et $\alpha_1 = j$, on a $k \geqslant 2$ puis

$$n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \Leftrightarrow \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n - j.$$

Donc, l'ensemble des partitions du type II est en bijection avec les partitions $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ de l'entier $n - j$ où $\alpha_2 \leqslant j$. Il y en a $y_{n-j,j}$. Finalement,

$$\forall j \in [\![2, n-1]\!],\ y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}.$$

Maintenant, si $j \leqslant n - j$, $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$. Si par contre $n - j < j$, une partition $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ de $n - j$ vérifiant nécessairement $\alpha_1 \leqslant n - j$, on a $y_{n-j,j} = y_{n-j,n-j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$. On a montré que

$$\forall j \in [\![2, n]\!],\ y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(n-j,j)}.$$

Q 47. Tableau des valeurs de $y_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n \leqslant 5$.

n \ j	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	1	2	3		
4	1	3	4	5	
5	1	3	5	6	7

Q 48. Fonction Python.


```python
def y2(n):
    def y(n,j)
        if j==0 or j==1 :
            return 1
        else
            return y(n,j-1)+y(n-j,min(j,n-j))
    return y(n,n)

for i in range(1,6) :
    print(y2(i))
```

Q 49. $y_{n,n}$ est le nombre de partition σ telles que $\alpha_1 \leqslant n$ ou encore $y_{n,n} = \text{card}\,(\Gamma_n)$. $y_{n,n}$ est donc aussi le nombre de classe de similitude de matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'après la question Q40.

Dans le cas où $n = 5$, il y a $y_{5,5} = 7$ partitions de l'entier 5 correspondant à 7 classes de similitudes de matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$. Toute matrice nilpotente de format 5 est donc semblable à une et une seule des sept matrices suivantes :

- $N_1 = 0_5$ correspondant à $\sigma_1 = (1,1,1,1,1)$.
- $N_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ correspondant à $\sigma_2 = (2,1,1,1)$.
- $N_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ correspondant à $\sigma_3 = (2,2,1)$.
- $N_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ correspondant à $\sigma_4 = (3,1,1)$.
- $N_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ correspondant à $\sigma_5 = (3,2)$.
- $N_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ correspondant à $\sigma_6 = (4,1)$.
- $N = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ correspondant à $\sigma_7 = (5)$.

