Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE PSI

I - Résultats préliminaires

I.A -

Q 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans tous les cas, $f_\alpha(x)$ existe si $1-x>0$ ou encore $x<1$. On pose $D =]-\infty, 1[$. f_α est définie au moins sur D.
Pour tout $x \in D$, $1-x>0$ et donc f_α est de classe C^1 sur D puis, pour $x \in D$, $f'_\alpha(x) = \alpha(1-x)^{-\alpha-1}$. Mais alors, pour $x \in D$,

$$(1-x)f'_\alpha(x) - \alpha f_\alpha(x) = 0.$$

La fonction f_α est solution sur D de l'équation différentielle $(1-x)y' - \alpha y = 0 \quad (E)$.

Q 2. Théorème de Cauchy. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = b$. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$.

Pour $x \in]-1, 1[$, posons $g_\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{L_n(\alpha)}{n!}$.
Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$, alors la suite $(L_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $R_a = +\infty$.
Si $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, puis

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{L_{n+1}(\alpha)}{L_n(\alpha)}\right| \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|n+\alpha|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1.$$

Dans ce cas, $R_a = 1$.

Dans tous les cas, $R_a \geqslant 1$. Puisque la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, la fonction g_α est définie et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ (au moins). De plus, ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Donc, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
(1-x)g'_\alpha(x) - \alpha g_\alpha(x) &= (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{(n-1)!} - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L_{n+1}(\alpha)\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha)\, L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(L_{n+1}(\alpha) - (n+\alpha)L_n(\alpha)\right)\frac{x^n}{n!} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, g_α est solution de (E) sur $]-1, 1[$ et vérifie $g_\alpha(0) = L_\alpha(0) = 1$. De même, f_α est solution de (E) sur $]-1, 1[$ et vérifie $f_\alpha(0) = 1$.

Sur $]-1, 1[$, (E) s'écrit : $y' - \dfrac{\alpha}{1-x}y = 0$. Puisque la fonction $a : x \mapsto -\dfrac{\alpha}{1-x}$ est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$, pour tout $(x_0, y_0) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$, il existe une fonction f et une seule, solution de (E) sur $]-1, 1[$ et vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ (théorème de Cauchy). En particulier, le problème de Cauchy en $(0, 1)$ admet une et une seule solution et donc, pour $x \in]-1, 1[$, $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ ou encore,

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{x^n}{n!}.$$

Q 3. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de rayons respectifs R_a et R_b.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Si $R_a > 0$ et $R_b > 0$, alors $R_c \geqslant \mathrm{Min}\{R_a, R_b\} > 0$ et de plus, pour tout $x \in]-\mathrm{Min}\{R_a, R_b\}, \mathrm{Min}\{R_a, R_b\}[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Q 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \dfrac{L_n(\alpha)}{n!}$ et $b_n = \dfrac{L_n(\beta)}{n!}$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k(\alpha)}{k!}\frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

Ensuite, pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = (1-x)^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\\ &= (1-x)^{-(\alpha+\beta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(\alpha+\beta)}{n!}x^n.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta) = c_n = \dfrac{L_n(\alpha+\beta)}{n!}$ et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta).$$

I.B -

Q 5. Pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \dfrac{x}{1-x}$. Ensuite, en dérivant terme sur $]-1,1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Q 6. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \dfrac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$.

- D'après la question précédente, pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^p = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. On pose $R_1 = X$. R_1 est un polynôme élément de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^p = \dfrac{R_1(x)}{(1-x)^2}$. Ceci montre l'existence de R_1. Maintenant, si P est un polynôme tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^p = \dfrac{P(x)}{(1-x)^2}$, alors pour tout $x \in]-1,1[$, $P(x) = R_1(x)$ puis $P = R_1$ car ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs. Ceci montre l'unicité de R_1.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu' il existe un polynôme $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et un seul tel que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \dfrac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$. En dérivant cette égalité sur $]-1,1[$ et en multipliant les deux membres de cette égalité par x, on obtient

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^{n+1}x^p = x\left(R_n'(x)\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + R_n(x)\frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}}\right)$$
$$= \frac{x(1-x)R_n'(x)+(n+1)xR_n(x)}{(1-x)^{n+2}}.$$

Soit $R_{n+1} = X(1-X)R_n' + (n+1)XR_n$. Puisque $\deg(R_n) \leqslant n$,

$$\deg(R_{n+1}) \leqslant \mathrm{Max}\{\deg(X(1-X)R_n'), \deg((n+1)XR_n)\} \leqslant n+1$$

et donc R_{n+1} est un polynôme élément de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} p^{n+1}x^p = \frac{R_{n+1}(x)}{(1-x)^{n+2}}$. Enfin, comme précédemment, R_{n+1} est uniquement défini car connu en une infinité de valeurs.

Le résultat est démontré par récurrence.

II - Un modèle particulier d'urne de Polya

Q 7. On note B_n l'événement : « la boule tirée au n-ème tirage est blanche ».

• $X_1(\Omega) = \{1,2\}$ puis $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g_1(t) = P(X_1 = 1)\,t + P(X_1 = 2)\,t^2 = \frac{1}{2}\left(t + t^2\right).$$

• $X_2(\Omega) = \{1,2,3\}$. L'événement $\{X_2 = 1\}$ est l'événement $\{X_1 = 1\} \cap \overline{B_2}$ puis

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}\left(\overline{B_2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

L'événement $\{X_2 = 2\}$ est l'événement $\left(\{X_1 = 2\} \cap \overline{B_2}\right) \cup (\{X_1 = 1\} \cap B_2)$ puis, ces deux événements étant disjoints,

$$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 2) \times P_{X_1=2}\left(\overline{B_2}\right) + P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Mais alors, $P(X_2 = 3) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g_2(t) = \frac{1}{3}\left(t + t^2 + t^3\right).$$

• $X_3(\Omega) = \{1,2,3,4\}$. L'événement $\{X_3 = 1\}$ est l'événement $\{X_2 = 1\} \cap \overline{B_3}$ puis

$$P(X_3 = 1) = P(X_2 = 1) \times P_{X_2=1}\left(\overline{A_3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

L'événement $\{X_3 = 2\}$ est l'événement $\left(\{X_2 = 2\} \cap \overline{B_3}\right) \cup (\{X_2 = 1\} \cap B_3)$ puis

$$P(X_3 = 2) = P(X_2 = 2) \times P_{X_2=2}\left(\overline{B_3}\right) + P(X_2 = 1) \times P_{X_2=1}(B_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

L'événement $\{X_3 = 3\}$ est l'événement $\left(\{X_2 = 3\} \cap \overline{B_3}\right) \cup (\{X_2 = 2\} \cap B_3)$ puis

$$P(X_3 = 3) = P(X_2 = 3) \times P_{X_2=3}\left(\overline{B_3}\right) + P(X_2 = 2) \times P_{X_2=2}(B_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Enfin, $P(X_3 = 4) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$g_3(t) = \frac{1}{4}\left(t + t^2 + t^3 + t^4\right).$$

En résumé, $\forall n \in [\![1,3]\!]$, $X_n(\Omega) = [\![1,n+1]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n+1]\!]$, $P(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{n+1}$ puis, $\forall n \in [\![1,3]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} t^k$.

Q 8. Soit $n \geqslant 2$. $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
L'événement $\{X_n = k\}$ est l'événement $\left(\{X_{n-1} = k\} \cap \overline{B_n}\right) \cup (\{X_{n-1} = k-1\} \cap B_n)$ avec $\left(\{X_{n-1} = k\} \cap \overline{B_n}\right) \cap (\{X_{n-1} = k-1\} \cap B_n) = \varnothing$. Donc, si $2 \leqslant k \leqslant n$ (et en particulier, $n \geqslant 2$)

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k) \times P_{X_{n-1}=k}\left(\overline{B_n}\right) + P(X_{n-1} = k-1) \times P_{X_{n-1}=k-1}(B_n).$$

Après le $(n-1)$-ème « tirage complet » (tirage et ajout d'une nouvelle boule), l'urne contient $n+1$ boules.
$P_{X_{n-1}=k}\left(\overline{B_n}\right)$ est la probabilité qu'au n-ème tirage, on tire une boule noire d'une urne contenant $n+1$ boules dont k sont blanches. Donc, $P_{X_{n-1}=k}\left(\overline{B_n}\right) = \dfrac{n+1-k}{n+1}$.
$P_{X_{n-1}=k-1}(B_n)$ est la probabilité qu'au n-ème tirage, on tire une boule blanche d'une urne contenant $n+1$ boules dont $k-1$ blanches. Donc, $P_{X_{n-1}=k-1}(B_n) = \dfrac{k-1}{n+1}$ puis

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k).$$

Si $k = 1$, $P(X_n = 1) = P(X_{n-1} = 1) \times P_{X_{n-1}=1}(B_n) = \dfrac{n}{n+1} P(X_{n-1} = 1)$ et la formule ci-dessus est encore vraie (étant entendu que $P(X_{n-1} = 0) = 0$).
Si $k = n+1$, $P(X_n = n+1) = P(X_{n-1} = n) \times P_{X_{n-1}=n}(B_n) = \dfrac{n}{n+1} P(X_{n-1} = n)$ et la formule ci-dessus est encore vraie.
Si $k \geqslant n+2$, $P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k) = P(X_{n-1} = k-1) = 0$. Donc,

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k).$$

Enfin, si $n = 1$, $P(X_1 = k) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } k \in \{1, 2\} \\ 0 \text{ si } k \geqslant 3 \end{cases}$. D'autre part, puisque par convention $X_0 = 1$, $P(X_0 = k) = \delta_{k,1}$ puis $\dfrac{k-1}{2} P(X_0 = k-1) + \dfrac{2-k}{2} P(X_0 = k) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } k \in \{1, 2\} \\ 0 \text{ si } k \geqslant 3 \end{cases}$. La formule est encore vraie pour $n = 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Finalement,

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k).$$

Q 9. Soit $n \geqslant 2$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = k)\, t^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left((k-1) P(X_{n-1} = k-1) + (n+1-k) P(X_{n-1} = k)\right) t^k \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} k P(X_{n-1} = k)\, t^{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} k P(X_{n-1} = k)\, t^k \right) + \sum_{k=1}^{n+1} P(X_{n-1} = k)\, t^k \\
&= \frac{1}{n+1} \left(t^2 \sum_{k=1}^{n} k P(X_{n-1} = k)\, t^{k-1} - t \sum_{k=1}^{n} k P(X_{n-1} = k)\, t^{k-1} \right) + \sum_{k=1}^{n} P(X_{n-1} = k)\, t^k \\
&\text{(car } P(X_{n-1} = n+1) = 0) \\
&= \frac{\left(t^2 - t\right) g'_{n-1}(t)}{n+1} + g_{n-1}(t).
\end{aligned}$$

Q 10. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} t^k$.

- Le résultat est vrai pour $n = 1$ d'après la question Q7.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout réel t, $g_{n-1}(t) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^k$. Alors, pour tout réel t,

$$
\begin{aligned}
g_n(t) &= \frac{\left(t^2-t\right) g_{n-1}'(t)}{n+1} + g_{n-1}(t) = \frac{t^2-t}{n+1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kt^{k-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k\left(t^{k+1}-t^k\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \left(kt^{k+1}-(k-1)t^k\right) - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} t^k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left(nt^{n+1}-0\right) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} t^k \text{ (somme télescopique)} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k.
\end{aligned}
$$

Le résultat est démontré par récurrence.

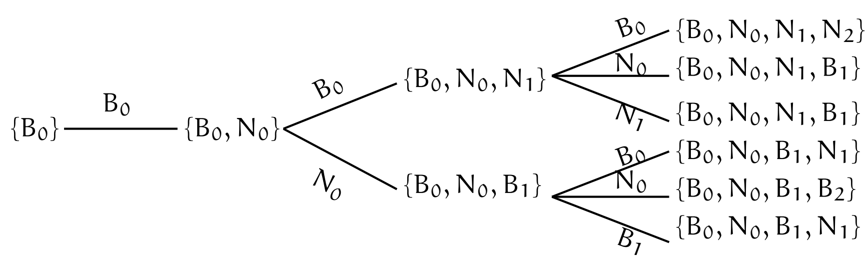
Q 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, on en déduit que

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P\left(X_n = k\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$. On sait alors que $E\left(X_n\right) = \dfrac{1+(n+1)}{2} = \dfrac{n}{2}+1$.

III - Modèle général d'urne équilibrée

Q 12. On représente la situation par le diagramme suivant



Donc $\Omega_3 = \{(B_0, B_0, B_0), (B_0, B_0, N_0), (B_0, B_0, N_1), (B_0, N_0, B_0), (B_0, N_0, B_1), (B_0, N_0, N_0)\}$ et $X_3\left(\Omega_3\right) = [\![1, 3]\!]$.

Les différents tirages sont équiprobables et donc $P\left(X_3 = 1\right) = P\left(X_3 = 3\right) = \dfrac{1}{6}$ et $P\left(X_3 = 2\right) = \dfrac{4}{6}$.

Q 13. $\mathrm{card}\left(\Omega_3\right) = 6$ puis $\mathrm{card}\{\omega \in \Omega/\ b(\omega) = 1\} = \mathrm{card}\{\omega \in \Omega/\ b(\omega) = 3\} = 1$ et enfin, $\mathrm{card}\{\omega \in \Omega/\ b(\omega) = 2\} = 4$. Donc,

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ P_3(u, v) = u^3v + 4u^2v^2 + uv^3.$$

Q 14. A l'étape 0, l'urne contient $a_0 + b_0$ boules. Il y a donc $a_0 + b_0$ choix possibles de la boule issue du premier tirage. Après le premier tirage, il y a a_0+b_0+a+b ou a_0+b_0+c+d boules et donc a_0+b_0+s boules dans l'urne et donc a_0+b_0+s choix possibles de la boule issue du deuxième tirage puis $\left(a_0 + b_0\right)\left(a_0 + b_0 + s\right)$ choix possibles des deux premières boules tirées puis après le deuxième tirage, l'urne contient $a_0 + b_0 + 2s$ ... Avant le n-ème tirage, il y a $a_0 + b_0 + s(n-1)$ boules dans l'urne puis $a_0+b_0+s(n-1)$ tirages possibles au n-ème tirage et donc $\left(a_0 + b_0\right)\left(a_0 + b_0 + s\right)\ldots\left(a_0 + b_0 + s(n-1)\right)$ suites de n tirages possibles. Donc,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{card}\left(\Omega_n\right) &= \left(a_0 + b_0\right)\left(a_0 + b_0 + s\right)\ldots\left(a_0 + b_0 + s(n-1)\right) \\
&= s^n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right)\left(\frac{a_0+b_0}{s}+1\right)\ldots\left(\frac{a_0+b_0}{s}+(n-1)\right) \\
&= s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right).
\end{aligned}
$$

Q 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Les différents tirages sont équiprobables et donc

$$\mathsf{P}(X_n = k) = \sum_{\omega \in \Omega_n,\ b(\omega)=k} \mathsf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega_n,\ b(\omega)=k} \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} = \frac{\operatorname{card}(\{\omega \in \Omega_n,\ b(\omega) = k\})}{\operatorname{card}(\Omega_n)}.$$

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel t, la suite $\left(\mathsf{P}(X_n = k)\, t^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et donc $g_n(t)$ existe. Ensuite, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} P_n(t,1) &= \sum_{\omega \in \Omega_n} \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} t^{b(\omega)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} \left(\sum_{\omega \in \Omega_n,\ b(\omega)=k} t^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(\{\omega \in \Omega_n,\ b(\omega) = k\})}{\operatorname{card}(\Omega_n)} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathsf{P}(X_n = k)\, t^k = g_n(t).\end{aligned}$$

puis

$$\mathsf{E}(X_n) = g_n'(1) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)} \frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1).$$

Q 17. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\Omega_{n,\mathscr{B}}$ (resp. $\Omega_{n,\mathscr{N}}$) l'ensemble des tirages de n boules dont la n-ème est blanche (resp. noire). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$P_{n+1}(u,v) = \sum_{\omega \in \Omega_{n+1,\mathscr{B}}} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)} + \sum_{\omega \in \Omega_{n+1,\mathscr{N}}} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)}.$$

Un élément $\omega \in \Omega_{n+1}$ s'écrit sous la forme $\omega = (\omega', B_i)$ où ω' est un élément quelconque de Ω_n et B_i est une boule blanche issu du n-ème tirage. Pour un tel ω, après le $(n+1)$-ème tirage, on ajoute a boules blanches et b boules noires et donc pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ (puisque $b(\omega') - 1 > 0$),

$$u^{b(\omega)} v^{n(\omega)} = u^{b(\omega')+a} v^{n(\omega')+b} = u^{a+1} v^b u^{b(\omega')-1} v^{n(\omega')}.$$

Puisque $b(\omega')$ boules blanches B_i, on obtient

$$\begin{aligned}P_{n+1}(u,v) &= \sum_{\omega \in \Omega_{n+1,\mathscr{B}}} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)} + \sum_{\omega \in \Omega_{n+1,\mathscr{N}}} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)} \\ &= \sum_{\omega' \in \Omega_n} b(\omega') u^{b(\omega')+a} v^{n(\omega')+b} + \sum_{\omega' \in \Omega_n} n(\omega') u^{b(\omega')+c} v^{n(\omega')+d} \\ &= u^{a+1} v^b \sum_{\omega \in \Omega_n} b(\omega) u^{b(\omega')-1} v^{n(\omega)} + u^c v^{d+1} \sum_{\omega \in \Omega_n} n(\omega) u^{b(\omega)} v^{n(\omega)-1} \\ &= u^{a+1} v^b \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1} \frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v).\end{aligned}$$

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $\omega \in \Omega_n$, l'urne contient $b(\omega) + n(\omega)$ est le nombre de boules contenues dans l'urne après n tirages, à savoir $a_0 + b_0 + ns$. Donc, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < u < 2$ et $0 < v < 2$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{P_n(u,v)}{n!} x^n\right| &= \frac{|x|^n}{n!} \sum_{\omega \in \Omega_n} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)} \\ &\leqslant \frac{|x|^n}{n!} \sum_{\omega \in \Omega_n} 2^{b(\omega)} 2^{n(\omega)} \text{ (par croissance des fonctions } t \mapsto t^{b(\omega)} \text{ et } t \mapsto t^{n(\omega)} \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\ &= \frac{2^{a_0+b_0+ns}|x|^n}{n!} \operatorname{card}(\Omega_n) = \frac{2^{a_0+b_0+ns}|x|^n}{n!} s^n L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) \text{ (d'après la question Q14)} \\ &= 2^{a_0+b_0} L_n\left(\frac{a_0+b_0}{s}\right) \frac{(s2^s|x|)^n}{n!}.\end{aligned}$$

D'après la question Q2, la série numérique de terme général $\left|\dfrac{P_n(u,v)}{n!} x^n\right|$ converge quand $|s2^s|x|| < 1$ ou encore $|x| < \dfrac{1}{s2^s}$.

Le nombre $\rho = \dfrac{1}{s2^s} < 1$ convient.

Q 19. Soit $(u_0, v_0) \in]0, 2[^2$. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Donc, la fonction $x \mapsto H(u_0, v_0, x)$ est dérivable sur $]-\rho, \rho[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme ou encore la fonction H admet en chaque (u_0, v_0, x_0) de D_ρ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x et sa dérivée partielle s'obtient par dérivation terme à terme. Finalement, la fonction H admet sur D_ρ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x, obtenue par dérivation terme à terme.

Q 20. Soit $(x_0, v_0) \in]-\rho, \rho[\times]0, 2[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in]0, 2[$, posons $h_n(u) = \dfrac{P_n(u, v_0)}{n!} x_0^n$ de sorte que, pour tout $u \in]0, 2[$, $H(x_0, u, v_0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(u)$.

On sait déjà que la série de fonctions de terme général h_n converge simplement sur $]0, 2[$ vers la fonction $u \mapsto H(x_0, u, v_0)$ d'après la question Q18. Ensuite, chaque fonction h_n est dérivable sur $]0, 2[$ et pour tout $u \in]0, 2[$,

$$h_n'(u) = \frac{\partial P_n}{\partial u}(u, v_0) \frac{x_0^n}{n!}.$$

Ensuite, soient $\alpha \in]0, 2[$. Pour $u \in [\alpha, 2[$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial P_n}{\partial u}(u, v_0)\right| &= \sum_{\omega \in \Omega_n} b(\omega) u^{b(\omega)-1} v_0^{n(\omega)} \\ &\leqslant (a_0 + b_0 + ns) u^{-1} \sum_{\omega \in \Omega_n} u^{b(\omega)} v_0^{n(\omega)} = (a_0 + b_0 + ns) u^{-1} P_n(u, v_0),\end{aligned}$$

et donc, d'après la question Q18,

$$|h_n'(u)| \leqslant (a_0 + b_0 + ns)\, \alpha^{-1} P_n(u, v_0) \frac{|x_0|^n}{n!} \leqslant (a_0 + b_0 + ns)\, \alpha^{-1} 2^{a_0 + b_0} L_n\left(\frac{a_0 + b_0}{s}\right) \frac{(s 2^s |x_0|)^n}{n!},$$

puis $\|h_n'\|_{\infty, [\alpha, 2[} \leqslant (a_0 + b_0 + ns)\, \alpha^{-1} 2^{a_0 + b_0} L_n\left(\dfrac{a_0 + b_0}{s}\right) \dfrac{(s 2^s |x_0|)^n}{n!}$.

On sait que la série entière associée à la suite $\left((a_0 + b_0 + ns)\, \alpha^{-1} 2^{a_0 + b_0} L_n\left(\dfrac{a_0 + b_0}{s}\right) \dfrac{(s 2^s)^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a le même rayon que la série entière associée à la suite $\left(L_n\left(\dfrac{a_0 + b_0}{s}\right) \dfrac{(s 2^s)^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Donc, comme à la question Q18, la série numérique de terme général $(a_0 + b_0 + ns)\, \alpha^{-1} 2^{a_0 + b_0} L_n\left(\dfrac{a_0 + b_0}{s}\right) \dfrac{(s 2^s |x_0|)^n}{n!}$ converge. Ceci montre que la série de fonctions de terme général h_n' converge normalement et donc uniformément sur $[\alpha, 2[$

En résumé, pour tout $\alpha \in]0, 2[$,

- la série de fonctions de terme général h_n converge simplement sur $[\alpha, 2[$ vers la fonction $u \mapsto H(x_0, u, v_0)$,
- chaque fonction h_n est dérivable sur $[\alpha, 2[$,
- la série de terme général h_n' converge uniformément sur $[\alpha, 2[$.

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in]0, 2[$, d'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $u \mapsto H(x_0, u, v_0)$ est dérivable sur $]0, 2[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Mais alors, la fonction H admet une dérivée partielle par rapport à u sur D_ρ et cette dérivée partielle s'obtient par dérivation terme à terme.

Q 21. Pour $(u, v) \in]0, 2[^2$, $H(0, u, v) = P_0(u, v) = u^{a_0} v^{b_0}$. Ensuite, pour $(x, u, v) \in D_\rho$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,v) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(u,v)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u^{a+1}v^b\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\right)\frac{x^n}{n!} \text{ (d'après la question Q17)}\\
&= u^{a+1}v^b\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!} + u^c v^{d+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

(les deux séries convergent d'après la question Q20)

$$= u^{a+1}v^b\frac{\partial H}{\partial u}(x,u,v) + u^c v^{d+1}\frac{\partial H}{\partial v}(x,u,v) \text{ (toujours d'après la question Q20).}$$

IV - Modèle général d'une urne de Polya

Q 22. Soit $\rho > 0$. $D_\rho \subset U \Leftarrow a\rho 2^a < 1 \Leftarrow \rho < \dfrac{1}{a2^a}$. Donc, $\rho = \dfrac{1}{a2^{a+1}} > 0$ convient. ρ est ainsi dorénavant fixé. Soit $(x,u,v) \in D_\rho$. D'après la question Q2, en posant $\alpha = \dfrac{a_0}{a}$ et $\beta = \dfrac{b_0}{a}$, en effectuant le produit de Cauchy des deux séries entières ci-dessous, toutes de de rayon au moins égal à ρ,

$$\begin{aligned}
G(x,u,v) &= u^{a_0}v^{b_0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha)\frac{(axu^a)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\beta)\frac{(axv^a)^n}{n!}\right)\\
&= u^{a_0}v^{b_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k(\alpha)}{k!}(au^a)^k\frac{L_{n-k}(\beta)}{(n-k)!}(av^a)^{n-k}\right)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k(\alpha)L_{n-k}(\beta)u^{a_0+ka}v^{b_0+(n-k)a}\right)\frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(u,v) \in]0,2[^2$, on pose $Q_n(u,v) = a^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)u^{a_0+ka}v^{b_0+(n-k)a}$.

Alors, pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$,

$$G(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(u,v)\frac{x^n}{n!}.$$

Q 23. (Erreur d'énoncé dans cette question et la suivante : remplacer H par G). Comme à la question Q18, le couple (u,v) étant fixé égal à $(u_0,v_0) \in]0,2[^2$, la fonction $x \mapsto G(x,u_0,v_0)$ est dérivable sur $]-\rho,\rho[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Donc, la fonction G admet sur D_ρ une dérivée partielle par rapport à x, obtenue par dérivation terme à terme :

$$\forall (x,u,v) \in D_\rho,\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} Q_n(u,v)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_{n+1}(u,v)\frac{x^n}{n!}.$$

Q 24. Soit $(x_0,u_0,v_0) \in D_\rho$. Comme à la question Q19, on applique le théorème de dérivation terme à terme. Pour cela, on étudie la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général g_n' où $g_n\ :\ u \mapsto Q_n(u,v_0)\dfrac{x_0^n}{n!}$.

Soit $\alpha \in]0,2[$. D'après la question Q22, pour $u \in [\alpha,2[$,

$$g_n'(u) = a^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)(a_0+ka)\,u^{a_0+ka-1}v_0^{b_0+(n-k)a}\right)\frac{x_0^n}{n!},$$

puis, comme à la question Q19 et d'après la question Q4,

$$\begin{aligned}
|g_n'(u)| &\leqslant a^n(a_0+na)\,\alpha^{-1}2^{a_0+b_0+na}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)\right)\frac{|x_0|^n}{n!}\\
&= \alpha^{-1}2^{a_0+b_0}(a_0+na)\,L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}\right)\frac{(a2^a|x_0|)^n}{n!},
\end{aligned}$$

puis comme à la question Q19, la série numérique de terme général $\alpha^{-1}2^{a_0+b_0}L_n\left(\dfrac{a_0+b_0}{a}\right)\dfrac{(a2^a|x_0|)^n}{n!}$ converge et donc la série de fonctions de terme général g_n' converge normalement et donc uniformément sur $[\alpha, 2[$.

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in]0,2[$, comme à la question Q19, la fonction G admet sur D_ρ une dérivée partielle par rapport à u, obtenue par dérivation terme à terme :

$$\forall (x,u,v) \in D_\rho,\ \frac{\partial G}{\partial u}(x,u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v)\frac{x^n}{n!}.$$

De même, $\forall (x,u,v) \in D_\rho,\ \dfrac{\partial G}{\partial v}(x,u,v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v)\frac{x^n}{n!}$.

Q 25. Puisque G est solution sur D_ρ de (IV.1), pour tout $(x,u,v) \in D_\rho$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} Q_{n+1}(u)\frac{x^n}{n!} &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,u,v) = u^{a+1}\frac{\partial G}{\partial u}(x,u,v) + v^{a+1}\frac{\partial G}{\partial v}(x,u,v)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v)\right)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Ainsi, (u,v) étant fixé dans $]0,2[$, pour tout $x \in]-\rho,\rho[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} Q_{n+1}(u)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v)\right)\frac{x^n}{n!}$.
Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (u,v) \in]0,2[^2,\ Q_{n+1}(u) = u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v).$$

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (u,v) \in]0,2[^2,\ P_n(u,v) = Q_n(u,v)$.

- Pour $(u,v) \in]0,2[^2$, $Q_0(u,v) = a^0\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}L_0\left(\frac{a_0}{a}\right)L_0\left(\frac{b_0}{a}\right)u^{a_0}v^{b_0} = u^{a_0}v^{b_0} = P_0(u,v)$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$, $P_n(u,v) = Q_n(u,v)$. Alors, pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$,

$$P_{n+1}(u,v) = u^{a+1}\frac{\partial P_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial P_n}{\partial v}(u,v) = u^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial u}(u,v) + v^{a+1}\frac{\partial Q_n}{\partial v}(u,v) = Q_{n+1}(u,v).$$

Le résultat est démontré par récurrence. (L'égalité $P_n = Q_n$ doit probablement être comprise comme : pour tout $(u,v) \in]0,2[^2$, $P_n(u,v) = Q_n(u,v)$ car en math spé, on ne possède aucune connaissance sur les polynômes à plusieurs variables).

Mais alors les fonctions G et H coïncident sur D_ρ où ρ désigne « le plus petit des nombres ρ des questions Q18 et Q22 ».

Q 26. Les deux polynômes $t \mapsto P_n(t,1)$ et $t \mapsto Q_n(t,1)$ coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. Par suite, d'après les questions Q14 et Q16 et en tenant compte de $s = a$, on a pour tout réel t,

$$g_n(t) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega_n)}Q_n(t,1) = \frac{1}{L_n\left(\dfrac{a_0+b_0}{a}\right)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k\left(\frac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\frac{b_0}{a}\right)t^{a_0+ka}.$$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, le coefficient de t^{a_0+ka} est $\dbinom{n}{k}\dfrac{L_k\left(\dfrac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\dfrac{b_0}{a}\right)}{L_n\left(\dfrac{a_0+b_0}{a}\right)}$. Mais, pour $k \in [\![0,n]\!]$ le coefficient de t^{a_0+ka} est aussi $P(X_n = a_0+ka)$. Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n = a_0+ka) = \binom{n}{k}\frac{L_k\left(\dfrac{a_0}{a}\right)L_{n-k}\left(\dfrac{b_0}{a}\right)}{L_n\left(\dfrac{a_0+b_0}{a}\right)}.$$

(On note que toute autre probabilité est nulle.)

Q 27. Dans la question 10, $a_0 = b_0 = 1$ et $a = d = 1$ et $b = c = 0$. Donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P(X_n = k+1) = \binom{n}{k}\frac{L_k(1)\,L_{n-k}(1)}{L_n(1)} = \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},$$

ou encore, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$. On a aussi

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(t + t^2 + \ldots + t^{n+1}\right).$$

On retrouve ainsi les résultats de la question 10.

Q 28. On revient au cas plus général $a = d$ et $b = c = 0$. On a toujours $s = a$. D'après la question Q16,

$$E(X_n) = g_n'(1) = \frac{1}{\text{card}(\Omega_n)}\frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1).$$

Or, d'après les questions Q19 et Q25, pour $x \in]-\rho, \rho[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1)\frac{x^n}{n!} = \frac{\partial H}{\partial u}(x,1,1) = \frac{\partial G}{\partial u}(x,1,1).$$

Pour $(x,u) \in]-\rho, \rho[\times]0,2[$, $G(x,u,1) = u^{a_0}\left(1 - axu^a\right)^{-\frac{a_0}{a}}(1-ax)^{-\frac{b_0}{a}}$ puis

$$\frac{\partial G}{\partial u}(x,u,1) = a_0u^{a_0-1}\left(1-axu^a\right)^{-\frac{a_0}{a}}(1-ax)^{-\frac{b_0}{a}} + u^{a_0}\left(-\frac{a_0}{a}\right)\left(-axau^{a-1}\right)\left(1-axu^a\right)^{-\frac{a_0}{a}-1}(1-ax)^{-\frac{b_0}{a}}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u}(x,1,1) &= a_0(1-ax)^{-\frac{a_0}{a}}(1-ax)^{-\frac{b_0}{a}} + a_0xa(1-ax)^{-\frac{a_0}{a}-1}(1-ax)^{-\frac{b_0}{a}}\\ &= a_0(1-ax+ax)(1-ax)^{-\frac{a_0+b_0}{a}-1} = a_0f_{\frac{a_0+b_0}{a}+1}(ax)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}a_0L_n\left(\frac{a_0+b_0}{a}+1\right)\frac{(ax)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière,

$$\begin{aligned}E(X_n) &= \frac{1}{\text{card}(\Omega_n)}\frac{\partial P_n}{\partial u}(1,1) = \frac{a_0L_n\left(\dfrac{a_0+b_0}{a}+1\right)a^n}{a^nL_n\left(\dfrac{a_0+b_0}{a}\right)}\\ &= a_0\frac{\dfrac{a_0+b_0}{a}+n}{\dfrac{a_0+b_0}{a}} = a_0\frac{a_0+b_0+na}{a_0+b_0} = a_0\left(1+\frac{na}{a_0+b_0}\right).\end{aligned}$$

V - Urne de Friedman et montées de permutations

V.A -

Q 29. D'après la question Q6, il existe un polynôme $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{+\infty}p^n(v-u)^{n+1}\left(\frac{u}{v}\right)^p &= (v-u)^{n+1}\frac{R_n\left(\dfrac{u}{v}\right)}{\left(1-\dfrac{u}{v}\right)^{n+1}} = v^{n+1}R_n\left(\frac{u}{v}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}a_ku^kv^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Puisque pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $n+1-k \geqslant 0$, l'expression proposée est polynomiale en u et v.

Q 30. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} = (1-t)^{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p$$

$$\underset{t\to 0}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p = t^{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^{p-(n+1)} = t^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} p^{p+n+1} t^n.$$

Ensuite, la série entière $\sum_{p\geqslant 0} p^{p+n+1} t^n$ converge sur $]-1,1[$ au moins. Sa somme est en particulier continue en 0 et en particulier bornée sur un voisinage de 0. Donc,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} \underset{t\to 0}{=} t^{n+1} O(1) \underset{t\to 0}{=} O\left(t^{n+1}\right).$$

Q 31. On en déduit que $\sum_{p=n+1}^{+\infty} p^n t^p (1-t)^{n+1} \underset{t\to 0}{=} o\left(t^n\right)$ puis que

$$\begin{aligned}
g_n(t) &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} p^n t^p (1-t)^{n+1} + o\left(t^n\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} p^n t^p \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k t^k\right) + o\left(t^n\right) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} p^n t^{k+p}\right) + o\left(t^n\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\sum_{p=1}^{n} p^n t^{k+p}\right) + o\left(t^n\right) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\sum_{m=k+1}^{n+k} (m-k)^n t^m\right) + o\left(t^n\right) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\sum_{m=k+1}^{n} (m-k)^n t^m\right) + o\left(t^n\right) \text{ (car si } m > n,\ t^m \underset{t\to 0}{=} o\left(t^n\right)) \\
&\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m-k)^n\right) t^m + o\left(t^n\right)
\end{aligned}$$

Q 32. Pour $t \in]-1,1[$, on a aussi $g_n(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} P\left(X_n = m\right) t^m = \sum_{m=1}^{n+1} P\left(X_n = m\right) t^m$ et donc

$$g_n(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{m=1}^{n} P\left(X_n = m\right) t^m + o\left(t^n\right).$$

Par unicité des coefficients de la partie régulière d'un développement limité, on en déduit que

$$\forall m \in [\![1,n]\!],\ P\left(X_n = m\right) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m-k)^n.$$

V.B - Montées d'une permutation

Q 33. Puisque $a > u_i$ et $a > u_{i+1}$, on ajoute une montée et une descente et on enlève la montée ou la descente de u_i à u_{i+1}. Donc,

- si $u_i < u_{i+1}$, le nouveau $(k+2)$-uplet $(u_0, \ldots, u_i, a, u_{i+1}, \ldots, u_k)$ contient autant de montées et une descente de plus que le $(k+1)$-uplet $(u_0, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_k)$.
- si $u_i > u_{i+1}$, le nouveau $(k+2)$-uplet $(u_0, \ldots, u_i, a, u_{i+1}, \ldots, u_k)$ contient autant de descentes et une montée de plus que le $(k+1)$-uplet $(u_0, \ldots, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_k)$.

Dit autrement, si (u_i, u_{i+1}) est une montée, alors l'insertion de a ajoute une descente et si (u_i, u_{i+1}) est une descente, alors l'insertion de a ajoute une montée.

Q 34. card $(S_3) = 3! = 6$. $S_3 = \{\mathrm{Id}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, c_1, c_2\}$ où $c_1 = (2,3,1)$ et $c_2 = (3,1,2)$.

- Si $\sigma = \mathrm{Id} = (1,2,3)$, $m = 2$.
- Si $\sigma = \tau_{1,2} = (2,1,3)$, $m = 1$.
- Si $\sigma = \tau_{1,3} = (3,2,1)$, $m = 0$.

- Si $\sigma = \tau_{2,3} = (1, 3, 2)$, $m = 1$.
- Si $\sigma = c_1 = (2, 3, 1)$, $m = 1$.
- Si $\sigma = c_2 = (3, 1, 2)$, $m = 1$.

Donc, $A_{3,0} = 1$, $A_{3,1} = 4$, $A_{3,2} = 1$ et pour $m \geqslant 3$, $\text{card}(A_{3,m}) = 0$. Les nombres obtenus sont 1, 4, 1, 0, 0, ... qui sont aussi les coefficients du polynôme $P_3(X, 1) = X^3 + 4X^2 + X$ obtenus à la question Q13 ou encore $P_3(X, 1) = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} A_{3,m-1}X^m$.

Q 35. Soit $\sigma \in S_n$. Si σ ne possède pas de montée, alors $\sigma(1) > \sigma(2) > \ldots > \sigma(n)$. $\sigma(n)$ ne peut être que 1 puis $\sigma(n-1)$ ne peut être que 2 puis ... puis $\sigma(1)$ ne peut être que n. Donc, $\sigma = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$. Réciproquement, la permutation $\sigma = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$ ne possède pas de montée. $A_{n,0} = 1$.

Soit $\sigma \in S_n$. Si σ possède $n-1$ montées, alors σ ne possède pas de descente puis $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n)$. Comme précédemment, σ est nécessairement la permutation $(1, 2, \ldots, n-1, n) = \text{Id}$. Réciproquement, la permutation $\sigma =$ possède $n-1$ montées. $A_{n,n-1} = 1$.

Le nombre de montées d'une permutation $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ est au plus $n-1$. Donc, si $m \geqslant n$, $A_{n,m} = 0$.

Q 36. • Tirage 1 : B_0. On démarre avec la suite $(0, 1, 0)$.
• Tirage 2 : B_0. On insère le 2 au milieu de la 1ère montée. On obtient la suite $(0, 2, 1, 0)$.
• Tirage 3 : N_1. On insère le 3 au milieu de la 2ème descente. On obtient la suite $(0, 2, 1, 3, 0)$.
• Tirage 4 : N_0. On insère le 4 au milieu de la 1ère descente. On obtient la suite $(0, 2, 4, 3, 1, 0)$.
• Tirage 5 : B_2. On insère le 5 au milieu de la 3ème descente. On obtient la suite $(0, 2, 4, 3, 1, 5, 0)$.

On efface les deux 0 et on obtient

$$\sigma((B_0, B_0, N_1, N_0, B_2)) = (2, 4, 3, 1, 5).$$

Q 37. On veut $\sigma(\omega) = (7, 1, 3, 6, 5, 4, 2) = p$.
• Le premier tirage est B_0 et la première suite est $(0, 1, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0\}$
• 2 est placé après 1 dans p. On le place donc au milieu de la 1ère descente de $(0, 1, 0)$. Il a fallu tirer N_0. Les deux premiers tirages sont (B_0, N_0). La deuxième suite est $(0, 1, 2, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0, B_1\}$.
• 3 est entre 1 et 2 dans p. On l'insère au milieu de la deuxième montée de $(0, 1, 2, 0)$. On tire B_1. Les trois premiers tirages sont (B_0, N_0, B_1). La 3ème suite est $(0, 1, 3, 2, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0, B_1, N_1\}$.
• 4 est entre 3 et 2 dans p. On l'insère au milieu de la 1ère descente dans $(0, 1, 3, 2, 0)$. On tire N_0. Les quatre premiers tirages sont (B_0, N_0, B_1, N_0). La 4ème suite est $(0, 1, 3, 4, 2, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0, B_1, N_1, B_2\}$.
• 5 est entre 3 et 4 dans p. On l'insère au milieu de la 3ème montée dans $(0, 1, 3, 4, 2, 0)$. On tire B_2. Les cinq premiers tirages sont $(B_0, N_0, B_1, N_0, B_2)$. La 5ème suite est $(0, 1, 3, 5, 4, 2, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0, B_1, N_1, B_2, N_2\}$.
• 6 est entre 3 et 5 dans p. On l'insère au milieu de la 3ème montée dans $(0, 1, 3, 5, 4, 2, 0)$. On tire B_2. Les six premiers tirages sont $(B_0, N_0, B_1, N_0, B_2, B_2)$. La 6ème suite est $(0, 1, 3, 6, 5, 4, 2, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0, B_1, N_1, B_2, N_2, N_3\}$.
• 7 est avant 1 dans p. On l'insère au milieu de la 1ère montée dans $(0, 1, 3, 6, 5, 4, 2, 0)$. On tire B_0. Les sept premiers tirages sont $(B_0, N_0, B_1, N_0, B_2, B_2, B_0)$. La 7ème suite est $(0, 7, 1, 3, 6, 5, 4, 2, 0)$. L'urne contient $\{B_0, N_0, B_1, N_1, B_2, N_2, N_3, N_4\}$.

$$\sigma((B_0, N_0, B_1, N_0, B_2, B_2, B_0)) = (7, 1, 3, 6, 5, 4, 2).$$

Q 38. Soit $\omega \in \Omega_n$. A chacune des n étapes, d'après la question Q33,
- si on tire une boule blanche, le numéro inséré a est strictement supérieur aux numéros précédents et a s'insère dans une montée : on ajoute une descente.
- si on tire une boule noire, le numéro inséré a est strictement supérieur aux numéros précédents et a s'insère dans une descente : on ajoute une montée.

Après le premier tirage (B_0), on démarre avec la suite $(0, 1, 0)$ qui contient 1 montée et 1 descente puis l'urne contient 2 boules, une blanche, une noire : $U = \{B_0, N_0\}$. Donc, une montée pour une boule blanche.
Ensuite, à chaque étape, on ajoute 1 montée par noire tirée et dans ce cas, on ajoute une boule blanche supplémentaire dans l'urne. Donc, à la fin de la k-ème étape, le nombre de boules blanches est le nombre de montées de la suite en construction.
A la fin, le nombre $b(\omega)$ de boules blanches dans l'urne est le nombre de montées de la suite commençant et finissant par un 0. On retire alors les deux 0 ce qui enlève une montée et une descente. Donc,

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega_n, \text{ le nombre de montées de } \sigma(\omega) \text{ est } b(\omega) - 1.$$

Q 39. Soit $m \in [\![0, n-1]\!]$. D'après le résultat admis par l'énoncé, l'ensemble des permutations ayant m montées a le même cardinal que l'événement $(X_n = m + 1)$. Donc,

$$A_{n,m} = \text{card}(X_n = m + 1) = \text{card}(\Omega_n) P(X_n = m + 1) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m + 1 - k)^n.$$

