SESSION 2019

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

I - Fonction caractéristique

Q 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$E\left(e^{it\frac{\varepsilon_k}{2^k}}\right) = e^{-i\frac{1}{2^k}t} \times P(\varepsilon_k = -1) + e^{i\frac{1}{2^k}t} \times P(\varepsilon_k = 1) = \frac{e^{i\frac{1}{2^k}t} + e^{-i\frac{1}{2^k}t}}{2} = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Ensuite, les variables ε_k, $k \in [\![1, n]\!]$, étant indépendantes, il en est de même des variables $e^{it\frac{\varepsilon_k}{2^k}}$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X_n}(t) = E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{it\frac{\varepsilon_k}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Q 2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$.

- $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right)\Phi_{X_1}(t) = \frac{\sin(t)}{2}$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$. Alors,
$$\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\Phi_{X_{n+1}}(t) = \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin(t)}{2^n} = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Q 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{X_n}(0) = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi_{X_n}(0) = 1 = \text{sinc}(0)$. Si $t \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\sin(t) = 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\sim} t\Phi_{X_n}(t)$$

et donc $\Phi_{X_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\sim} \text{sinc}(t)$. Si $t \in \pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ tel que $t = p\pi$. On pose $p = 2^\alpha q$ où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $q \in 2\mathbb{Z} + 1$. Alors, $\cos\left(\frac{t}{2^{\alpha+1}}\right) = \cos\left(q\frac{\pi}{2}\right) = 0$ puis pour $n \geqslant \alpha + 1$, $\Phi_{X_n}(t) = 0$. Mais alors, $\Phi_{X_n}(t)$ tend vers $0 = \text{sinc}(t)$ quand n tend vers $+\infty$.

En résumé, pour tout réel t, $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi_{X_n}(t) = \text{sinc}(t)$. La suite de fonctions $\left(\Phi_{X_n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction sinc sur $\mathbb{R}$.

Q 4. sinc est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, $\lim\limits_{t \to 0,\ t \neq 0} \text{sinc}(t) = 1 = \text{sinc}(0)$. Donc, sinc est continue en 0 et finalement sinc est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $-\varepsilon_k(\Omega) = \{-1, 1\} = \varepsilon_k(\Omega)$ et $P(-\varepsilon_k = -1) = P(-\varepsilon_k = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ε_k et ε_k' ont la même loi. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(\omega)}{2^k} \in X_n(\Omega)$, alors $-x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{-\varepsilon_k(\omega)}{2^k} \in X_n(\Omega)$ et réciproquement. Donc, $(-X_n)(\Omega) \subset X_n(\Omega)$ et $X_n(\Omega) \subset (-X_n)(\Omega)$ puis $(-X_n)(\Omega) = X_n(\Omega)$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X_n et $-X_n$ ont la même loi.

- $X_1 = \varepsilon_1$ et $-X_1 = -\varepsilon_1$ ont la même loi.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que X_n et $-X_n$ ont la même loi. Soit $x \in X_{n+1}(\Omega)$. D'après le lemme des coalitions, les variables X_n et $\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}$ sont indépendantes et donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=x) &= \mathrm{P}\left(X_n+\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}=x\right)=\mathrm{P}\left(\{\varepsilon_{n+1}=-1\}\cap\left\{X_n=x+\frac{1}{2^{n+1}}\right\}\right)+\mathrm{P}\left(\{\varepsilon_{n+1}=1\}\cap\left\{X_n=x-\frac{1}{2^{n+1}}\right\}\right)\\
&=\mathrm{P}(\varepsilon_{n+1}=-1)\times\mathrm{P}\left(X_n=x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\mathrm{P}(\varepsilon_{n+1}=1)\times\mathrm{P}\left(X_n=x-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(-X_n=x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(-X_n=x-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&=\mathrm{P}(\varepsilon_{n+1}=1)\times\mathrm{P}\left(-X_n=x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\mathrm{P}(\varepsilon_{n+1}=-1)\times\mathrm{P}\left(-X_n=x-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(\{\varepsilon_{n+1}=1\}\cap\left\{-X_n=x+\frac{1}{2^{n+1}}\right\}\right)+\mathrm{P}\left(\{\varepsilon_{n+1}=-1\}\cap\left\{X_n=x-\frac{1}{2^{n+1}}\right\}\right)=\mathrm{P}\left(-X_n-\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}=x\right)\\
&=\mathrm{P}(-X_{n+1}=x).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-X_n$ a la même loi que X_n.

Q 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. e^{itX_n} et e^{-itX_n} ont la même loi et donc la même espérance.
Par linéarité de l'espérance, pour tout réel t,

$$\varphi_n(t)=\mathrm{E}(\cos(tX_n))=\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\left(e^{itX_n}\right)+\mathrm{E}\left(e^{-itX_n}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\Phi_{X_n}(t)+\Phi_{-X_n}(t)\right)=\Phi_{X_n}(t).$$

On en déduit que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement vers la fonction sinc sur $\mathbb{R}$.

Q 7. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_n\left(2^{n+1}\pi\right)=\Phi_{X_n}\left(2^{n+1}\pi\right)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(2^{n+1-k}\pi\right)=\prod_{k=1}^{n}1=1$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi_n\left(2^{n+1}\pi\right)=1$.

D'autre part, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{sinc}\left(2^{n+1}\pi\right)=\dfrac{\sin\left(2^{n+1}\pi\right)}{2^{n+1}\pi}=0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\operatorname{sinc}\left(2^{n+1}\pi\right)=0$.
Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\varphi_n-\operatorname{sinc})\left(2^{n+1}\pi\right)=1$ puis, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour $n\geqslant n_0$,

$$\|\varphi_n-\operatorname{sinc}\|_\infty\geqslant(\varphi_n-\operatorname{sinc})\left(2^{n+1}\pi\right)\geqslant\frac{1}{2}(>0).$$

Ceci montre que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction sinc sur $\mathbb{R}$.

II - Ecriture binaire

Q 8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $n-j\in\mathbb{N}$ et donc pour tout $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\in\{0,1\}^n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j2^{n-j}$ est un entier naturel.

De plus, pour $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\in\{0,1\}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n}x_j2^{n-j}\leqslant\sum_{j=1}^{n}2^{n-j}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1.$$

Donc, Φ_n est bien une application de $\{0,1\}^n$ vers $[\![0,2^n-1]\!]$.

Q 9. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im}(\Phi_n)=A_n$.

Q 10. Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,2^n-1]\!]$, $k\in\Phi_n(\{0,1\}^n)$.

- Si $n=1$, $[\![0,2^n-1]\!]=\{0,1\}$ puis $0=0\times2^{1-1}\in\operatorname{Im}(\Phi_1)$ et $1=1\times2^{1-1}\in\operatorname{Im}(\Phi_1)$. Donc, $\operatorname{Im}(\Phi_1)=[\![0,2^1-1]\!]$.
- Soit $n\geqslant1$. Supposons le résultat pour n. Soit $k\in[\![0,2^{n+1}-1]\!]$.
Si $k\in[\![0,2^n-1]\!]$, par hypothèse de récurrence, il existe $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\in\{0,1\}^n$ tel que $k=x_12^{n-1}+x_22^{n-2}+\ldots+x_n2^0$. On pose alors $x'_1=0$ et pour $k\in[\![2,n+1]\!]$, $x'_k=x_{k-1}$. Le $(n+1)$-uplet $\left(x'_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n+1}$ est un élément de $\{0,1\}^{n+1}$ tel que $k=\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}x'_j2^{n+1-j}=\Phi_{n+1}\left(\left(x'_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)$.
Si $k\in[\![2^n,2^{n+1}-1]\!]$, alors $k-2^n\in[\![0,2^n-1]\!]$ (car $2^{n+1}-2^n=(2-1)2^n=2^n$). Par hypothèse de récurrence, il existe $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\in\{0,1\}^n$ tel que $k-2^n=x_12^{n-1}+x_22^{n-2}+\ldots+x_n2^0$. On pose $x'_1=1$ et pour $k\in[\![2,n+1]\!]$, $x'_k=x_{k-1}$. Le $(n+1)$-uplet $\left(x'_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n+1}$ est un élément de $\{0,1\}^{n+1}$ tel que $k-x'_12^{n+1}=x'_22^{n-1}+\ldots+x'_{n+1}2^0$ ou encore tel que $k=\Phi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q 11. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n est une surjection de $\{0,1\}^n$ sur $[\![0, 2^n - 1]\!]$.
Puisque $\text{card}\left(\{0,1\}^n\right) = \text{card}\left([\![0, 2^n - 1]\!]\right) = 2^n < +\infty$, on en déduit que Φ_n est une bijection de $\{0,1\}^n$ sur $[\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} + \frac{0}{2^{n+1}} \in D_{n+1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \subset D_{n+1}$.

Soit $(x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$.

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \subset [0,1[$ puis $D \subset [0,1[$.

Q 13. Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. $\lfloor 2^n x \rfloor \leqslant 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1$ puis, après division par 2^n,

$$\pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \leqslant x < \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

Q 14. Soient $x \in [0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Donc, $\pi_0(x) = \lfloor x \rfloor = 0$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} &= \sum_{j=1}^{k} \left(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)\right) = \pi_k(x) - \pi_0(x) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \pi_k(x).\end{aligned}$$

Q 15. Soit $(x,j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. $d_j(x) = 2^{j+1}\pi_{j+1}(x) - 2 \times 2^j \pi_j(x) = \lfloor 2^{j+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^j x \rfloor$. Ceci montre déjà que $d_j(x)$ est un entier relatif. Ensuite, $\lfloor 2^j x \rfloor \leqslant 2^j x < \lfloor 2^j x \rfloor + 1$ et donc

$$2\lfloor 2^j x \rfloor \leqslant 2^{j+1}x < 2\lfloor 2^j x \rfloor + 2.$$

$2\lfloor 2^j x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $2^{j+1}x$ et donc, puisque $\lfloor 2^{j+1}x \rfloor$ est le plus grand de ces entiers, $2\lfloor 2^j x \rfloor \leqslant \lfloor 2^{j+1}x \rfloor$ puis $d_j(x) = \lfloor 2^{j+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^j x \rfloor \geqslant 0$. Ensuite, $2\lfloor 2^j x \rfloor + 2$ est un entier strictement supérieur à $2^{j+1}x$ et donc supérieur ou égal à $\lfloor 2^{j+1}x \rfloor + 1$. Par suite, $\lfloor 2^{j+1}x \rfloor + 1 \leqslant 2\lfloor 2^j x \rfloor + 2$ puis $d_j(x) = \lfloor 2^{j+1}x \rfloor - 2\lfloor 2^j x \rfloor \leqslant 2 - 1 = 1$.

On a montré que $\forall (x,j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, $d_j(x) \in \{0,1\}$.

Q 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question Q11, $[\![0, 2^n - 1]\!] = A_n$. Donc,

$$\begin{aligned}x \in D_n &\Leftrightarrow \exists (x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n / \ x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \Leftrightarrow \exists (x_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n / \ 2^n x = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \Leftrightarrow 2^n x \in A_n\\ &\Leftrightarrow 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!].\end{aligned}$$

Q 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_n : \begin{array}{ccc} A_n & \rightarrow & D_n \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{2^n} \end{array}$ et $g_n : \begin{array}{ccc} D_n & \rightarrow & A_n \\ x & \mapsto & 2^n x \end{array}$. D'après la question précédente, f_n et g_n sont deux applications. De plus, $g_n \circ f_n = Id_{D_n}$ et $f_n \circ g_n = Id_{A_n}$. Donc, f_n est bijective puis $\Psi_n = f_n \circ \Phi_n$ est bijective d'après la question Q11.

Q 18. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Si $k < n$,

$$2^k x = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{k-j} = \sum_{j=1}^{k} x_j 2^{k-j} + \sum_{j=k+1}^{n} x_j 2^{k-j}.$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant k$, 2^{k-j} est un entier puis $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j 2^{k-j}$ est un entier. D'autre part,

$$0 \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} x_j 2^{k-j} \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} 2^{k-j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-k}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = 1.$$

Donc, $\lfloor 2^k x\rfloor = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j 2^{k-j}$ puis

$$\pi_k(x) = \frac{\lfloor 2^k x\rfloor}{2^k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}.$$

Si $n \leqslant k$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $k-j \geqslant n-j \geqslant 0$. Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{k-j}$ est un entier puis $\lfloor 2^k x\rfloor = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{k-j}$ et donc

$$\pi_k(x) = \frac{\lfloor 2^k x\rfloor}{2^k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}.$$

III - Développement dyadique, loi et décomposition

Q 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant U_k \leqslant 1$ puis

$$0 \leqslant Y_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Donc, l'événement $\{Y_n \in [0,1[\}$ est Ω puis $\mathrm{P}\left(Y_n \in [0,1[\right) = 1$.

Q 20. Plus précisément, $Y_n(\Omega) = D_n$. Soit $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \in D_n$. Il existe $p \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ tel que $x = \dfrac{p}{2^n}$. Donc,

$$\mathrm{P}\left(Y_n \leqslant x\right) = \mathrm{P}\left(Y_n \leqslant \frac{p}{n}\right) = \sum_{j=0}^{p} \mathrm{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right).$$

Ensuite, pour $j \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ donné, l'application Ψ_n de la question Q17 étant bijective,

$$\left\{Y_n = \frac{j}{2^n}\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k} = \frac{j}{2^n}\right\} = \left\{\Psi_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k}\right) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right\} = \left\{(U_1,\ldots,U_n) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right\}.$$

Posons $\Psi_n^{-1}\left(\dfrac{j}{2^n}\right) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$. Les variables U_1, ..., U_n, étant indépendantes, on a

$$\left\{Y_n = \frac{j}{2^n}\right\} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(U_k = \alpha_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n},$$

puis

$$F_n(x) = \mathrm{P}\left(Y_n \leqslant x\right) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{2^n} = \frac{p+1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}.$$

Q 21. Pour calculer $\mathrm{P}\left(Y_n < x\right)$, il faut enlever le terme $j = p$ dans le calcul précédent et on obtient

$$G_n(x) = \mathrm{P}\left(Y_n < x\right) = \frac{p}{2^n} = x.$$

Q 22. Soit $x \in D_n$. $\mathrm{P}\left(Y_n = x\right) = F_n(x) - G_n(x) = \dfrac{1}{2^n}$. Puisque

$$\mathrm{card}\left(Y_n(\Omega)\right) = \mathrm{card}\left(D_n\right) = \mathrm{card}\left(\Psi_n^{-1}\left(D_n\right)\right) = \mathrm{card}\left(\{0,1\}^n\right) = 2^n,$$

on a montré que Y_n suit la loi uniforme sur D_n.

Q 23. Pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, posons $V_k = d_k\left(X_n\right)$. On définit ainsi des variables aléatoires V_1, ..., V_n, à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{2^k}.$$

Il faut vérifier que chaque V_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et que ces variables sont indépendantes.

Soient $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$ puis $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k}$. Puisque Ψ est bijective et que X_n suit la loi uniforme sur D_n,

$$P(V_1 = \alpha_1, \dots, V_n = \alpha_n) = P((V_1, \dots, V_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = P(\Psi((V_1, \dots, V_n)) = \Psi((\alpha_1, \dots, \alpha_n)))$$
$$= P(X_n = x) = \frac{1}{2^n}.$$

Donc, la variable $V = (V_1, \dots, V_n)$ suit la loi uniforme sur $\{0,1\}^n$. Soient $k \in [\![1,n]\!]$ puis $\alpha_k \in \{0,1\}$. $\text{card}\{v_k = \alpha_k\} = 2^{n-1}$ et donc

$$P(V_k = \alpha_k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Donc, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $V_k \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Enfin, pour tous indices i_1, ..., i_k tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ puis $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) \in \{0,1\}^k$,

$$P(V_{i_1} = \alpha_{i_1}, \dots, V_{i_k} = \alpha_{i_k}) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k} = \prod_{j=1}^{k} P\left(V_{i_j} = \alpha_{i_j}\right).$$

Les variables V_1, ..., V_n, sont indépendantes.

IV - Développement dyadique, étude asymptotique

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $Y_n \leqslant Y_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\{Y_{n+1} \leqslant x\} \subset \{Y_n \leqslant x\}$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+1}(x) = P(Y_{n+1} \leqslant x) \leqslant P(Y_n \leqslant x) = F_n(x).$$

La suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ est décroissante. De même, en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, la suite $(G_n(x))_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

Q 25. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ est décroissante et est minorée par 0. Donc, la suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel positif ou nul. Ainsi, la suite de fonctions $(F_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. De même, pour chaque réel x, la suite $(G_n(x))_{n \geqslant 1}$ est décroissante, minorée par 0 et donc converge. La suite de fonctions $(G_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Q 26. Soit $x \in D$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in D_m$. Puisque la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion d'après la question Q12, pour $n \geqslant m$, $x \in D_n$. D'après la question Q20, pour $n \geqslant m$, on a $F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$ et $G_n(x) = x$ puis

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = x.$$

Si $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(1) = P(Y_n \in [0,1[) = 1$ d'après la question Q19 puis $1 = G_n(1) \leqslant F_n(1) \leqslant 1$ et donc $F_n(1) = 1$. Par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(1) = \lim_{n \to +\infty} G_n(1) = 1.$$

Finalement, $\forall x \in D \cup \{1\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = x$.

Q 27. Soit $x \in [0,1[\setminus D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{j_n}{2^n} \leqslant x < \frac{j_n + 1}{2^n}$ où $j_n = \lfloor 2^n x \rfloor \in [\![0, 2^n - 1]\!]$. De plus $x \notin D$ et donc $\frac{j_n}{2^n} < x < \frac{j_n + 1}{2^n}$. Par suite, d'après la question Q21,

$$G_n(x) = P(Y_n < x) = P(Y_n \leqslant x) = F_n(x) = P\left(Y_n \leqslant \frac{j_n}{2^n}\right) = F_n\left(\frac{j_n}{2^n}\right) = \frac{j_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{2^n} < \frac{j_n}{2^n} < x$ et le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{j_n}{2^n} = x$. Finalement,

$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = x.$$

Q 28. Si $I = [a,b]$ avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, $P(Y_n \in I) = P(a \leqslant Y_n \leqslant b) = P(Y_n \leqslant b) - P(Y_n < a) = F_n(b) - G_n(a)$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \in I) = b - a = \ell(I).$$

Si $I = [a,b[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n \in I) = \lim\limits_{n \to +\infty} (G_n(b) - G_n(a)) = b - a = \ell(I)$.
Si $I =]a,b]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Y_n \in I) = \lim\limits_{n \to +\infty} (F_n(b) - F_n(a)) = b - a = \ell(I)$.

Si $I =]a, b[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Y_n \in I) = \lim\limits_{n\to+\infty} (G_n(b) - F_n(a)) = b - a = \ell(I)$.

Q 29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $D_n = \left\{\dfrac{k}{2^n},\ k \in [\![0, 2^n - 1]\!]\right\}$. D'après la formule de transfert,

$$E(f(Y_n)) = \sum_{x\in D_n} f(x)P(Y_n = x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}\right) f\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

$\left(\dfrac{k}{2^n}\right)_{0\leqslant k\leqslant 2^n}$ est une subdivision de l'intervalle $[0,1]$, à pas contant égal à $\dfrac{1}{2^n}$. Puisque le pas tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que f est continue sur $[0,1]$, la somme de Riemann ci-dessus tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$:

$$\lim_{n\to+\infty} E(f(Y_n)) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Q 30. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $U_k = \dfrac{1+\varepsilon_k}{2}$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k}$. Les variables U_k sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{1}{2}\left(X_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) = \dfrac{1}{2}\left(X_n + 1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ puis $X_n = 2Y_n - 1 + \dfrac{1}{2^n}$ puis

$$\cos(tX_n) = \cos(t(2Y_n - 1))\cos\left(\frac{t}{2^n}\right) - \sin(t(2Y_n - 1))\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

et enfin,

$$E(\cos(tX_n)) = \cos\left(\frac{t}{2^n}\right) E(\cos(t(2Y_n - 1))) - \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) E(\sin(t(2Y_n - 1))).$$

Ensuite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{t}{2^n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) = 0$. D'autre part, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\cos(t(2Y_n - 1))) = \displaystyle\int_0^1 \cos(t(2x-1))\ dx$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\sin(t(2Y_n - 1))) = \displaystyle\int_0^1 \sin(t(2x-1))\ dx$. Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} E(\cos(tX_n)) = \int_0^1 \cos(t(2x-1))\ dx.$$

Si $t = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \cos(t(2x-1))\ dx = 1 = \text{sinc}(0)$ et si $t \neq 0$, $\displaystyle\int_0^1 \cos(t(2x-1))\ dx = \left[\frac{\sin(t(2x-1))}{2t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(t)}{t} = \text{sinc}(t)$. En résumé,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} E(\cos(tX_n)) = \text{sinc}(t),$$

et on retrouve le résultat de la question Q6.

Q 31. La fonction $g\ :\ t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1 car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t-1}{\ln(t)} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1}{\ln(t)} = 1$. On note encore g le prolongement obtenu (on a donc posé $g(0) = 0$ et $f(1) = 1$). g est alors continue sur le segment $[0,1]$ ce qui montre au passage l'existence de l'intégrale proposée.

Soit $t \in]0,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = t^x$. Quand n tend vers $+\infty$, $E\left(t^{Y_n}\right) = E(f(Y_n))$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 t^x\ dt = \left[\frac{t^x}{\ln(t)}\right]_0^1 = \frac{t-1}{\ln(t)} = g(t)$. D'autre part, $E\left(0^{Y_n}\right) = 0$ tend vers $0 = g(0)$ et $E\left(1^{Y_n}\right) = 1$ tend vers $1 = g(1)$. Donc, la suite de fonctions $g_n\ :\ t \mapsto E\left(t^{Y_n}\right)$ converge simplement vers la fonction g sur $[0,1]$. De plus, chaque fonction g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,1]$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant Y_n \leqslant 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t^{Y_n} \leqslant 1$ puis, par croissance de l'espérance, $0 \leqslant g_n(t) \leqslant 1 = \varphi(t)$ où la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\ dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 E\left(t^{Y_n}\right)\ dt.$$

D'après la formule de transfert,

$$\int_0^1 E\left(t^{Y_n}\right)\ dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\int_0^1 t^{\frac{k}{2^n}}\ dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\left[\frac{t^{\frac{k}{2^n}+1}}{\frac{k}{2^n}+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{2^n}\frac{1}{\dfrac{k}{2^n}+1}.$$

Cette somme de RIEMMANN, à pas constant égal à $\dfrac{1}{2^n}$, tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\ dt = \ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\ dt = \ln(2).$$

V - Dénombrabilité

Q 32. Puisque $D = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$, D est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables (car finis). D est donc dénombrable.

Q 33. Montrons que A est un élément de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'ayant pas d'antécédent par f. Dans le cas contraire, il existe $x_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_0) = A$. Mais, si $x_0 \in A$, alors $x_0 \notin f(x_0) = A$ ce qui est impossible, et si $x_0 \notin A$, alors $x_0 \in f(x_0) = A$ ce qui est impossible. Donc, A n'a pas d'antécédent par f puis f n'est pas bijective.

Q 34. Φ est bien une application.

Soit $(A, B) \in (\mathscr{P}(\mathbb{N}))^2$ tel que $\Phi(A) = \Phi(B)$. Donc, $1_A = 1_B$. Soit $x \in \mathbb{N}$.

$$x \in A \Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \Leftrightarrow 1_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

Donc, $A = B$. Ceci montre que Φ est injective.

Soit $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $A = \{x \in \mathbb{N}/\ f(x) = 1\}$. Alors, pour $x \in \mathbb{N}$, si $x \in A$, $f(x) = 1 = 1_A(x)$ et si $x \notin A$, alors $f(x) = 0 = 1_A(x)$. Donc, $f = 1_A = \Phi(A)$. Ceci montre que Φ est surjective. Finalement Φ est bijective.

Q 35. • Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x_n}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, la série de terme général $\dfrac{x_n}{2^{n+1}}$ converge. De plus,

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 1.$$

Donc, Ψ est bien une application.

• 1 est l'image de la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ par Ψ et en particulier, 1 a un antécédent par Ψ.

Soit $x \in [0,1[$. Avec les notations de la partie II, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = d_{n+1}(x) \in \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j}{2^{j+1}}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x - \dfrac{1}{2^n} < \pi_n(x) \leqslant x$, $\pi_n(x)$ tend vers x quand n tend vers $+\infty$. Donc, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}} = \Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. x a donc un antécédent par Ψ. On a montré que Ψ est surjective.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,0,0,0,\ldots)$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,1,1,\ldots)$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments distincts de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mais $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \dfrac{1}{2}$ et

$$\Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Donc, Ψ n'est pas injective.

Q 36 • Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

- Si $\Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^*$, alors $\Lambda((x_n)) = \Psi((x_n)) \in [0,1[$.
- Si $\Psi((x_n)) \in D\cup\{1\}$ et (x_n) stationnaire à 1, alors $0 \leqslant \Lambda((x_n)) = \dfrac{\Psi((x_n))}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$.
- Si $\Psi((x_n)) \in D^*$ et (x_n) stationnaire à 0, alors $0 \leqslant \Psi((x_n)) < 1$ puis $0 \leqslant \Lambda((x_n)) = \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$.

Donc Λ est une application de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$.

• **Surjectivité de Λ.** Soit $x \in [0,1[$.

- Si $x \notin D^*$, x a un antécédent par Ψ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ d'après la question précédente et donc un antécédent par Λ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
- Si $x \in D^*$, soit $p \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier naturel non nul tel que $x \in D_p$ puis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \{0,1\}^p$ tel que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{2^k}$.

Si $p = 1$, alors $x = \dfrac{\alpha_1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (car $x \neq 0$) et donc $x = \dfrac{\Psi((1,1,1,\ldots))}{2} = \Lambda((1,1,1,\ldots))$ (car $\Psi((1,1,1,\ldots)) = 1$ et $(1,1,1,\ldots)$ stationnaire à 1).

Si $p \geqslant 2$ et $\alpha_1 = 1$, alors $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha_2}{2} + \ldots + \dfrac{\alpha_p}{2^{p-1}}\right) = \dfrac{1 + \Psi\left((\alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0, 0, 0, \ldots)\right)}{2}$.
α_p est non nul car sinon $x \in D_{p-1}$ et donc $\Psi\left((\alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0, 0, 0, \ldots)\right) \in D^*$ et $(\alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0, 0, 0, \ldots)$ est stationnaire à 0. Par suite, $x = \Lambda\left((\alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0, 0, 0, \ldots)\right)$.

Si $p \geqslant 2$ et $\alpha_1 = 0$, alors $x = \dfrac{\alpha_2}{2} + \ldots + \dfrac{\alpha_{p-1}}{2^{p-1}} + \dfrac{1}{2^p}$ (encore une fois, on a $\alpha_p \neq 0$).
Donc, $x = \dfrac{\alpha_2}{2} + \ldots + \dfrac{\alpha_{p-1}}{2^{p-1}} + \dfrac{1}{2^{p+1}} + \dfrac{1}{2^{p+2}} + \ldots = \dfrac{\Psi\left((\alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, 0, 1, 1, 1, \ldots)\right)}{2} = \Lambda\left((\alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, 0, 1, 1, 1, \ldots)\right)$.

Donc Λ est une surjection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.

• **Injectivité de Λ.** On note tout d'abord que si $\Psi\left((x_n)\right)$ n'est pas dans D^*, alors $\Lambda\left((x_n)\right)$ n'est pas dans D^* et si $\Psi\left((x_n)\right)$ est dans D^*, alors dans les cas, $\Lambda\left((x_n)\right)$ est dans D^*.

Soit $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x \notin D^*$. Supposons par l'absurde que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit p le plus petit entier k tel que $x_k \neq x'_k$. On peut supposer sans perte de généralité que $x_p < x'_p$ et donc que $x_p = 0$ et $x'_p = 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x'_k}{2^{k+1}} \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x_k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{p+1}} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x'_k}{2^{k+1}} \Rightarrow \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x'_k - x_k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Mais,

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x'_k - x_k}{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{p+2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{p+1}}$$

avec égalité si et seulement si pour tout $k \geqslant p+1$, $x'_k - x_k = 1$ ou encore, pour tout $k \geqslant p+1$, $x'_k = 1$ et $x_k = 0$. Mais alors, $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{x_k}{2^{k+1}}$. Si pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $x_k = 0$, alors $x = 0$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x'_k}{2^{k+1}} = 0$ et donc $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sinon, $x \in D^*$ ce qui est exclus. Donc, encore une fois $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Soit maintenant $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Lambda\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Lambda\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in D^*$ et $\Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in D^*$. $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est soit du type I : « $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in D \cup \{1\}$ et (x_n) stationnaire à 1 » soit du type II : « $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in D^*$ et (x_n) stationnaire à 0 ». On a de même pour $\Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Si $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est du type I, on a $\Lambda\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et si $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est du type II, on a $\Lambda\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) > \dfrac{1}{2}$. L'égalité $\Lambda\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Lambda\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ impose donc à $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ et $\Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ d'être d'un même type. Dans les deux cas, l'égalité $\Lambda\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Lambda\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ entraine l'égalité $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

1er cas. Supposons $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x \in D^*$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaires à 0. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant p$, $x_n = x'_n = 0$. x est alors dans D_p. Puisque ψ_p est bijective et $\psi_p\left(x_0, \ldots, x_{p-1}\right) = \psi_p\left(x'_0, \ldots, x'_{p-1}\right) = x$, on a aussi pour $n < p$, $x_n = x'_n$. Finalement, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2ème cas. Supposons $\Psi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \Psi\left((x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x \in D \cup \{1\}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaires à 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant p$, $x_n = x'_n = 1$. Alors,

$$x = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^p}$$

et aussi $x = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x'_n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^p}$. Par suite, $\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{x'_n}{2^{n+1}}$ et on se retrouve dans la situation précédente. De nouveau, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc Λ est une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$ et finalement Λ est une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.

Q 37 Il existe une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$ à savoir Λ et une bijection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ à savoir Φ. Si $[0,1[$ est dénombrable, il existe une bijection g de $\mathbb{N}$ sur $[0,1[$. Mais alors $f = \Phi^{-1} \circ \Lambda^{-1} \circ g$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Une telle bijection n'existe pas d'après la question Q33 et donc $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

