Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I - Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q1. La fonction nulle est dans $\mathscr{H}(U)$. Soient $(f, g) \in (\mathscr{H}(U))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in U$,

$$\Delta(\lambda f + \mu g)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i^2}(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(x) = \lambda \Delta f(x) + \mu \Delta g(x) = 0.$$

Donc, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{H}(U)$. Ceci montre que $\mathscr{H}(U)$ est un sous-espace-vectoriel de l'espace vectoriel $\left(C^2(U, \mathbb{R}), +, .\right)$.

Q2. Soit $(j_1, \dots, j_p) \in [\![1, n]\!]^p$. Puisque f est de classe C^∞ sur l'ouvert U, d'après le théorème de Schwarz, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}\right)$ et donc

$$\Delta\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(\Delta f)$$

et donc, si $\Delta f = 0$, alors $\Delta\left(\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}\right) = 0$. Ainsi, si $f \in \mathscr{H}(U)$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(j_1, \dots, j_p) \in [\![1, n]\!]^p$, $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} \in \mathscr{H}(U)$.

Q3. Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. f^2 est de classe C^2 sur U et pour $x \in U$ puis $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial\left(f^2\right)}{\partial x_i}(x) = 2f(x)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ puis

$$\frac{\partial^2\left(f^2\right)}{\partial x_i^2}(x) = 2\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2 + f(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\right).$$

On en déduit que

$$\Delta\left(f^2\right) = 2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + f\Delta f\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2.$$

Mais alors, si $f \in \mathscr{H}(U)$,

$$f^2 \in \mathscr{H}(U) \Rightarrow \Delta\left(f^2\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow df = 0$$
$$\Rightarrow f \text{ est constante sur } U \text{ (car } U \text{ est connexe par arcs).}$$

Réciproquement, si f est constante sur U, alors Δf et $\Delta\left(f^2\right)$ sont nuls sur U et donc f et f^2 sont dans $\mathscr{H}(U)$.

Q4. La fonction $f\ :\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ est harmonique sur U et non constante sur U. Mais la fonction $f \times f = f^2\ :\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2$ n'est pas harmonique sur U (pour tout x de U, $\Delta f(x) = 2 \neq 0$). Le produit de deux fonctions harmoniques n'est donc pas nécessairement une fonction harmonique.

Partie II - Exemples de fonctions harmoniques

II.A -

Q5. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y).$$

Par hypothèse, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(x_0) \neq 0$ et $v(y_0) \neq 0$.

- Pour tout réel x, $u''(x)v(y_0) + u(x)v''(y_0) = 0$ puis $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ où $\lambda = \dfrac{v''(y_0)}{v(y_0)}$.
- Pour tout réel y, $u''(x_0)v(y) + u(x_0)v''(y) = 0$ puis $v''(y) + \mu v(y) = 0$ où $\mu = \dfrac{u''(x_0)}{u(x_0)}$.
- $\Delta f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow u''(x_0)v(y_0) + u(x_0)v''(y_0) = 0 \Rightarrow \dfrac{u''(x_0)}{u(x_0)} = -\dfrac{v''(y_0)}{v(y_0)} \Rightarrow \mu = -\lambda$.

Donc, il existe un réel λ tel que u soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z'' + \lambda z = 0$ et v soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z'' - \lambda z = 0$.

Q6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1er cas : $\lambda > 0$. Il existe nécessairement $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \gamma \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \delta \operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$. On a donc nécessairement pour tout x réel,

$$f(x,y) = \left(\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right)\left(\gamma \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}y\right) + \delta \operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}y\right)\right).$$

Réciproquement, pour une telle fonction,

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y) &= -\lambda\left(\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right)\left(\gamma \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}y\right) + \delta \operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}y\right)\right)\\ &\quad + \lambda\left(\alpha \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right)\left(\gamma \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}y\right) + \delta \operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}y\right)\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

2ème cas : $\lambda < 0$. Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme

$$(x,y) \mapsto \left(\alpha \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + \beta \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right)\left(\gamma \operatorname{ch}\left(\sqrt{-\lambda}y\right) + \delta \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}y\right)\right).$$

3ème cas : $\lambda = 0$. Il existe nécessairement $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (\alpha x + \beta)(\gamma y + \delta).$$

Réciproquement, une telle fonction est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto (\alpha \cos(ax) + \beta \sin(ax))(\gamma \operatorname{ch}(ay) + \delta \operatorname{sh}(ay))$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, a) \in \mathbb{R}^5$ et $a > 0$ et les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto (\alpha x + \beta)(\gamma y + \delta)$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

II.B -

Q7. L'application $\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et l'application f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc, l'application $g = f \circ h$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Q8. On rappelle que si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

D'après la formule de dérivation partielle de fonctions composées, pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Q9. On redérive :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\\
&\quad + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}
$$

(d'après le théorème de SCHWARZ) et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\quad - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\\
&\quad + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\\
&= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\quad - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}
$$

Q10. Par suite,

$$
\begin{aligned}
r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)\\
&= r^2\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
f \in \mathscr{H}\left(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right) &\Leftrightarrow \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ r^2\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.
\end{aligned}
$$

Q11. La fonction $g\ :\ (r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est indépendante de θ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = 0$. Dans ce cas,

$$
\forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0 \Leftrightarrow \forall (r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0
$$

Ainsi, pour chaque réel θ, la fonction $h\ :\ r\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $rz' + z = 0$. Il existe donc nécessairement une constante λ indépendante de θ, telle que, pour tout $(r,\theta)\in]0,+\infty[$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\lambda}{r}$ puis il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(r,\theta)\in]0,+\infty[$, $g(r,\theta) = \lambda\ln(r) + \mu$ ou encore tel que

$$
\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y) = \lambda\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \mu.
$$

Réciproquement, si pour tout $g(r,\theta) = \lambda\ln(r) + \mu$, alors g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et

$$
r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2\lambda\left(-\frac{1}{r^2}\right) + r\lambda\left(\frac{1}{r}\right) = 0.
$$

Les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto \lambda\ln\left(x^2+y^2\right) + \mu$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ (en renommant la constante λ).

Q12. Soit f une fonction du type précédent : $\forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=\lambda\ln(\|(x,y)\|)+\mu$. Les conditions imposées à f sont équivalentes à $\left\{\begin{array}{l}\lambda\ln(r_1)+\mu=a\\ \lambda\ln(r_2)+\mu=b\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{b-a}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}\\ \mu=\dfrac{a\ln(r_2)-b\ln(r_1)}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}\end{array}\right.$.

La fonction $f\ :\ (x,y)\mapsto\dfrac{b-a}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}\ln(\|(x,y)\|)+\dfrac{a\ln(r_2)-b\ln(r_1)}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}$ convient.

II.C -

Q13. Par hypothèse il existe $(r_0,\theta_0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ tel que $u(r_0)v(\theta_0)\neq 0$. Donc, pour tout réel θ,

$$u(\theta_0)v(\theta)=f(r_0\cos(\theta+2\pi),r_0\sin(\theta+2\pi))=f(r_0\cos\theta,r_0\sin\theta)=u(r_0)v(\theta),$$

et donc, pour tout réel θ, $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$ après simplification par le réel non nul $u(r_0)$. La fonction v est donc 2π-périodique.

Q14. Pour $(r,\theta)\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$0=r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r^2u''(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)+ru'(r)v(\theta).$$

Quand $\theta=\theta_0$, on obtient pour tout $r>0$,

$$r^2u''(r)+ru'(r)+\mu u(r)=0$$

où $\mu=\dfrac{v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$ est indépendante de r et pour $r=r_0$, on obtient pour tout réel θ,

$$v''(\theta)+\lambda v(\theta)=0$$

où $\lambda=\dfrac{r_0^2u''(r_0)+r_0u'(r_0)}{u(r_0)}$ est indépendante de θ. De plus, pour $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}0&=r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta))\\&=r^2u''(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)+ru'(r)v(\theta)\\&=(-ru'(r)-\mu u(r))v(\theta)+u(r)(-\lambda v(\theta))+ru'(r)v(\theta)\\&=(-\lambda-\mu)u(r)v(\theta)=-(\lambda+\mu)f(r,\theta).\end{aligned}$$

et donc $\mu=-\lambda$ car f n'est pas la fonction nulle. Finalement,

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ (\forall r>0,\ r^2u''(r)+ru'(r)-\lambda u(r)=0\text{ et }\forall\theta\in\mathbb{R},\ v''(\theta)+\lambda v(\theta)=0.$$

II.C.1) On suppose $\lambda=0$.

Q15. Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines. Une fonction affine est 2π-périodique si et seulement si cette fonction est constante. Donc, les solutions de (II.2) qui sont 2π-périodiques sont les fonctions constantes.

Q16. D'après Q11, les solutions sur $]0,+\infty[$ de (II.1) sont les fonctions de la forme $r\mapsto\alpha\ln(r)+\beta$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Q17. On retrouve dans ce cas les fonctions harmoniques radiales de la question Q11 : les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\alpha\ln(\|(x,y)\|)+\beta$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ (en récupérant la solution nulle).

II.C.2) On suppose $\lambda\neq 0$.

Q18. Dans le cas où $\lambda>0$, les solutions de (II.2) sont les fonctions de la forme $\theta\mapsto\lambda\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)+\mu\sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Une telle fonction, non nulle, est 2π-périodiques si et seulement si $\lambda=1$. Dans ce cas, les solutions de (II.2) sont les fonctions de la forme $\theta\mapsto a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Dans le cas où $\lambda<0$, les solutions de (II.2) sont les fonctions de la forme $\theta\mapsto a\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)+b\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\theta\right)$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Une telle fonction, non nulle, n'est pas 2π-périodique car par exemple, une telle fonction, non nulle, est non bornée sur $\mathbb{R}$.

En résumé, (II.1) admet des solutions 2π-périodiques non nulles si et seulement si $\lambda=1$ et dans ce cas, les solutions de (II.1) sont les fonctions de la forme $\theta\mapsto a\cos\theta+b\sin\theta$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Dorénavant, on suppose que $\lambda=1$.

Q19. (II.1) s'écrit donc $r^2z''+rz'-z=0$. Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $Z(x)=z(e^x)$ de sorte que pour tout $r>0$, $z(r)=Z(\ln r)$. La fonction z est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction Z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $r>0$,

$$\begin{aligned}-z(r)+rz'(r)+r^2z''(z) &= -Z(\ln r)+r\left(\frac{1}{r}Z'(\ln r)\right)+r^2\left(-\frac{1}{r^2}Z'(\ln r)+\frac{1}{r^2}Z''(\ln r)\right)\\ &= Z''(\ln r)-Z(\ln r).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\forall r>0,\ r^2z''(r)+rz'(r)-z(r)=0 &\Leftrightarrow \forall r>0,\ Z''(\ln r)-Z(\ln r)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ Z''(x)-Z(x)=0 \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ Z(x)=ae^x+be^{-x}\\ &\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ z(r)=ar+\frac{b}{r}.\end{aligned}$$

Q20. Les solutions précédentes qui se prolongent par continuité en 0 sont les fonctions de la forme $r\mapsto ar$, $a\in\mathbb{R}$.

Partie III - Principe du maximum faible

III.A -

Q21. U est borné. Soit M un majorant de $\{\|u\|,\ u\in U\}$. Si $v\in\overline{U}$, il existe une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U, convergente, de limite v. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $\|u_p\|\leqslant M$ et donc, par passage à la limite, $\|v\|\leqslant M$ (par continuité de la norme). Ainsi, $\overline{U}$ est borné.

$\overline{U}$ est une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$, qui est de dimension finie. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, $\overline{U}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$.

La fonction f est continue sur le compact $\overline{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on sait alors que f admet sur $\overline{U}$ un maximum, atteint en un certain x_0 de $\overline{U}$.

Q22. Si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)\leqslant 0$, alors $\Delta f(x_0)\leqslant 0$ ce qui est faux. Donc, il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)>0$. i est ainsi dorénavant fixé.

Supposons par l'absurde que $x_0\in U$. Puisque f est de classe C^1 sur l'ouvert U, on sait que x_0 est nécessairement un point critique de f ou encore : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=0$. En particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0$.

Soit φ la fonction $t\mapsto f(x_0+te_i)$. Puisque $x_0\in U$ et que U est un ouvert, la fonction φ est définie au moins sur un intervalle de la forme $]-\rho,\rho[$, $\rho>0$ (ρ vérifiant : pour tout $t\in]-\rho,\rho[$, $x_0+te_i\in U$). Puisque f est de classe C^2 sur U, φ est de classe C^2 sur $]-\rho,\rho[$. Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=0$ et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)>0$, on a $\varphi'(0)=0$ et $\varphi''(0)>0$. Puisque φ'' est continue en 0, il existe un intervalle de la forme $]-\rho',\rho'[\subset]-\rho,\rho[$, $\rho'>0$, sur lequel la fonction φ'' est strictement positive et donc la fonction φ' est strictement croissante. Mais alors φ' est strictement positive sur $]0,\rho'[$ et donc φ est strictement croissante sur $[0,\rho'[$. Ceci contredit le fait que φ admet un maximum en 0. Donc, $x_0\notin U$.

Mais alors, $x_0\in\partial U$. Par définition de x_0, pour tout $x\in U$, $f(x)<f(x_0)=\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Max}}f(y)=\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Sup}}f(y)$.

III.B -

Q23. Pour $x\in\overline{U}$, posons $h_\varepsilon(x)=\varepsilon\|x\|^2=\varepsilon\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)$ de sorte que $g_\varepsilon=f+h_\varepsilon$. h_ε est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et en particulier, continue sur $\overline{U}$ et de classe C^2 sur U. Il en est de même de g_ε.

Pour $x\in U$ et $i\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial^2 h_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x)=2$ et donc, pour $x\in U$,

$$\Delta g_\varepsilon(x)=\Delta f(x)+2n\varepsilon=2n\varepsilon>0.$$

Q24. Soit $\varepsilon>0$. D'après la question Q22, pour tout $x\in U$, $f(x)+\varepsilon\|x\|^2=g_\varepsilon(x)<\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Sup}}g_\varepsilon(y)=\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Sup}}\left(f(y)+\varepsilon\|y\|^2\right)$.

Puisque $\overline{U}$ est borné, on peut considérer un majorant M de l'ensemble $\left\{\|y\|^2,\ y\in\partial U\right\}$. $\left(\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Sup}}f(y)\right)+\varepsilon M$ est un majorant de l'ensemble $\left\{f(y)+\varepsilon\|y\|^2,\ y\in\partial U\right\}$ et donc $\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Sup}}\left(f(y)+\varepsilon\|y\|^2\right)\leqslant\left(\underset{y\in\partial U}{\operatorname{Sup}}f(y)\right)+\varepsilon M$. Ainsi, pour tout $x\in U$ et tout $\varepsilon>0$,

$$f(x) < \left(\operatorname*{Sup}_{y \in \partial U} f(y)\right) + \varepsilon M - \varepsilon \|x\|^2.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient

$$\forall x \in U,\ f(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in \partial U} f(y).$$

Q25. $f_1 - f_2$ est encore continue sur $\overline{U}$, de classe C^2 et harmonique sur U. Donc,

$$\forall x \in U,\ f_1(x) - f_2(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in \partial U} (f_1(y) - f_2(y)) = 0.$$

Donc, la fonction $f_1 - f_2$ est négative sur U. En échangeant les rôles de f_1 et f_2, la fonction $f_2 - f_1$ est aussi négative sur U et finalement, la fonction $f_1 - f_2$ est nulle. Donc, f_1 et f_2 sont égales sur U.

Partie IV - Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

IV.A -

Q26. Soit $y \in]-R, R[$. Pour $x \in \left]-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}\right[$, on pose $\varphi_n(x) = a_n(x + iy)^n$. Soit $r \in \left]0, \sqrt{R^2 - y^2}\right[$.

- la série de fonction de terme général φ_n converge simplement sur $[-r, r]$ vers la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto f(x, y)$.
- chaque fonction φ_n est dérivable sur $[-r, r]$ et pour tout réel x de $[-r, r]$, $\varphi_0'(x) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n'(x) = n a_n (x + iy)^{n-1}$.
- pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-r, r]$, $|\varphi_n'(x)| = n\,|a_n|\,|x + iy|^{n-1} \leqslant n\,|a_n|\,r^{n-1}$ puis $\|\varphi_n'\|_{\infty,[-r,r]} \leqslant n\,|a_n|\,r^{n-1}$. De plus, on sait que le rayon de convergence associé à la suite (a_n) est le même que le rayon de convergence associé à la suite $(n a_n)$ et donc la série numérique de terme général $n\,|a_n|\,r^{n-1}$, $n \geqslant 1$, converge (car $r < R$).
  Par suite, la série de fonctions de terme général φ_n', $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[-r, r]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction φ est dérivable sur $[-r, r]$ pour tout $r \in \left]0, \sqrt{R^2 - y^2}\right[$ et donc sur $\left]-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2}\right[$, et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Dit autrement, f admet sur $D(0, R)$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable et de plus,

$$\forall (x, y) \in D(0, R),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}.$$

De même, f admet sur $D(0, R)$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable et de plus,

$$\forall (x, y) \in D(0, R),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}.$$

On note en particulier que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont à leur tour développable en série entière sur $D(0, R)$. Mais alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe C^n sur $D(0, R)$. En résumé, f est de classe C^∞ sur $D(0, R)$. De plus, les dérivées partielles successives de f s'obtiennent par dérivation terme à terme.

On note aussi que $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. La fonction f est donc une fonction harmonique sur $D(0, R)$

Q27. $0 = \Delta f = \Delta u + i\Delta v$ et donc $\Delta u = \Delta v = 0$.

IV.B -

Q28. Posons $h = \dfrac{1}{f}$. Puisque f est de classe C^1 sur $D(0, R)$ et ne s'annule pas sur $D(0, R)$, h est de classe C^1 sur $D(0, R)$. De plus, d'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial h}{\partial x},$$

et donc $h = \dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $D(0, R)$.

Q29. L'égalité $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial x}$ fournit plus explicitement $\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} + i\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et donc
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$
La formule de Leibniz fournit alors

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(uv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(uv) = v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= v\Delta u + u\Delta v + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.\end{aligned}$$

Donc, la fonction uv est harmonique sur U.

IV.C -

Q30. g est de classe C^2 et harmonique sur $D(0,R)$. Donc, h est de classe C^1 sur $D(0,R)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \text{ (d'après le théorème de Schwarz)}\\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \text{ (car } g \text{ est harmonique)}\\ &= i\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right) = i\frac{\partial h}{\partial x}.\end{aligned}$$

On en déduit que h se développe en série entière sur $D(0,R)$ d'après le résultat admis par l'énoncé.

Q31. Soit h la fonction de la question précédente. Pour $x \in D(0,R)$, posons $h(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x+iy)^n$. On a donc
$$\forall (x,y) \in D(0,R),\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x+iy)^n.$$
On sait que les rayons de convergence respectivement associés aux suites (b_n) et $\left(\dfrac{b_n}{n+1}\right)$ sont les mêmes. Pour $(x,y) \in D(0,R)$, on peut donc poser $H(x,y) = g(0,0) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1}(x+iy)^{n+1}$. H est développable en série entière sur $D(0,R)$. Vérifions alors que $g = \mathrm{Re}(H)$. On note u et v les parties réelle et imaginaire de H

D'après la question Q26, H est de classe C^1 sur $D(0,R)$ et
$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} = h = \frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}$$
et
$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} = ih = \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial g}{\partial x}.$$
On en déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ puis que, sur $D(0,R)$, $d(g-u) = 0$. Puisque $D(0,R)$ est connexe par arcs car convexe, $g-u$ est constante sur $D(0,R)$. Ainsi, pour $(x,y) \in D(0,R)$, $g(x,y) - u(x,y) = g(0,0) - u(0,0) = 0$ (car $g(0,0) \in \mathbb{R}$). Donc, $g = \mathrm{Re}(H)$ où H est une certaine fonction développable en série entière sur $D(0,R)$.

IV.D -

Q32. Pour tout réel $t \in [0,2\pi]$ et $r \in [0,R[$, $f(r\cos t, r\sin t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$.

Chaque fonction $f_n\ :\ t \mapsto a_n r^n e^{int}$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$. De plus, $\|f_n\|_\infty = |a_n| r^n$ qui est le terme général d'une série numérique convergente (car $r < R$). La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0,2\pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, pour $r \in [0, R[$ donné,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n \left[\frac{e^{int}}{n}\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi f(0,0),\end{aligned}$$

et donc

$$\forall r \in [0, R[,\ f(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,dt.$$

Q33. Si g est une fonction de classe C^2 sur $D(0,R)$ à valeurs réelles et harmonique, d'après la question Q31, il existe $H : D(0,R) \to \mathbb{C}$, développable en série entière sur $D(0,R)$ telle que $g = \mathrm{Re}(H)$. Pour $r \in [0, R[$, on a alors

$$g(0,0) = \mathrm{Re}(H(0,0)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(r\cos t, r\sin t)\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(H(r\cos t, r\sin t))\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos t, r\sin t)\,dt.$$

Q34. Soit $r \in [0, R[$. La fonction $t \mapsto |f(r\cos t, r\sin t)|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, cette fonction est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$. Pour $r \in [0, R[$, on a alors

$$|f(0,0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}|f(r\cos t, r\sin t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi} \times 2\pi \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(r\cos t, r\sin t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos t, r\sin t)|.$$

Q35. De même, avec Q33, $|g(0,0)| \leqslant \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |g(r\cos t, r\sin t)|$.

Q36. Si $|f|$ admet sur $D(0,R)$ un maximum en $(0,0)$, alors d'après la question 34,

$$\forall r \in [0, R[,\ |f(0,0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos t, r\sin t)| \leqslant |f(0,0)|.$$

Par suite, $\forall (r,t) \in [0, R[\times\mathbb{R}$, $|f(r\cos t, r\sin t)| = |f(0,0)|$. La fonction $|f|$ est donc constante sur $D(0,R)$.

Posons de nouveau $f = u + iv$ de sorte que la fonction $g = u^2 + v^2 = |f|^2$ est constante sur $D(0,R)$. Mais alors, puisque de plus u et v sont harmoniques d'après la question Q26,

$$\begin{aligned}0 = \Delta g &= 2\left(u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) \\ &= 2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right).\end{aligned}$$

Par suite, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ puis u et v sont constantes sur $D(0,R)$. Finalement, f est constante sur $D(0,R)$.

Q37. Soit P un polynôme non constant (et donc de degré n supérieur ou égal à 1). Supposons par l'absurde que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

En posant $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, on a $\left|\dfrac{P(z)}{a_n z^n}\right| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} 1$ et donc $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$. On peut donc choisir $R > 0$ tel que pour $|z| \geqslant R$, $|P(z)| \geqslant |P(0)|$.

La fonction P est continue sur le compact $\overline{D(0,R)}$ et admet donc un minimum sur ce compact, atteint en un certain $z_0 \in \overline{D(0,R)}$. Si $|z| \leqslant R$, on a $|P(z)| \geqslant |P(z_0)|$ et si $|z| > R$, on a $|P(z)| \geqslant |P(0)| \geqslant |P(z_0)|$.
Finalement, la fonction $z \mapsto |P(x+iy)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$, atteint en un certain z_0 de $\mathbb{R}^2$. Soit $Q = P(z - z_0)$. Q est un polynôme en z et donc la fonction $(x,y) \mapsto Q(x+iy)$ est développable en série entière sur tout $D(0,R)$, $R > 0$, d'après la question Q28. Puisque P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{Q(x+iy)}$ est développable en série entière sur tout $D(0,R)$, $R > 0$ et de plus la fonction $|f|$ admet un maximum en $(0,0)$.

Donc, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{Q(x+iy)}$ est constante sur tout $D(0,R)$, $R > 0$, d'après la question Q36, et donc sur $\mathbb{C}$ puis la fonction P est constante sur $\mathbb{C}$ ce qui est faux.

Donc, P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{C}$.

Partie V - Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Q38. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $z \in D(0,1)$. Alors, $e^{it} + z \neq 0$, puis $|ze^{-it}| < 1$ et

$$\begin{aligned}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} &= \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = \left(1+ze^{-it}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}e^{-i(n+1)t} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n e^{-int}.\end{aligned}$$

Donc, la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ est développable en série entière sur $D(0,1)$. Mais alors, la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt$ est développable en série entière sur $D(0,1)$ (en intégrant terme à terme comme ci-dessous), puis la fonction $(x,y) \mapsto g(x+iy) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt\right)$ est harmonique sur $D(0,1)$ d'après la question Q27.

Q39. Soit $z \in D(0,1)$. La série de fonctions de terme général $t \mapsto f_n(t)$ où $f_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 2z^n e^{-int} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$ car pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = 2|z|^n$. On peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} dt + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_0^{2\pi} e^{-int}\, dt\right) = 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left[\frac{e^{-int}}{n}\right]_0^{2\pi} = 1.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathscr{P}(t,z)\, dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dt\right) = 1.$$

Q40. Soit $z \in D(0,1)$. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto h(t)\mathscr{P}(t,z)$ est 2π-périodique et donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_\varphi^{\varphi+2\pi} h(t)\mathscr{P}(t,z)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathscr{P}(t,z)\, dt = g(z).$$

Q41. Soit $r \in [0,1[$ et $(t,\theta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\left(t, re^{i\theta}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\left(e^{it}+re^{i\theta}\right)\left(e^{-it}-re^{-i\theta}\right)}{\left(e^{it}-re^{i\theta}\right)\left(e^{-it}-re^{-i\theta}\right)}\right) = \frac{1 - r\cos(t-\theta) + r\cos(\theta-t) - r^2}{1 + r\left(e^{i(t-\theta)} + e^{-i(t-\theta)}\right) + r^2} \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\end{aligned}$$

Q42. Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\delta \in]0, \pi[$.

Il s'agit donc de montrer que $\displaystyle\lim_{z \to e^{i\varphi}} \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\, dt = 0$ ou encore que $\displaystyle\lim_{(r,\theta)\to(1,\varphi)} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\, dt = 0$.

Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t de $[\varphi+\delta, \varphi+2\pi-\delta] \subset]\varphi, \varphi+2\pi[$,

$$r^2 - 2r\cos(t-\theta) + 1 = \left|r - e^{i(t-\theta)}\right|^2 > 0 \text{ (car } r < 1\text{)},$$

et donc $\mathscr{P}(t,z) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} > 0$. De plus, en choisissant déjà $\theta \in \left[\varphi - \dfrac{\delta}{2}, \varphi + \dfrac{\delta}{2}\right]$, pour tout réel $t \in [\varphi+\delta, \varphi+2\pi-\delta]$, $t - \theta \in [\varphi-\theta+\delta, \varphi-\theta+2\pi-\delta] \subset \left[\dfrac{\delta}{2}, 2\pi - \dfrac{\delta}{2}\right]$. Mais alors, pour tout réel $t \in [\varphi+\delta, \varphi+2\pi-\delta]$,

$$0 < 1 - 2r\cos(t-\theta) + r^2 \leqslant 1 - 2r\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + r^2$$

puis, pour tout $r \in [0,1[$ et tout $\theta \in \left[\varphi - \frac{\delta}{2}, \varphi + \frac{\delta}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathscr{P}(t,z)\ dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)+r^2}\ dt = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)+r^2}.$$

Quand r tend vers 1 et θ tend vers φ, $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)+r^2}$ tend vers $\dfrac{0}{2-2\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)} = 0$ et donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\ dt = \lim_{(r,\theta)\to(1,\varphi)} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\ dt = 0.$$

Q43. Soient $\varphi \in \mathbb{R}$.

La fonction h est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction h est continue en φ. Donc, il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que pour $t \in [\varphi-\delta, \varphi+\delta]$, $|h(t)-h(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (il n'y a pas de raison d'utiliser le théorème de Heine puisque φ est fixé). δ est ainsi dorénavant fixé. Pour tout $z \in D(0,1)$,

$$\begin{aligned}
|g(z)-h(\varphi)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathscr{P}(z,t)\ dt - \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(\varphi)\mathscr{P}(z,t)\ dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi}^{\varphi+\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+2\pi-\delta}^{\varphi+2\pi} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt \text{ (par } 2\pi \text{ périodicité)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathscr{P}(t,z)\ dt + \frac{2\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{2\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} \mathscr{P}(t,z)\ dt + \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt \text{ (car } \delta \in]0,\pi[\text{ et car } \mathscr{P}(t,z) \geqslant 0) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt \text{ (d'après la question Q39).}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in D(0,1)$, $|g(z)-h(\varphi)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi}\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt$.

Q44. Maintenant, quand z tend vers $e^{i\varphi}$, $\dfrac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi}\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt$ tend vers 0 d'après la question Q42 et donc, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $z \in D(0,1)$ et $\left|z - e^{i\varphi}\right| \leqslant \alpha$,

alors $\dfrac{\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi}\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t)-h(\varphi)|\mathscr{P}(t,z)\ dt \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $z \in D(0,1)$ tel que $\left|z - e^{i\varphi}\right| \leqslant \alpha$, on a

$$|g(z)-h(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a ainsi montré que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{z\to e^{i\varphi}\\ z\in D(0,1)}} g(z) = h(\varphi)$.

Pour $(x,y) \in \overline{D(0,1)}$, posons $f(x,y) = \begin{cases} g(x+iy) \text{ si } x^2+y^2 < 1 \\ h(\varphi) \text{ si } (x,y) = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \varphi \in \mathbb{R} \end{cases}$ (h étant 2π-périodique, f est bien définie).
D'après la question Q38, la fonction f est harmonique sur $D(0,1)$. D'autre part, ce qui précède, joint à la continuité de h, montre que f est continue sur $\overline{D}(0,1)$. f est donc une solution au problème de Dirichlet.

L'unicité d'une telle solution est assurée par la question Q25.

