SESSION 2017

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I - Variables aléatoires entières décomposables

I.A - Premiers exemples

On notera R_X le rayon de la série entière de somme G_X.

I.A - 1) Si $X \sim X'$, alors $G_X = G_{X'}$. Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathbb{P}(X = n) \leqslant 1$ et donc $R_X \geqslant 1$. On sait alors que

$$G_X = G_{X'} \Rightarrow \forall t \in]-1,1[,\ G_X(t) = G_{X'}(t) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X' = n) \Rightarrow X \sim X'.$$

I.A - 2) On sait que pour $t \in]-R_X, R_X[$, $G_X(t) = E\left(t^X\right)$. Y et Z sont indépendantes et donc t^Y et t^Z le sont. Par suite, pour tout t dans $]-\text{Min}\{R_Y, R_Z\}, \text{Min}\{R_Y, R_Z\}[$ (au moins)

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = E\left(t^Y t^Z\right) = E\left(t^Y\right) E\left(t^Z\right) = G_Y(t) G_Z(t).$$

I.A - 3) Si $n \geqslant 2$, on sait que X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de mêmes lois $\mathscr{B}(1, p)$ et en particulier est la somme des deux variables indépendantes $X_1 + \ldots + X_{n-1}$ et X_n, ces deux variables n'étant pas constantes presque sûrement (car $n - 1 \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$). Dans ce cas, X est décomposable.

Si $n = 1$ et si $X = Y + Z$, l'événement $X = 0$ est l'événement $(Y, Z) = (0, 0)$ et l'événement $X = 1$ est l'événement $(Y, Z) = (1, 0)$ ou $(Y, Z) = (0, 1)$. Ceci impose que l'un des deux événements $Y = 0$ ou $Z = 0$ soit l'événement certain et donc X n'est pas décomposable.

I.A - 4) a) Pour tout $t \geqslant 0$, $A(t) > 0$. A n'a donc pas de racine qui est un réel positif. Par suite, on ne peut avoir $\deg(U) = 1$ (resp. $\deg(V) = 1$) car alors les deux coefficients de U (resp. V) sont non nuls de signes contraires. Si U et V ne sont pas constants, il ne reste plus que la possibilité $\deg(U) = \deg(V) = 2$.

$A' = 4T^3 + 2$. Le polynôme A est strictement décroissant sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ et strictement croissant sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[$. Puisque $A(-1) = 0$, $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 1 - \dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}} < 0$ (car $\left(\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{27}{16} < 1$) et $A(0) = 1 > 0$, le polynôme A admet exactement deux racines réelles à savoir -1 et un réel t_0 élément de $\left]-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right[$. De plus, -1 et t_0 ne sont pas racines de A' et donc sont racines simples de A. Ainsi,

$$\begin{aligned}
A &= (T+1)\left(T^3 - T^2 + T + 1\right) = (T+1)(T - t_0)\left(T^2 + (t_0 - 1)T - \frac{1}{t_0}\right) \\
&= \left(T^2 + (1 - t_0)T - t_0\right)\left(T^2 + (t_0 - 1)T - \frac{1}{t_0}\right),
\end{aligned}$$

le polynôme $T^2 + (t_0 - 1)T - \dfrac{1}{t_0}$ n'ayant pas de racine réelle. U et V étant à coefficients réels, il n'y a qu'une possibilité, quite à échanger les rôles de U et V : $U = \lambda\left(T^2 + (1 - t_0)T - t_0\right)$, $\lambda > 0$, et $V = \dfrac{1}{\lambda}\left(T^2 + (t_0 - 1)T - \dfrac{1}{t_0}\right)$, $\lambda > 0$. Mais alors, V a un coefficient strictement négatif, à savoir $\dfrac{1}{\lambda}(t_0 - 1)$.

Donc l'un des polynômes U ou V est constant.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. X est décomposable d'après la question 3. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}G_{X^2}(t) &= P\left(X^2=0\right)+P\left((X^2=1\right)t+P\left(X^2=4\right)t^4 = P(X=0)+P(X=1)t+P(X=2)t^4 = \frac{1}{4}t^4+\frac{2}{4}t+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4}\left(t^4+2t+1\right) = \frac{1}{4}A(t)\end{aligned}$$

et donc $G_{X^2} = \dfrac{1}{4}A$. Si X^2 est décomposable, $X = Y+Z$ où Y et Z sont indépendantes et Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement. G_Y et G_Z sont des polynômes (car $\forall k \geqslant 5$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Z=k) = 0$) à coefficients positifs et de plus $G_X = G_Y G_Z$ ou encore $A = 4G_Y G_Z$. Mais alors, G_Y ou G_Z est un polynôme constant d'après la question précédente ou encore Y ou Z est constante presque sûrement, ce qui n'est pas. Donc, X^2 n'est pas décomposable.

I.B - Variables uniformes

I.B - 1) Variables uniformes décomposables

a) Soient $Q = E\left(\dfrac{X}{a}\right)$ puis $R = X - aE\left(\dfrac{X}{a}\right)$. Q et R sont des valeurs aléatoires définies sur Ω, à valeurs entières et $R(\Omega) = [\![0, a-1]\!]$.

b) $(Q,R)(\Omega) = [\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!]$ et pour $(q,r) \in [\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!]$, l'événement $(Q,R) = (q,r)$ est l'événement $X = aq+r = k$ par unicité du quotient et du reste de la division euclidienne de k par a. Donc, $\forall (q,r) \in [\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!]$, $\mathbb{P}((Q,R) = (q,r)) = \dfrac{1}{n}$.

Soit $(k,q) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![0, b-1]\!]$. $Q = q \Leftrightarrow q \leqslant \dfrac{k}{a} < q+1 \Leftrightarrow aq \leqslant k < aq+a \Leftrightarrow aq \leqslant k \leqslant aq+a-1$.
card($[\![aq, aq+a-1]\!]$) $= a$ et donc

$$\forall q \in [\![0, b-1]\!],\ \mathbb{P}(Q=q) = \frac{a}{n} = \frac{1}{b}.$$

De même, les entiers $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $R = r \in [\![0, a-1]\!]$ sont les entiers r, $a+r$, $\ldots(b-1)a+r$ et donc, $\forall r \in [\![0, r-1]\!]$, $\mathbb{P}(R=r) = \dfrac{b}{n} = \dfrac{1}{a}$.

c) Pour tout $(k,q) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![0, b-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(Q=q) \times \mathbb{P}(R=r) = \frac{1}{b} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{n} = \mathbb{P}((Q,R) = (q,r)).$$

Donc, les variables Q et R sont indépendantes et il en est de même des variables $Y = aQ$ et $Z = R$. De plus, $X = Y+Z$ et Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement (car $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$). Donc, X est décomposable.

$G_X = \dfrac{1}{n}\left(1+T+\ldots+T^{n-1}\right)$. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}G_X = G_{aQ}G_R &= \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}T^a+\frac{1}{b}T^{2a}+\ldots+\frac{1}{b}T^{a(b-1)}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}T+\frac{1}{b}T^2\ldots+\frac{1}{a}T^{a-1}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(1+T^a+T^{2a}+\ldots+T^{a(b-1)}\right)\left(1+T+T^2+\ldots+T^{a-1}\right).\end{aligned}$$

I.B - 2) Variables non uniformes décomposables

a) On pose $P = 1+T+\ldots+T^{n-1} = \dfrac{T^n-1}{T-1}$.
Si X est décomposable, il existe deux variables Y et Z, non constantes presque sûrement, à valeurs entières et indépendantes telles que $X \sim Y+Z$. $U_1 = nG_Y$ et $V_1 = G_Z$ sont alors des polynômes à coefficients positifs non constants tels que

$$P = nG_X = nG_Y G_Z = U_1 V_1,$$

puis $U = \dfrac{U_1}{\mathrm{dom}\,(U_1)}$ et $V = \dfrac{V_1}{\mathrm{dom}\,(V_1)} = \mathrm{dom}\,(U_1)\,V_1$ sont deux polynômes unitaires non constants à coefficients positifs tels que $P = UV$. Par contraposition, si on établit le résultat de l'énoncé, alors X n'est pas décomposable.

On note que si $n = 2$, $P = 1+T$ et il est déjà obligatoire que U ou V soit constant ou encore X n'est pas décomposable. On suppose dorénavant n premier supérieur ou égal à 3.

b) En particulier, n est impair. Les racines de P sont les $n-1$ racines n-èmes de l'unité distinctes de 1 dans $\mathbb{C}$ et puisque n est impair, -1 est l'une de ses racines. U étant à coefficients réels et quite à échanger les rôles de U et V, U peut s'écrire sous la forme $U = (T+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{l}(T-\omega_k)\left(T-\dfrac{1}{\omega_k}\right)$ (de sorte que $r = 2l+1$ est nécessairement impair) où les ω_k sont des racines non réelles deux à deux distinctes de 1 dans $\mathbb{C}$ (de sorte que $\dfrac{1}{\omega_k} = \overline{\omega_k}$).

$$\begin{aligned}
T^r U\left(\frac{1}{T}\right) &= T^r\left(\frac{1}{T}+1\right)\prod_{k=1}^{(r-1)/2}\left(\frac{1}{T}-\omega_k\right)\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{\omega_k}\right) = (T+1)\prod_{k=1}^{(r-1)/2}(1-T\omega_k)\left(1-T\frac{1}{\omega_k}\right)\\
&= (T+1)\prod_{k=1}^{(r-1)/2}(-\omega_k)\left(-\frac{1}{\omega_k}\right)(T-\omega_k)\left(T-\frac{1}{\omega_k}\right) = (T+1)\prod_{k=1}^{(r-1)/2}(T-\omega_k)\left(T-\frac{1}{\omega_k}\right)\\
&= U.
\end{aligned}$$

On note ensuite que $T^n P\left(\dfrac{1}{T}\right) = P$ et donc, $T^s V\left(\dfrac{1}{T}\right) = \dfrac{T^n P\left(\dfrac{1}{T}\right)}{T^r U\left(\dfrac{1}{T}\right)} = \dfrac{P}{U} = V$.

c) L'égalité $T^r U\left(\dfrac{1}{T}\right)$ fournit $1 + u_{r-1}T + u_{r-2}T^2 + \ldots + u_2 T^{r-2} + u_1 T^{r-1} + T^r = 1 + u_1 T + u_{r-2}T^2 + \ldots + u_{r-2}T^{r-2} + u_{r-1}T^{r-1} + T^r$ et donc $\forall k \in [\![1, r-1]\!]$, $u_{r-k} = u_k$ (ce qui reste vrai quand $k \in [\![0, r]\!]$ car $u_0 = u_r = 1$).

En identifiant les coefficients de T^r, dans l'égalité $T = UV$, on obtient

$$1 = u_r v_0 + u_{r-1}v_1 + u_{r-2}v_2 + \ldots + u_1 v_{r-1} + u_0 v_r = 1 + \sum_{k=1}^{r} u_{r-k}v_k = 1 + \sum_{k=1}^{r} u_k v_k,$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} u_k v_k = 0$. Puisque tous les $u_k v_k$ sont des réels positifs, on en déduit que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $u_k v_k = 0$.

d) Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.

- En identifiant les coefficients de T dans l'égalité $P = UV$, on obtient $u_1 + v_1 = 1$. Puisque $u_1 v_1 = 0$, on a $(u_1, v_1) \in \{0, 1\}^2$.
- Soit $k \in [\![1, r-1]\!]$. On suppose que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $(u_1, v_1) \in \{0, 1\}^2$. En identifiant les coefficients de T^{k+1} dans l'égalité $P = UV$, on obtient

$$1 = u_{k+1} + u_k v_1 + \ldots + u_1 v_k + v_{k+1}$$

Par hypothèse de récurrence, $u_k v_1 + \ldots + u_1 v_k$ est un entier naturel. Si $u_k v_1 + \ldots + u_1 v_k \geqslant 2$, alors $u_{k+1} + v_{k+1} < 0$ ce qui est faux. Il ne reste que $u_{k+1} + v_{k+1} \in \{0, 1\}$. Si $u_{k+1} + v_{k+1} = 0$, alors $u_{k+1} = v_{k+1} = 0$. Si $u_{k+1} + v_{k+1} = 1$, puisque $u_{k+1}v_{k+1} = 0$, on a $(u_{k+1}, v_{k+1}) = (1, 0)$ ou $(u_{k+1}, v_{k+1}) = (0, 1)$. Dans tous les cas, $(u_{k+1}, v_{k+1}) \in \{0, 1\}^2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

e) Par le même raisonnement par récurrence qu'à la question précédente, en commençant par $v_{r+1} \in \{0, 1\}$ obtenu en analysant le coefficient de T^{r+1}, on obtient $\forall k \in [\![r+1, s-1]\!]$, $v_k \in \{0, 1\}$.

On prend la valeur en 1. On obtient $n = P(1) = U(1)V(1) = r_1 s_1$ où r_1 et s_1 sont le nombre de coefficients non nuls (et donc égaux à 1) de U et V respectivement. Puisque n est premier, on a $r_1 = 1$ et $s_1 = n$ ou $r_1 = n$ et $s_1 = 1$. Mais $r_1 = 1$ (resp. $s_1 = 1$) fournit $\deg(U) = 0$ (resp. $\deg(V) = 0$) ce qui est une contradiction. Donc, il n'existe pas de polynômes non constants, unitaires, à coefficients positifs U et V tels que $P = UV$ et on en déduit que X n'est pas décomposable.

Partie II - Variables infiniment divisibles

II.A - Variables bornées

II.A - 1) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On peut trouver (d'après le résultat admis par l'énoncé) m variables indépendantes $X_{m,1}, \ldots, X_{m,m}$, constantes égales à $\dfrac{a}{m}$ suivant la même loi que $\dfrac{X}{m}$. On a $X \sim X_{m,1} + \ldots + X_{m,m}$ et les variables $X_{m,k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, ont la même loi. X est donc infiniment divisible.

II.A - 2) a) Si $X_1 > \dfrac{M}{n}$ et $X_2 > \dfrac{M}{n}$ et … et $X_n > \dfrac{M}{n}$ alors $X = X_1 + \ldots + X_n > M$ ou encore $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) \subset (X > M)$ puis

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i > \frac{M}{n}\right)\right) \leqslant \mathbb{P}(X > M) = 0.$$

Puisque les variables X_i sont indépendantes, on a encore $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$ et donc $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]/\ \mathbb{P}\left(X_{i_0} > \frac{M}{n}\right) = 0$. Puisque les variables X_i ont la même loi, on en déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$ puis que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\left(X_i \leqslant \frac{M}{n}\right) = 1$.

De la même façon, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$ et finalement

$$\mathbb{P}\left(|X_i| \leqslant \frac{M}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(x > \frac{M}{n}\right) - \mathbb{P}\left(X < -\frac{M}{n}\right) = 1.$$

b) Puisque les variables X_i sont indépendantes et de mêmes lois,

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nV(X_1).$$

Ensuite, d'après la question précédente, $\mathbb{P}\left(X_1^2 \leqslant \frac{M^2}{n^2}\right) = 1$ et $\mathbb{P}\left(X_1^2 > \frac{M^2}{n^2}\right) = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - E(X_1)^2 \\
&\leqslant E\left(X_1^2\right) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\left(X_1^2 = X_1^2(\omega)\right) X_1^2(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega,\ X_1^2(\omega)\leqslant\frac{M^2}{n^2}} \mathbb{P}\left(X_1^2 = X_1^2(\omega)\right) X_1^2(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega,\ X_1^2(\omega)>\frac{M^2}{n^2}} \mathbb{P}\left(X_1^2 = X_1^2(\omega)\right) X_1^2(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega,\ X_1^2(\omega)\leqslant\frac{M^2}{n^2}} \mathbb{P}\left(X_1^2 = X_1^2(\omega)\right) X_1^2(\omega) \\
&\leqslant \frac{M^2}{n^2} \sum_{\omega\in\Omega,\ X_1^2(\omega)\leqslant\frac{M^2}{n^2}} \mathbb{P}\left(X_1^2 = X_1^2(\omega)\right) \\
&\leqslant \frac{M^2}{n^2} \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\left(X_1^2 = X_1^2(\omega)\right) = \frac{M^2}{n^2}
\end{aligned}$$

et donc,

$$V(X) = nV(X_1) \leqslant n\frac{M^2}{n^2} = \frac{M^2}{n}.$$

II.A - 3) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant V(X) \leqslant \frac{M^2}{n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $V(X) = 0$ ou encore $\mathbb{P}(X = E(X)) = \mathbb{P}\left((X - E(X))^2 = 0\right) = 1$ et donc X est constante presque sûrement.

II.B - Etude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

II.B - 1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(m, p)$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. X bornée (X est à valeurs dans $[\![0, m]\!]$) et donc X est infiniment divisible si et seulement si X est constante presque sûrement. Ceci est équivalent à $p = 0$ ou $p = 1$.

II.B - 2) On pose $X = X_1 + \ldots + X_n$ et $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Puisque les variables X_i sont indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)t^k=G_X(t)=\prod_{i=1}^{n}G_{X_i}(t)&=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_i^k e^{-\lambda_i}}{k!}t^k\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda_i(t-1)}\text{ (on a redémontré un résultat de cours)}\\&=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)(t-1)}=e^{\lambda(t-1)}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}t^k\end{aligned}$$

et donc, par unicité des coefficients d'"une série entière, $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ou encore X suit une loi de Poisson de paramètre λ (on a redémontré un autre résultat de cours).

II.B - 3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. D'après la question précédente, $X\sim X_1+\ldots+X_n$. X est donc infiniment divisible.

II.B - 4) D'après la question précédente, chaque X_i, $i\in[\![1,r]\!]$, est infiniment décomposable : si, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $X_1^{(i)}$, ..., $X_n^{(i)}$, n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda_i}{n}$, alors $X_1^{(i)}+\ldots+X_n^{(i)}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ_i ou encore $X_i\sim X_1^{(i)}+\ldots+X_n^{(i)}$.

On en déduit que chaque iX_i , $i\in[\![1,r]\!]$, est infiniment décomposable car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $iX_i\sim iX_1^{(i)}+\ldots+iX_n^{(i)}$, les $iX_k^{(i)}$, $k\in[\![1,n]\!]$, étant indépendantes.

Il reste à démontrer que la somme des r variables indépendantes iX_i, $i\in[\![1,n]\!]$, est infiniment décomposable. Posons $X=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}iX_i$.

Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Pour chaque $i\in[\![1,r]\!]$, il existe des variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, ayant la même loi, $X_{m,1}^{(i)}$, ..., $X_{m,m}^{(i)}$, telles que $iX_i\sim X_{m,1}^{(i)}+\ldots+X_{m,m}^{(i)}$.

$$\begin{aligned}G_X=\prod_{i=1}^{r}G_{iX_i}=\prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{m}G_{m,k}^{(i)}\right)&=\prod_{i=1}^{r}\left(G_{m,1}^{(i)}\right)^m\\&=\left(\prod_{i=1}^{r}G_{m,1}^{(i)}\right)^m\end{aligned}$$

Posons $G_m=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}G_{m,1}^{(i)}$. G_m est un produit de séries entières de rayon au moins 1 à coefficients positifs et est donc une série entière de rayon au moins 1 à coefficients positifs. De plus, $G_m(1)=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}G_{m,1}^{(i)}(1)$. Ainsi, les coefficients a_n, $n\in\mathbb{N}$, de la série entière de somme G_m sont dans $[0,1]$ et de somme 1.

On peut donc trouver m variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X_{m,1}$, ..., $X_{m,m}$, de même loi dont la fonction génératrice associée est G_m.

$$G_{X_{m,1}+\ldots+X_{m,m}}=\prod_{i=1}^{m}G_{X_{m,i}}=(G_m)^m=G_X$$

ou encore $X\sim X_{m,1}+\ldots+X_{m,m}$. On a montré que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}iX_i$ est infiniment décomposable.

II.C - Séries de variables aléatoires à valeurs entières

II.C - 1) a) Soit $(A,B)\in\mathscr{A}^2$.

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)| &= \left|\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)-\mathbb{P}(B)\right| \leqslant \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)+|\mathbb{P}(A\cap B)-P(B)| = \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\\
&= \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)+\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right).
\end{aligned}
$$

.

b) Soit $t\in[-1,1]$.

$$
\begin{aligned}
|G_X(t)-G_Y(t)| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|P(X=n)-P(Y=n)||t|^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|P(X=n)-P(Y=n)|\\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathbb{P}((X=n)\cap(Y\neq n))+\mathbb{P}((X\neq n)\cap(Y=n))\right)\\
&= \mathbb{P}(X\neq Y)+\mathbb{P}(X\neq Y)=2\mathbb{P}(X\neq Y).
\end{aligned}
$$

II.C - 2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $\omega\in\Omega$,

$$\omega\in Z_{n+1}\Rightarrow \exists i\geqslant n+1/\ U_i(\omega)\neq 0\Rightarrow \exists i\geqslant n/\ U_i(\omega)\neq 0\Rightarrow \omega\in Z_n.$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Z_{n+1}\subset Z_n$ ou encore la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $Z_n=\displaystyle\bigcup_{i\geqslant n}(U_i\neq 0)$ et donc

$$0\leqslant \mathbb{P}(Z_n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geqslant n}(U_i\neq 0)\right)\leqslant \sum_{i=n}^{+\infty}\mathbb{P}(U_i\neq 0).$$

$R_{n-1}=\displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty}\mathbb{P}(U_i\neq 0)$ est le reste à l'ordre $n-1$ d'une série numérique convergente. On sait R_n tend vers 0 et on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n)=0$.

b) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements, décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, $\mathbb{P}(Z_n)$ tend vers $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty}Z_k\right)$ et donc, $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty}Z_k\right)=0$. Maintenant,

$$
\begin{aligned}
\{\omega\in\Omega/\ \{i\in\mathbb{N}^*/\ U_i(\omega)\neq 0\}\text{ est infini}\} &= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\{\omega\in\Omega/\ \exists i\geqslant n/\ U_i(\omega)\neq 0\}\\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty}Z_n
\end{aligned}
$$

et donc $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega/\ \{i\in\mathbb{N}^*/\ U_i(\omega)\neq 0\}\text{ est infini}\})=0$ puis $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega/\ \{i\in\mathbb{N}^*/\ U_i(\omega)\neq 0\}\text{ est fini}\})=1$.

c) Soit ω_0 un élément de $\{\omega\in\Omega/\ \{i\in\mathbb{N}^*/\ U_i(\omega)\neq 0\}\text{ est fini}\}$. Les $U_i(\omega_0)$, $i\in\mathbb{N}^*$, sont nuls à partir d'un certain rang ou encore la suite $(S_n(\omega_0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante à partir d'un certain rang. Pour un tel ω_0, la série de terme général $U_i(\omega_0)$, $i\in\mathbb{N}^*$, converge ou encore $S(\omega_0)$ est défini.

Ainsi, l'ensemble des ω pour lesquels $S(\omega)$ est défini (qui contient l'ensemble des ω_0 précédents) est un événement de probabilité 1 ou encore S est définie presque sûrement.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question II.C.1.b,

$$\forall t\in[-1,1],\ |G_{S_n}(t)-G_S(t)|\leqslant 2\mathbb{P}(S_n\neq S)$$

puis

$$\sup\{|G_{S_n}(t)-G_S(t)|,\ t\in[-1,1]\}\leqslant 2\mathbb{P}(S_n\neq S).$$

Puisque les U_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la suite $(S_n\neq S)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, $\mathbb{P}(S_n\neq S)$ tend vers $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}(S_k\neq S)\right)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega/\ \{i\in\mathbb{N}^*/\ U_i(\omega)\neq 0\}\text{ est infini}\})=0$ quand n tend vers $+\infty$.

Puisque $2\mathbb{P}(S_n \neq S)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite de fonctions (G_{S_n}) converge uniformément vers la fonction G_S sur $[-1, 1]$.

II.C - 3) a) Soit $i \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda_i}$. Puisque la série de terme général positif λ_i, $i \in \mathbb{N}$, converge, $\lim\limits_{i \to +\infty} \lambda_i = 0$. Mais alors

$$\mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - e^{-\lambda_i} \underset{i \to +\infty}{=} \lambda_i + o(\lambda_i).$$

Ceci montre que la série de terme général $\mathbb{P}(X_i \neq 0)$ converge.

b) D'après la question II.C.2.c, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} X_i$ est presque sûrement convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question II.B.2, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\Lambda_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Par suite, pour tout réel t,

$$G_{S_n}(t) = e^{\Lambda_n(t-1)}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = e^{\Lambda_n(t-1)}$ tend vers $e^{\lambda(t-1)}$ quand n tend vers $+\infty$. D'après la question II.C.2.c, la suite $(G_{S_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers G_S et donc

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Mais alors, d'après la question I.A.1, S suit une loi de Poisson de paramètre λ.

c) Pour $i \geqslant 1$, $\mathbb{P}(iX_i \neq 0) = \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ et donc, la série de terme général $\mathbb{P}(iX_i \neq 0)$, $i \in \mathbb{N}$, converge. Puisque les iX_i sont des variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} iX_i$ est presque sûrement convergente d'après la question II.C.2.c. On pose dorénavant $S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} iX_i$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ donné, on a montré à la question II.C.3.c l'existence de $Y_{r,1}, \ldots, Y_{r,m}$ variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, suivant une même loi telles que $S_r \sim Y_{r,1} + \ldots + Y_{r,m}$. Les fonctions génératrices vérifient

$$G_{S_r} = \prod_{k=1}^{m} G_{Y_{r,k}} = (G_{Y_{r,1}})^m$$

et donc, pour $t \geqslant 0$, $G_{Y_{r,1}}(t) = (G_{S_r}(t))^{\frac{1}{m}}$. (G_{S_r}) converge vers G_S sur $[0, 1]$ quand r tend vers $+\infty$ et donc $G_{Y_{r,1}}$ converge vers $G_S^{\frac{1}{m}}$ sur $[0, 1]$. Si on montre que $G_S^{\frac{1}{m}}$ est une fonction génératrice, on peut trouver m variables indépendantes Z_1, $\ldots$, Z_m de fonctions génératrice $G_S^{\frac{1}{m}}$ (et donc de mêmes lois) telles que $G_S = G_{Z_1}^m = G_{Z_1} \ldots G_{Z_m}$ et donc telles que $S \sim Z_1 + \ldots + Z_m$. On aura ainsi montré que S est infiniment divisible.

Vérifions donc que $G_S^{\frac{1}{m}}$ est une fonction génératrice pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Les variables iX_i sont indépendantes et donc, pour $t \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
G_{S_r}(t) &= \prod_{i=1}^{r} G_{iX_i}(t) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(iX_i = k)\, t^k \right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{k \in i\mathbb{N}}^{+\infty} \mathbb{P}(iX_i = k)\, t^k \right) \\
&= \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(iX_i = ik)\, t^{ik} \right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^k e^{-\lambda_i}}{k!} t^{ik} \right) = \prod_{i=1}^{r} e^{\lambda_i \left(t^i - 1\right)} \\
&= e^{-\sum_{i=1}^{r} \lambda_i} e^{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i t^i}.
\end{aligned}$$

puis pour $t \in [-1, 1]$, $G_S(t) = e^{-\lambda} e^{\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i}$ (en particulier, $G_S(t) > 0$) et donc

$$G_S^{\frac{1}{m}}(t) = e^{-\frac{\lambda}{m}} e^{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{m} t^i}.$$

Puisque $e^{-\lambda} e^{\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i}$ est une fonction génératrice à savoir G_S, il en est de même $e^{-\frac{\lambda}{m}} e^{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{m} t^i}$ en appliquant le résultat aux réels positifs $\dfrac{\lambda_i}{m}$.

Partie III - Variables entières infiniment divisibles : étude générale

III.A - Série entière auxiliaire

III.A - 1) On montre par récurrence sur k l'existence et l'unicité de chaque λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

- $1 \times \mathbb{P}(X=1) = \displaystyle\sum_{j=1}^{1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=1-j) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X=1) = \lambda_1 \mathbb{P}(X=0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{P(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ (car $\mathbb{P}(X=0) \neq 0$).
  Le résultat est vrai quand $k=1$.

- Soit $k \geqslant 1$. Supposons l'existence et l'unicité de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ vérifiant $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $i\mathbb{P}(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} j\lambda_j \mathbb{P}(X=i-j)$.

$$(k+1)\mathbb{P}(X=k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k+1-j) \Leftrightarrow (k+1)\lambda_{k+1}\mathbb{P}(X=0) = (k+1)\mathbb{P}(X=k+1) - \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k+1-j)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{k+1} = \frac{1}{(k+1)\mathbb{P}(0)}\left((k+1)\mathbb{P}(X=k+1) - \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k+1-j)\right),$$

  d'où l'existence et l'unicité de λ_{k+1}.

Le résultat est démontré par récurrence.

III.A - 2) Soit $k \geqslant 1$. Si $k \geqslant 2$, $k\lambda_k \mathbb{P}(X=0) = k\mathbb{P}(X=k) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)$ puis

$$\begin{aligned}|\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0) &= \left|\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)\right| \\ &\leqslant \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}|\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j) \leqslant \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j).\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $k=1$ avec la convention qu'une somme vide est nulle.

Ensuite, puisque $k \geqslant 1$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathbb{P}(X=i) \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0)$ et donc

$$\mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j) \leqslant 1 - \mathbb{P}(X=0) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,(1-\mathbb{P}(X=0)) = (1-\mathbb{P}(X=0))\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} |\lambda_j|\right).$$

III.A - 3) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_k| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$.

- D'après la question précédente, $|\lambda_1| \leqslant \dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)} \times 1 \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)}$. L'inégalité est vraie quand $k=1$.

- Soit $k \geqslant 2$. Supposons que $\forall j \in [\![1,k-1]\!]$, $|\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{P(X=0)^j}$.

$$\begin{aligned}|\lambda_k| &\leqslant \frac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}\left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right) \leqslant \frac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^j}\right) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } P(X=0)=1 \\ \dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)} \dfrac{\dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k} - 1}{\dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)} - 1} \text{ si } \mathbb{P}(X=0) \in]0,1[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } P(X=0)=1 \\ \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k} - 1 \text{ si } \mathbb{P}(X=0) \in]0,1[\end{cases} = \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k} - 1 \\ &\leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

III.A - 4) Soit $t \in]-\mathbb{P}(X=0), \mathbb{P}(X=0)[$. Pour $k \geqslant 1$, $\left|\lambda_k t^k\right| \leqslant \left(\dfrac{|t|}{\mathbb{P}(X=0)}\right)^k$. Or, $\dfrac{|t|}{\mathbb{P}(X=0)} < 1$ et donc la série géométrique de terme général $\left(\dfrac{|t|}{\mathbb{P}(X=0)}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge. On en déduit la série de terme général $\lambda_k t^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, est absolument convergente.

Ainsi, pour tout $t \in]-\mathbb{P}(X=0), \mathbb{P}(X=0)[$, la série de terme général $\lambda_k t^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge et on en déduit que $\rho(X) \geqslant \mathbb{P}(X=0)$.

III.A - 5) On note $R(X)$ le rayon de la série entière de somme G_X. On a $R(X) \geqslant 1$ mais je n'ai pas réussi à vérifier que $R(X) \geqslant \rho(X)$. Soit donc $t \in]-\mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}, \mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}[$.

$$\begin{aligned}
H_X'(t)G_X(t) &= \left(\sum_{j=1}^{+\infty} j\lambda_j t^{j-1}\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i)t^i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i+j-1=k-1,\ i\geqslant 0,\ j\geqslant 1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=i)\right)t^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)\right)t^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)t^{k-1} \\
&= G_X'(t).
\end{aligned}$$

Par suite, $G_X' e^{-H_X} - H_X' e^{-H_X} G = 0$ puis $\left(G_X e^{-H_X}\right)' = 0$ puis, pour tout $t \in]-\mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}, \mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}[$,

$$G_X(t)e^{-H_X(t)} = G_X(0)e^{-H_X(0)} = \mathbb{P}(X=0) \times e^{-\ln(\mathbb{P}(X=0))} = 1,$$

et finalement, $\forall t \in]-\mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}, \mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}[$, $G_X(t) = e^{H_X(t)}$.
On en déduit que pour $t \in]-\mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}, \mathrm{Min}\{\rho(X), R(X)\}[$, $G_X(t) > 0$ et $H_X(t) = \ln\left(G_X(t)\right)$.

III.A - 6) On suppose que $\mathbb{P}(X=0) > 0$ et $\mathbb{P}(Y=0) > 0$. Puisque X et Y sont indépendantes, pour $t \in]-\mathrm{Min}(\rho(X), \rho(Y)), \mathrm{Min}(\rho(X), \rho(Y))[$,

$$H_{X+Y}(t) = \ln\left(G_{X+Y}(t)\right) = \ln\left(G_X(t) \times G_Y(t)\right) = \ln\left(G_X(t)\right) + \ln\left(G_Y(t)\right) = H_X(t) + H_Y(t).$$

III.B - Variables aléatoires entières λ-positives

III.B - 1) Soit $k \geqslant 1$. Puisque les λ_j sont des réels positifs,

$$k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j) \geqslant k\lambda_k \mathbb{P}(X=k-k) = k\lambda_k \mathbb{P}(X=0)$$

et donc, puisque $\mathbb{P}(X=0) > 0$, $\lambda_k \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$.

La série numérique de terme général $\dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$, $k \geqslant 1$, converge et a pour somme $\dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}$ et pour tout $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \lambda_k \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$. Donc, la série numérique de terme général λ_k, $k \geqslant 1$, converge.

III.B - 2) Puisque la série numérique de terme général positif λ_j, $j \geqslant 1$, converge, la série entière de somme H_X est normalement et en particulier uniformément convergente sur $[-1, 1]$. On en déduit que H_X est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ (au moins) et que sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\forall t \in]-1, 1[,\ H_X'(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\lambda_j t^{j-1}.$$

De même, la série de terme général positif $\mathbb{P}(X=i)$, $i \geqslant 0$, converge, la fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall t \in]-1, 1[,\ G_X'(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(X=i)t^{i-1}.$$

En effectuant le produit de CAUCHY sur $]-1,1[$ des séries entières de sommes respectives H_X' et G_X, on obtient comme à la question III.A.5,

$$\forall t \in]-1,1[,\ G_X'(t) = H_X'(t)G_X(t).$$

En particulier, pour $t=1$, on obtient $\ln(\mathbb{P}(X=0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = H_X(1) = \ln(G_X(1)) = \ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\right) = \ln(1) = 0$.

III.B - 3) On sait d'après la question II.C.3.c que la série $\sum_{i \geqslant 1} iX_i$ est presque sûrement convergente ou encore la variable $S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ est presque sûrement définie.

On a montré à la question II.C.3 que si $G_S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$, alors pour tout $t \in [-1,1]$,

$$G_S(t) = e^{-\lambda} e^{\sum_{i=1} +\infty \lambda_i t^i} = G_X(t).$$

Donc X et $\sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ suivent la même loi.

III.C - Caractérisation des variables entières infiniment divisibles

III.C - 1) a) On pose $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$.

Si pour un événement élémentaire ω, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_{n,i}(\omega) < 0$, alors on a $S_n(\omega) < 0$ et donc $\bigcap_{i=1}^{n} (X_{n,i} < 0) \subset S_n < 0$ puis $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{n,i} < 0)\right) \leqslant \mathbb{P}(S_n < 0) = 0$.

Donc, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{n,i} < 0)\right) = 0$. Puisque les $X_{n,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont indépendantes et de mêmes lois, on en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0)^n = 0$ puis $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0) = 0$.

Donc, $X_{n,1}$ (et plus généralement chaque $X_{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$) est presque sûrement positive ou nulle.

b) $(S_n = 0) = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{n,i} \geqslant 0)\right) \cap (X_{n,1} + \ldots + X_{n,n} = 0)\right) \cup ((\exists i/\ X_{n,i} < 0) \cap (X_{n,1} + \ldots + X_{n,n} = 0)) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{n,i} = 0)\right) \cup ((\exists i/\ X_{n,i} < 0) \cap (X_{n,1} + \ldots + X_{n,n} = 0))$ puis

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_{n,i} = 0)\right) + 0 = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(X = 0) > 0$ et donc que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$ (et plus généralement, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n,k}) > 0$).

c) $\mathbb{P}((X_{n,1} \notin \mathbb{N}) \cap (X_{n,2} = 0) \cap \ldots \cap (X_{n,n} = 0)) \leqslant \mathbb{P}(S_n \notin \mathbb{N}) = 0$ et donc, les variables $X_{n,1}$ étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(X_{n,1} \notin \mathbb{N}) \times \mathbb{P}(X_{n,2} = 0) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_{n,n} = 0) = 0.$$

Puisque pour $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X_{n,k} = 0) \neq 0$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} \notin \mathbb{N}) = 0$. Plus généralement, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n,i} \notin \mathbb{N}) = 0$ ou encore les variables aléatoires $X_{n,i}$ sont presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

III.C - 2) a) D'après la question III.C.1.b, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = (\mathbb{P}(X = 0))^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(\mathbb{P}(X=0))}{n}} \text{ (car } \mathbb{P}(X = 0) > 0.$$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = e^0 = 1$.

b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $0 \leqslant \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 1 - \sum_{k \neq i} \mathbb{P}(X_{n,1} = k) \leqslant 1 - \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 0$.

III.C - 3) a) Les $X_{n,i}$ sont indépendantes. D'après la question III.A.6, par récurrence (puisque $X_{n,1} + \ldots + X_{n,n-1}$ et $X_{n,n}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)

$$H_X = H_{X_{n,1}} + \ldots + H_{X_{n,n}} = nH_n.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on note μ_k, $k \geqslant 1$, les coefficients de la série entière H_n, par unicité des coefficients d'une série entière, on a $\forall k \geqslant 1$, $n\mu_k = \lambda_k$. Par définition,

$$\forall k \geqslant 1,\ k\mathbb{P}\left(X_{n,1} = k\right) = \sum_{j=1}^{k} j\mu_j \mathbb{P}\left(X_{n,1} = k - j\right)$$

et donc

$$\forall k \geqslant 1,\ nk\mathbb{P}\left(X_{n,1} = k\right) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}\left(X_{n,1} = k - j\right)$$

III.C - 4) Pour n et k dans $\mathbb{N}^*$,

$$n\mathbb{P}\left(X_{n,1} = k\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k}\lambda_j \mathbb{P}\left(X_{n,1} = k - j\right) = \lambda_k \mathbb{P}\left(X_{n,1} = 0\right) + \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{-1}\lambda_j \mathbb{P}\left(X_{n,1} = k - j\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $n\mathbb{P}\left(X_{n,1} = k\right)$ tend vers $/lambda_k$ d'après les questions II.C.2.a et II.C.2.b.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\mathbb{P}\left(X_{n,1} = k\right) \geqslant 0$ et donc, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\lambda_k \geqslant 0$. X est donc λ-positive.

III.C - 5) Conclusion

a) La question III.C.4 montre $(i) \Rightarrow (ii)$. La question III.B.3 montre $(ii) \Rightarrow (iii)$. La question II.c.3.c montre $(iii) \Rightarrow (i)$. On a donc l'équivalence des trois conditions (i), (ii) et (iii).

b) Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et soit $c \in \mathbb{R}$. On peut trouver une variable constante $Y = c$ telle que X et Y soient indépendantes. Y est infiniment divisible d'après la question II.A.1. Si X est infiniment divisible, alors $X + c$ l'est en adaptant la démonstration de la question II.B.4. Inversement, si $X + c$ est infiniment divisible, alors $X + c - c = X$ est infiniment divisible.

Ainsi, X est infiniment divisible si et seulement si $X - 1$ l'est. Donc, si $\mathbb{P}(X = 1) > 0$, alors (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

c) La variable $Y = X - 1$ suit la loi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^k p$. $(Y = 0) = p > 0$. Ensuite, pour tout réel $t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$,

$$G_Y(t) = p\sum_{k=0}^{+\infty}((1-p)t)^k = \frac{p}{1 - (1-p)t}$$

et donc

$$\begin{aligned} H_Y(t) &= \ln(p) - \ln(1 - (1-p)t) \\ &= \ln(p) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} t^k. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, $\lambda_k = \dfrac{(1-p)^k}{k} \geqslant 0$. Puisque (ii) est vérifiée, Y est infiniment divisible puis X est infiniment divisible.

